原序要旨

近年以來,微積分學課本之印行於世者,不可謂不多.然欲求一提綱鉤玄,引人入勝之作,使一讀之後,能瞭然於此學之影響及其應用之關係者,殊不易得.若專求理論之謹嚴而不問思想之起源,則初學見之,將茫然不知所措;或注意應用之例題而不講系統之聯繫,則易流於支離瑣碎之病.然則如何將基本與枝節問題加以應有之明辨,去其支蔓,明其精蘊,而後建立一完整之體系,俾會通於理論與應用之相應相倚,得左右逢源之樂;甚矣著述之難也.

本書係修訂前在德國哥廷根大學歷年之講稿而成;倉促從事,何敢自炫爲理想之作.惟所敢自信者,此書之付印,在今日尚非贅事.就其所赴之目的及敍述之方式言之,似有其特殊之處,不僅材料之選擇與排次與衆不同而已.其最顯著者,爲微分與積分學之混合編述,與一般之先論微分,後論積分者大異其旨.考微積之先後分論,實由於偶然之習慣,殊乏理論之根據,其結果使學者不能直捷觸及中心問題,卽對於定積分、不定積分及導數之關係未能融會領悟,不可謂非憾事.自 Felix Klein 首創混合講述之法而風氣爲之一變.今師其意以編本書;上卷所論,爲一個自變數之函數問題,至二個以上自變數之理論及應用,擬留待下卷研討之;蓋採用是法以編課本者,前似未嘗見也.

近代數學所以能發生濃厚之美感者,要爲推理方法之謹嚴.故立論必求符合謹嚴之最高標準,斯固然矣.雖然,管見所及,以爲原始要

終，必追溯數學認識之本源而後可．考數學最後之所本，是否起自觀覺(Anschauung)，爲一哲學問題，惟觀覺之有助於認識，則爲無可否認之事．因此之故，本書在不失謹嚴之條件下，擬力求觀覺之發揮與運用．凡基本概念與原理之闡明，必先求其淵源於觀覺之中；至其細密之分析，嚴正之證明，則列入每章之附錄中（初讀時可略去，俟感覺需要時細讀之)；凡此所爲，不特爲初學設想，蓋有深意存焉．

復次，本書所注意者，爲微積分學與應用問題之密切關係，晚近應用科學之昌明，固爲理論發展之結果，而應用問題之發生，常足以刺激理論之精進，其間互爲因果之關係，實爲科學發展之原動力．明乎是，乃可益見數學思想之優美與偉大．本書僅舉其大者要者，甚望讀者由此啓途，深思研尋，進窺此學之本原耳．

本書內容提要

本書根據 R. Courant 所著 Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung 及最近出版之英譯本編譯而成，計分上下兩卷，此篇下卷，以多變數之函數作題材，觀極限問題之發展。先論偏導數及全微分，繼以重積分、線積分及面積分說明其間之關係及物理學中之應用。復就旁義積分之含參變數者與無盡級數作比較之研討，從而創造各種新式函數，大有引人入勝之感。最後應用全部原理以治複變數之函數，使微積分學得一完整之體系。國內理工大學採作教本，甚為適宜。

柯氏微積分學

上卷目次

柯氏微積分學

下卷目次

（頁數）

柯氏微積分學

上　卷

第一章　實數、函數與極限

爲學如建大廈，務先立不可搖之基.微積分學之所基者，爲數之概念.繼數之後，則有所謂函數[1]與極限[2].故本書第一章擬先將此三種基本概念以最淺顯之方法講明之.

第一節　實數略說

1.1.1. 有理數之特性.

數果何謂乎?數之起源何自乎?此哲學家聚訟紛紜之問題，治數學者可以暫置不論.吾人自有生以來，即知有所謂自然數，亦稱正整數[3]者 1,2,3,4,5,6 ….一正整數加一正整數必爲一正整數，乘一正整數亦必爲一正整數；因此吾人遂謂加法與乘法在正整數之區域內可以暢行無阻.惟減法與除法在同一區域內未必在在可行，蓋一正整數減一正整數未必爲一正整數，除一正整數亦未必爲一正整數.循是以論，如吾人僅有正整數，則減法與除法之應用，宜有相當之限制，其影響所及，勢必阻礙學術思想之進步.然則欲求減法及除法之在在可行，必於正整數之外，另創新數而後可;矧宇宙現象，森羅萬有，交錯紛紜，欲憑正整數以認識一切，其勢有所不能.於是有所謂零[4]、負整數[5]及分數[6]者應之而起.凡正負整數、正負分數及零統稱之爲有理數[7].考此種種，皆

---

(1)function; fonction; Funktion. (2)limit; limite; Grenzwert. (3)positive integer; nombre entier positif; ganze positive Zahl. (4)zero; zéro; Null. (5)negative integer; nombre entier négatif; ganze negative Zahl (6)fraction; fraction; Bruch. (7)rational number; nombre rationnel; rationale Zahl.

可由1疊次應用加減乘除四法而得之，而加減乘除四法，世常以有理算法(1)名之，由是而產生之數，因稱之為有理數．有理數相加相乘(在有理數之區域內，減法得與加法合併，除法得與乘法合併，故僅言加法乘法即可．)，自有其必然之原理(2)；如以 a,b,c 表任何有理數，則 $a+b=b+a$，$ab=ba$，$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$，$(a+b)c=ac+bc$ 等等，其真固顯而易見，吾人恭之而不疑者．在有理數之區域內，加減乘除四法可以行之無阻，蓋將此四法任意施行之結果必仍為一有理數；惟以零除任何其他之數為無意義之事①，在數學中懸為禁律，不可不注意及之．

吾人常將有理數由一直線上之點表而出之．設在一直線上任取一點以代表零，謂之原點，更取一其他之點以代表1，則此兩點間之線段卽可作為量度之標準，使每一有理數各得直線上之一點以表之；點之表正有理數者居於原點之右，表負有理數者居於原點之左，如是則有理數之大小關係由其點之位次關係可以見之(見圖1.1)．設以 $|a|$ 表 a 之絕對值(3)，當 $a\geqq 0$ 時其絕對值為 a，當 $a<0$ 時為 $-a$，則 $|a|$ 之意義，由圖上言之，為原點與 a 點相去之距離耳．凡表達有理數之點可簡稱為有理點．



圖1.1

每兩有理數之間，必又有一有理數；如0與 $\frac{1}{2}$ 之間有 $\frac{1}{2^2}$，0與 $\frac{1}{2^2}$ 之間有 $\frac{1}{2^3}$，0與 $\frac{1}{2^3}$ 之間復有 $\frac{1}{2^4}$，$\cdots$．蓋一直線上之任何線段必可分之又分，無論分至如何之小，其中必含有有理點無疑．是卽所謂有理數之密佈性，其意謂任何兩有理數之間必又有一有理數存在．吾人常謂有理點在一直線上處處密佈(4)．

---

(1) rational operation; opération rationnel; rationale Rechenoperation.

(2) axiom; axiome; Axiom.　(3) absolute value; valeur absolue; absoluter Betrag (einer Zahl).　(4) dense everywhere; dense partout; überall dicht.

①倘其可行，則結果將異常荒謬，如由 $3-3=7-7$ 或 $3(1-1)=7(1-1)$ 竟得 $3=7$．蓋欲求一數，乘0後不等於0者，與0之原義相背，故為不可能也

所當注意者，有理點在直線上雖云密佈，其間尙不無漏隙可尋．何以言之？試作一等腰直角三角形，其腰長爲1者，則其斜邊之長，設以l名之，爲一自乘後爲2之數，卽$l^2=2$．此l顯非有理數．何則，倘爲有理數，則自乘後爲2之有理數必爲大於1小於2之一分數如$\frac{p}{q}$者，其中p及q爲未含公因數之兩正整數．於是由$p^2=2q^2$得知p^2含有2，故爲一偶數．p^2既爲一偶數，則p亦非偶不可，蓋偶數自乘必偶，奇數自乘必奇．惟如是，p亦必含2如$p=2p'$，其中p'自爲一正整數．於是據$p^2=(2p')^2=4p'^2=2q^2$得知$q^2=2p'^2$，意謂q亦爲一偶數．此結論顯與p及q之本性不相符合，因據假定p及q未能有一公因數之故．由是知l必非有理數，蓋無一有理數，自乘後爲2者．循是以觀，l雖得由直線上之一點表而出之，其所表而出之者實非有理數．然則在異常稠密之有理點之間，尙有未能代表有理數之點．故密佈爲一事，是否因此而無漏又爲一事，不可以不辨也．

1.1.2. 實數之連續性

綜上所論，任何有理數必可在一直線上求得一點以表達之，惟一直線上之點未必均能表達有理數．時勢之所迫，又深感有理數之不敷應用，於是有創造新數之必要，**謂一直線上之點，其未能代表有理數者，實代表一種新數，謂之無理數**[1]．自是以後，直線上任何一點，必有一有理數或無理數與之相應．有理數與無理數統稱之爲**實數**[2]．**實數之集團與直線上之點乃成一一相應**[3]**之關係，是卽所謂實數之連續性**[4]．

無理數之義，誠如上述，惟其性質，殊覺繁複而難明．例如$\sqrt{2}$，謂$\sqrt{2}=1.414$自是錯誤，因1.414自乘，不能爲2，若謂$\sqrt{2}=1.41421$，其誤與前正同；謂$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$，其中"$\cdots$"之意，似謂"如是如是"，惟$\sqrt{2}$既非有理數，卽非循環小數，其中之小數正不知如何相隨

(1) irrational number; nombre irrationnel; irrationale Zahl. (2) real number; nombre réel; reelle Zahl. (3) one-to-one correspondence; correspondance univoque; umkehrbar eindeutige Zuordnung. (4) continuity; continuité; Stetigkeit.

相續，因此所謂如是如是，直無意義可言．雖然，吾人知必有直線上之一點與$\sqrt{2}$相應者，其點自介於 1 與 2 之間；試詳考之，又可知

$$1.4<\sqrt{2}<1.5,$$
$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$
$$1.414<\sqrt{2}<1.415,$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143,$$

....

據是以推，吾人不難求得種種線段，其兩端均為有理點，兩端相隔愈趨愈近，惟始終含$\sqrt{2}$於其間．惟如是，欲求索一有理數，與$\sqrt{2}$相差任意小，亦無不可．所謂任意小，乃其小絕無限制之謂，欲求索一有理數，與$\sqrt{2}$之相差小於$\frac{1}{10^4}$固可，小於$\frac{1}{10^6}$，小於$\frac{1}{10^{11}}$，或小於任何小之一正數 ε，亦未嘗不可．因此之故，吾人常謂$\sqrt{2}$得由有理數近似表達之，且其近似之程度得隨人所欲，絕無限制．此不獨$\sqrt{2}$為然，其他無理數亦無不如是．

實數理論，為微積分學最後之基礎，其中精微之理，當於本章附錄中略加論列．至於實數之運算吾人不難證明，其相加相乘所據之原理與有理數相加相乘之所據者完全相同．復次，實數之間有種種不等式成立，特舉其重要者如次：設 $a>b$，又 $c>d$，則 $a+c>b+d$．又設 $a>b$，$c>0$，則 $ac>bc$；惟在 $c<0$ 時，則 $ac<bc$．苟 $a>b>0$ 又 $c>d>0$，則 $ac>bd$．凡此皆顯而易見之理，不待證而自明．更就實數之絕對值論之，復有下列不等式成立：

$$|a\pm b|\leqq|a|+|b|,$$
$$|a\pm b|\geqq|a|-|b|.$$

復次，任何實數之平方必不能小於零，因此若以 x 與 y 表任何實數，必有

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\geqq 0,$$

或

$$2xy\leqq x^2+y^2.$$

是即所謂 Schwarz 不等式．

1.1.3. 實數之表達形式

為計算之便,吾人常以十進法記數,如

$$a = \cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$$

其意卽謂

$$a = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots$$

其中 $$a_0, a_1, a_2, \cdots a_{-1}, a_{-2}, \cdots$$

為 0,1,2,3, ⋯ 9 諸數中之一.任何有理數如化為小數之形式,必為一有盡小數或無窮之循環小數,而無窮小數之不循環者,則表達一無理數,此初等數學中之事實,吾人當能記憶及之.惟數之為十進,實為偶然之事而非必然之理,蓋舍 10 而取任何一數作為基數亦無不可.在純粹數學之理論中,常有所謂二進法者,乃以 2 為基數.將一正整數 a 化成如下之形式:

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 \times 2 + \alpha_2 \times 2^2 + \alpha_3 \times 2^3 + \cdots$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 等不外 0 或 1 兩者之一而已.苟如是,則 9 在此將有 $$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1001$$

之形式.要之,基數之為 10,為 2,或為一其他之數,須視研究之如何便利而定.所求者,乃既定之後,任何實數均得一簡明之表達形式,且為唯一之表達形式耳.

例　題①

1.試證下列各數為無理數: (a) $\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{n}$,但 n 非完全平方. (c) $\sqrt[3]{3}$.

(d) *$x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$. (e)* $x = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

2.在尋常之直角坐標系中,凡縱橫兩坐標俱為整數之點稱為格點.試證頂點適在格點之三角形不能為正三角形.

3.試證下列各不等式:

(a) $x + \frac{1}{x} \geqq 2, x > 0$. (b) $x + \frac{1}{x} \leqq -2, x < 0$. (c) $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqq 2, x \neq 0$.

---

①例題之有 * 者較為繁複,暫時可以略去.

4. 設 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 爲任何實數，試應用 Schwarz 不等式以證

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

此關係亦稱 Cauchy-Schwarz 不等式.

5. 試證 a 若爲一正數，則 $ax^2+2bx+c \geqq 0$，不論 x 所取之值爲何如，均能成立之必要與充分條件爲 $b^2-ac \leqq 0$.

6. 試證下列各不等式：

(a) $x^2+xy+y^2 \geqq 0$.

(b)* $x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n} \geqq 0$.

(c)* $x^4-3x^3+4x^2-3x+1 \geqq 0$.

7. 試由 $(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$ 一式應用題5之結果以證 Cauchy-Schwarz 不等式.

8. 試考 Cauchy-Schwarz 不等式中之等號在何種條件之下始能成立.

9. Cauchy-Schwarz 不等式在 $n=2,3$ 時，試考其在幾何上之意義爲何如.

10. 設 γ_1, γ_2 爲一直線之方向餘弦，即 $\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$. 又設 $\eta_1^2+\eta_2^2=1$. 試證等式 $\gamma_1\eta_1+\gamma_2\eta_2=1$ 聯合等式 $\gamma_1=\eta_1, \gamma_2=\eta_2$.

11. 試證不等式

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2} \leqq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2},$$

並陳述其幾何上之意義.

第二節　函數概念

1.2.1. 函數之定義

宇宙現象，無一不在變化之中. 欲明其中變化之必然性，其道有甚繁者，要之必自觀察事實始. 惟僅隨所遇而觀察，自必受制於外界之條件，因之有實驗以濟其窮. 從事實驗之時，得設事易境以副我之所欲求. 如吾人可令溫度之暫時不變，以考一氣體之體積如何隨其所受壓力而變化；實驗之結果知壓力愈大則體積愈小，屢試屢效，未嘗或差，於是由所得之數量可望歸納爲一普遍之定律. 在實驗之過程中，所設爲不變者

以**常數**(1)計之，其變者以**變數**(2)表之；如以一變數 v 表一氣體之體積，p 表其壓力，更以一常數 C 表所設為不變之溫度等等，根據實驗之結果，知其間之關係為 $$v=\frac{C}{p}.$$
由是 v 隨 p 而變之法則，乃昭然若揭．此定理即世所盛稱之 Boyle 定律，未嘗對 v 或 p 之本身有所規定，其所論斷者為 v 與 p 相倚為變之關係．當 p 在其規定範圍內(此範圍之大小，視實驗情形而定)等於某確定之數時，v 即得一數以應之．p 定，則 v 隨之而定，p 變，v 即隨之而變．惟如是，吾人遂謂 v 為 p 之函數．科學中如是之例，不勝枚舉．蓋科學之要旨，在乎探求事物間相倚為變之關係而已．

欲為函數立一精確之定義，當先說明變數．數在一規定範圍之內得變其值者謂之變數．試聚一切實數之不小於 a、不大於 b 者(假定 a 及 b 為確定之二實數，又假定 $a<b$)，即 x 之滿足 $$a\leqq x\leqq b$$
者，使 x 在此範圍之內得任取何值，則 x 即為一變數，而由 a 至 b 之一間隔謂之 x 之**變程**(3)；a 及 b 謂其變程之兩端，並稱 a 為其左端，b 為其右端．兩端之是否包括於變程之內，當視所研究之問題而定．所謂包括於變程之內，無異謂 x 亦可取得 a 及 b 兩值，如是則此變程常以**閉程**(4)名之．苟一變程未嘗包含其兩端於其中，則謂之**開程**(5)，變程之開者，其變數 x 顯受 $a<x<b$ 之限制．復次，變程中有開其左端，閉其右端，如 $a<x\leqq b$ 者，亦有閉其左端，開其右端，如 $a\leqq x<b$ 者．亦有對其兩端絕無限制，如 $-\infty<x<\infty$ 者謂 x 可任意變大，或對其中之一端絕無限制，如 $a<x<\infty$ 或 $-\infty<x<b$．要之，欲應用一變數，必先規定其變程，而此變程之為開為閉，亦須明定之方妥；蓋微積分學中之定理在閉程中有效，在開程中有未必真確者，故須注意說明之也．

當 x 在其變程中取得每一值時，有 y 之一值依一確定之法則隨之

(1)constant; constante; Konstante.　(2)variable; variable; Variable.
(3)interval; intervalle; Intervall.　(4)closed interval; intervalle fermé; abgeschlossener Intervall.　(5)open interval; intervalle ouvert; offener Intervall.

而定者,則稱 y 爲 x 之函數,世常以

$$y=f(x),\quad 或\quad y=F(x),\quad 或\quad y=g(x),$$

或類似之符號表而出之;吾人稱 x 爲自變數[(1)],依一公例與之相應之 y 爲因變數[(2)];而 f,F,g 等符號之意,不過謂 y 依一公例隨 x 而定,此公例之內容何如,自非另加說明不可.例如

$$y=x^2+4x-1,\qquad 0\leqq x\leqq 10,$$

吾人不僅知 y 因 x 而定,且知其如何隨 x 而定.至於 $f(x)$ 或 $g(x)$所表達者,謂必有一公例存在,據此公例可以由 x 以知 y 而已.明乎是,則所謂 $f(2)$,乃 y 所示之公例在 $x=2$ 時所應得之值;又如 $g(\pi)$,爲 $x=\pi$ 時依 g 之公例與之相應之 y.故設

$$y=f(x)=1+2x+3x^2,$$

則

$$f(m)=1+2m+3m^2,$$

$$f(x+h)=1+2(x+h)+3(x+h)^2.$$

1.2.2. 函數之圖示

考上述函數之定義,其所包羅者可謂異常廣泛.在初步之微積分學中,吾人對於所欲討論之函數,似不妨加以相當之限制.此種限制可於幾何學中求之,蓋幾何認識發源於觀覺[(3)],而人類觀覺之本能可與思考之力相輔爲用也.

設有一函數 $y=f(x)$,其中 y 隨x而變之法則可藉圖示以明之.試作兩垂直之坐標軸如圖 1.2 而據之以作點,其橫坐標爲 x,其縱坐標爲與 x 相應之 y;復連接各點而成一曲線(如此作圖,謂之標繪[(4)]),於是由此曲線之形狀即可明其所表函數之特性.在昔從事解析幾何學之時,輒爲曲線建立一方程

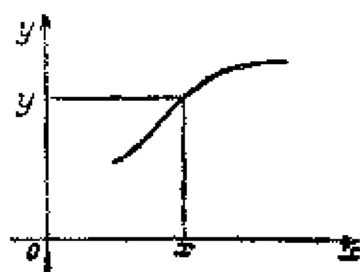


圖1.2

(1)independent variable; variable indépendante; unabhängige Variable.

(2)dependent variable; variable dépendante; abhängige Variable. (3)Anschauung.

(4)Plotting.

式.所謂曲線之方程式者，乃曲線上各點坐標間之函數關係.蓋解析幾何學之要旨，在乎應用解析方法以解決幾何問題. 欲其事之可能，必先將幾何學中所研究之對象，一變而爲解析方法可施之對象.故任何一點以其坐標代表之，積點而成之曲線以其點坐標間之函數表達之；如是而後解析方法始得盡其用.今吾人已知一函數而欲圖示之，勢必將上述之意倒施之而後可.蓋由前之說，乃欲求一函數以替代一曲線，由後之說，爲標繪一曲線以顯示一函數之特性.欲求一曲線之可繪，自有其相當之條件.茲特舉例明之.設有一函數 $y=h(x)$，其中 x 爲任何有理數時，y 之值爲 1，x 爲任何無理數時，y 之值爲 -1，吾人欲標繪之，將有所不能.何則，考此函數之定義，其點忽在橫軸之上，忽在橫軸之下，且在任何狹小之間隔中，尙作無限多次之上下.惟如是，欲作一連續可觀之曲線，自不可得.此種函數，在初步之微積分學中暫不加以討論.吾人有鑒於此，乃取以爲標準，使函數之研究有所限制可也.

圖示函數之用意，不過欲使一因變數隨其自變數而定之公例瞭然無餘而已. 因此之故，函數之各種特性，可於其圖形中見之. 尋常所指之函數，每一自變數之值必有一因變數之值，且唯一之值與之相應.欲表明其值爲唯一，吾人常用**單值函數**(1) 之名稱.就單值函數之圖形觀之，試任意作一直線與縱軸平行，苟其與圖相交，則僅能交於一點，而不能多於一點，此理之極顯者. 至於 $y=\pm\sqrt{x}$，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=\pm\sqrt{1+x^2}$，其中每一自變數之值有 y 之正負兩值與之相應；此種函數遂稱之爲**多值函數**(2)，在上舉諸例自爲一種雙值函數.就其圖形言之，試作一平行縱軸之直線與之相交，其交點必多於一，觀於圖 1.3 及圖1.4 可以見之.惟吾人爲研究之便，常設法避免一函數之多值性. 在相當條件之下，多值函數可分裂爲若干**單值支**(3)，如 $y=\pm\sqrt{1+x^2}$ 在 $y\geqq0$

(1)one-valued function; fonction uniforme; eindeutige Funktion.　(2)many valued function; fonction multiforme; mehrdeutige Funktion.　(3)one-valued branch; branche uniforme; eindeutiger Zweig.

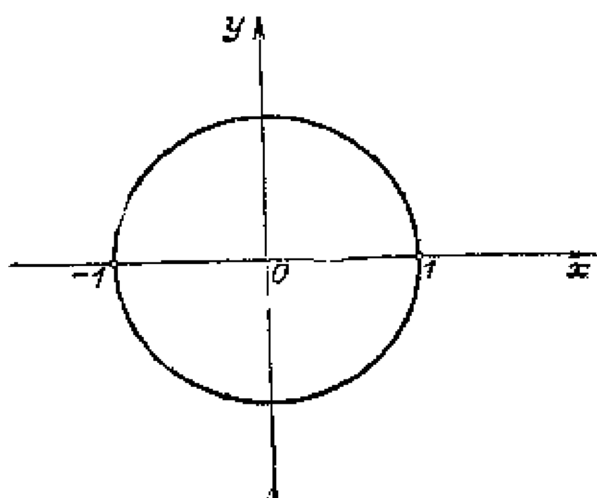


圖1.3

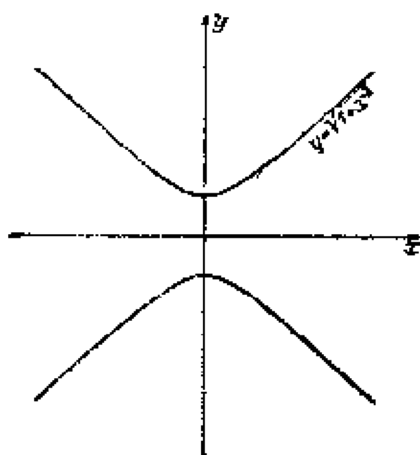


圖1.4

時爲一單値函數，在$y\leqq 0$時又爲一單値函數，合兩單値支而一多値函數以成．惟單値之分支既明，其全體自亦可知，故吾人嗣後論函數，專指單値函數而言．

欲明函數之圖示，特更舉數例於後：

〔例一〕 $y=ax$，其中a假定爲一正數．據此式，y之隨x而變，成正比之關係．當$x=0$時，y之値亦爲零，是以其圖形必過原點．又x之値變大時，y之値亦因之而變大；不論x之値爲何如，苟其由x變至$x+\Delta x$，（Δx稱爲x之變量），則y必由ax變至$a(x+\Delta x)$，於是知x如有Δx之變，則y隨之而生之變量，設以Δy表之，必爲$a\Delta x$；此二變量之比始終爲一常數（即a）．此種特性，謂之函數之勻變性．據上所述，可知$y=ax$之圖形爲一經過原點之直線如圖1.5．

〔例二〕 $y=ax+b$．爲討論之便，不妨假定a及b均爲正數．此函數亦具有勻變性；蓋x如由x變至$x+\Delta x$，y必由$ax+b$變至$a(x+\Delta x)+b$，由是知x如有Δx之變，y因之而有之變必爲$a(x+\Delta x)+b-(ax+b)=a\cdot\Delta x$故$y$之變量適$a$倍於$x$之變量而$a$爲一常數；是即所謂勻變性．惟如是，$y=ax+b$之圖形亦爲一直線，經過$x=0$，$y=b$及$x=-\frac{b}{a}$，$y=0$兩點（見圖1.5）．試將$y=ax+b$及$y=ax$兩者細審而並觀之，則見其中之一可由其他平移而得之．如是者，吾人常稱y爲x之直線性函數(1)．

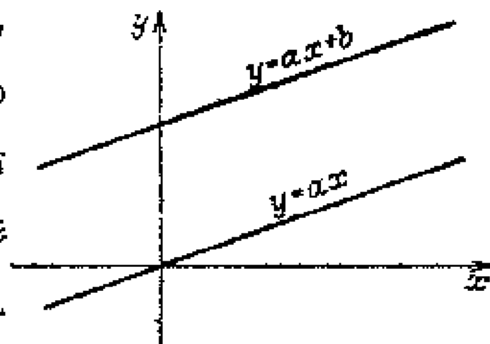


圖1.5

(1)linear function; fonction linéaire; lineare Funktion.

［例三］ $y=\frac{a}{x}$，其中 a 假定為一定數．設 $a=1$，則其圖形自經過 $x=1$，$y=1$，$x=\frac{1}{2}$、$y=2$ 及 $x=2$、$y=\frac{1}{2}$ 諸點，為一等軸雙曲線如圖1.6．但當 $x=0$ 時，y 之值不能規定；當 x 向

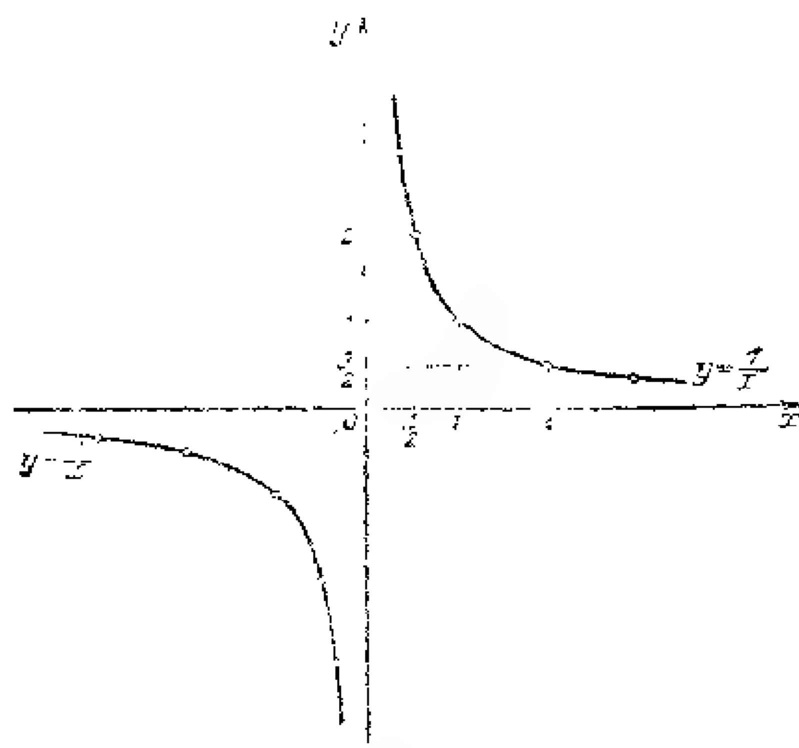


圖1.6

原點趨近，y 之值將無限制變大；其圖形在此現中斷之象．

［例四］ 設 a 為任何實數，當自變數 x 之值為 a 或 $-a$ 時，因變數 y 之值相同者，換言之，

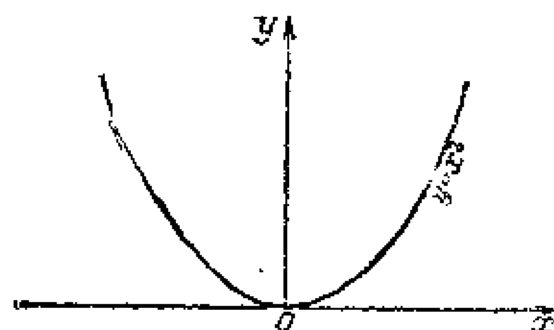


圖1.7

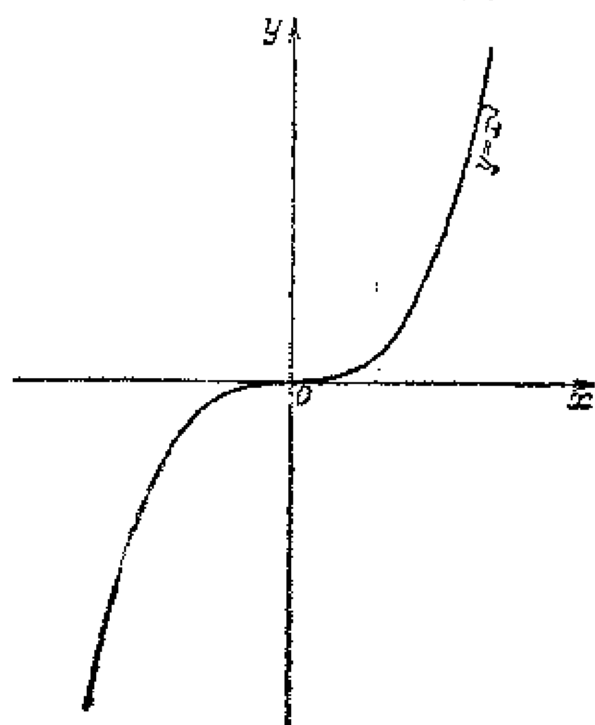


圖1.8

不論 x 為任何數，凡函數之滿足

$$f(x)=f(-x)$$

者，謂之偶函數(1)．據偶函數之定義，其圖形在縱軸之左右必爲同形，因此遂謂其對稱於縱軸．例如 $y=x^2$ 即爲一偶函數，其圖形之對稱於縱軸，可於圖 1.7 見之．又函數之滿足

$$f(x)=-f(-x)$$

者謂之奇函數(2)，其圖形必對稱於原點．如 $y=x$，$y=x^3$（見圖1.8）及 $y=\frac{1}{x}$（見圖 1.6）均爲奇函數．

［例五］ $y=a$ 意即不論 x 在其變程中如何變化，y 之值始終爲 a．此種函數，謂之常數，其圖形爲一直線，與橫軸平行．

［例六］ 設有一函數 $y=f(x)$，當其中自變數之值在其變程中變大時，y 之值隨之而變大者，換言之，當 x 之變量 Δx 爲正數時，y 因之而有之變量 Δy 爲正者，謂之獨升函數(3)．若 Δx 爲正時，Δy 爲負者，$f(x)$ 謂之獨降函數(4)．前者之圖形必上升，後者之圖形必下降，如圖 1.9．兩者常簡稱爲獨行函數(5)或稱此等函數爲有獨行性．

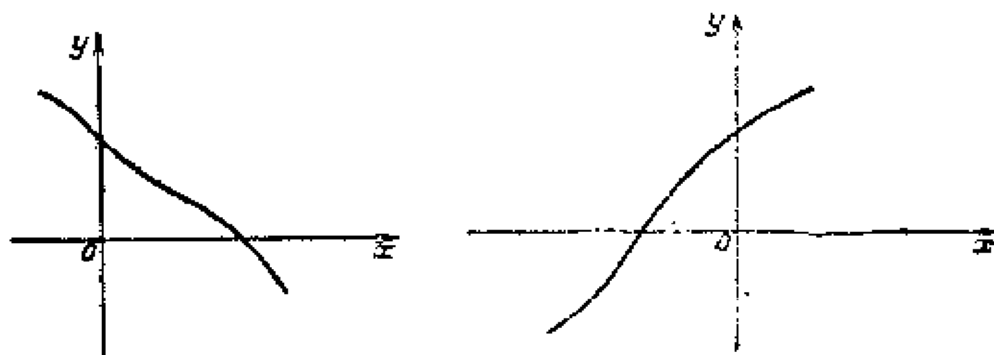


圖1.9

觀上所舉各函數之圖形，有一共同特性，深足注意者．此種圖形，除少數特殊之點如圖 1.6 中之原點外，均爲連續不斷之曲線．函數之連續性，吾人當於第六節中詳論之．現所欲說明者爲一極淺顯之事實：當自變數稍稍變化，其對於因變數所引起之變化亦相當微小者；換言之，當自變數之變化限於某種範圍之內，因變數隨之而生之變化不能超越相當範圍者，謂之連續函數．

(1)even function; fonction paire; gerade Funktion. (2)odd function; fonction impaire; ungerade Funktion. (3)monotonic increasing function; fonction constamment en croissant; monoton wachsende Funktion. (4)monotonic decreasing function; fonction constamment en décroissant; monoton abnehmende Funktion. (5)monotonic function; fonction monotone; monotone Funktion.

觀乎以上各例，此意似不難瞭然；惟欲爲連續函數立一精密之定義，則尚有待．

1.2.3. 逆函數

觀前段中所舉函數之例，其中兩變數之間實有一種相倚爲變之關係．因之，以 x 爲自變數，視 y 隨 x 而變固可，或以 y 爲自變數，視 x 爲 y 之函數，亦未嘗不可．例如 $y=ax+b$（假定 $a\neq 0$），其中 y 固爲 x 之函數，然吾人亦可據以將 x 由 y 表出之，使 x 爲 y 之函數如 $x=\frac{y-b}{a}$．他如 $y=x^2$，乃表達 y 隨 x 而變之關係者，而據此又可知 x 隨 y 而變之關係爲 $x=\pm\sqrt{y}$．循是以推，設有一函數 $y=f(x)$，若將其中 x 與 y 易位，即可據以求得一 $x=\varphi(y)$ 之關係．由前之例，y 之值隨 x 而定；由後之例，x 之值隨 y 而定．惟如是，吾人常稱後者爲前者之逆函數(1)，而前者亦自爲後者之逆函數．就兩相逆函數之圖形觀之，其間亦有一極淺顯之關係．如吾人已圖示其一，欲據以求得其他，但須將此圖據正縱軸及正橫軸之平分角線作反映① 即得．苟不作此反映，則先將兩軸與圖依正方向（所謂正方向，即相反於時針旋轉之方向）旋轉一直角，然後據 x 軸反映之亦可．所當注意者，一單值函數之逆函數未必爲單值，如 $y=x^2$ 爲單值，而其逆 $x=\pm\sqrt{y}$ 則不然．故欲求一逆函數之單值，必有相當之條件．觀圖 1.10，可憑觀覺之力推測其條件如次：苟一函數在其變程中

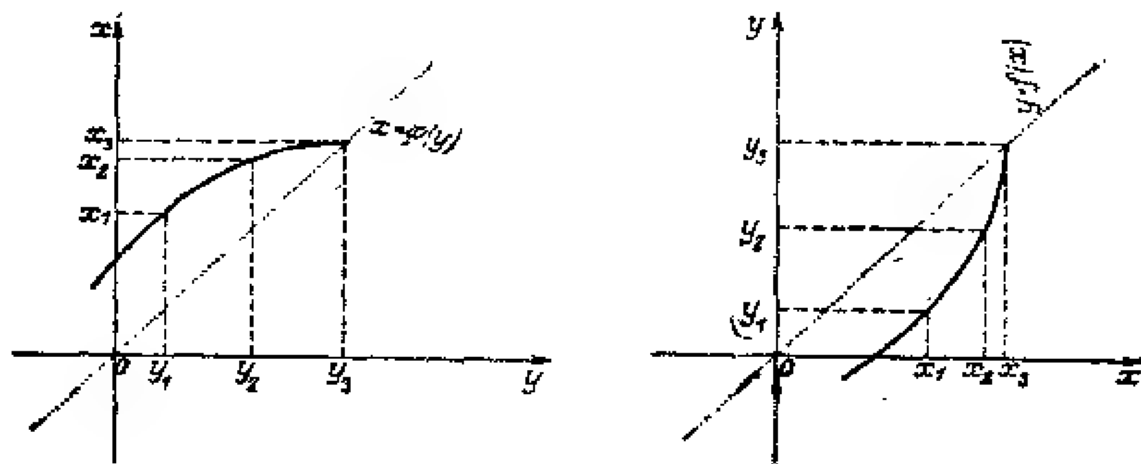


圖1.10

(1) inverse function; fonction inverse; Umkehrfunktion.

①所謂將一圖形據一直線作反映者，即求其對稱於此直線之圖形；亦即以此直線爲軸，將圖旋轉 180° 之謂．

處處連續而又獨行者，則其逆函數必為單值.

第三節 初等函數略論

1.3.1. 有理函數

函數中之最簡者，當推代數學中所討論之**多項式**[1]，如.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均為實數.此種函數，亦稱**整有理函數**[2]，就其組織言之，乃以加減乘三種算法施於實數及一變數 x 而成者.因其組織之簡明，在解析學中佔有基本之地位.整有理函數之最簡者為

$$y=ax+b,$$

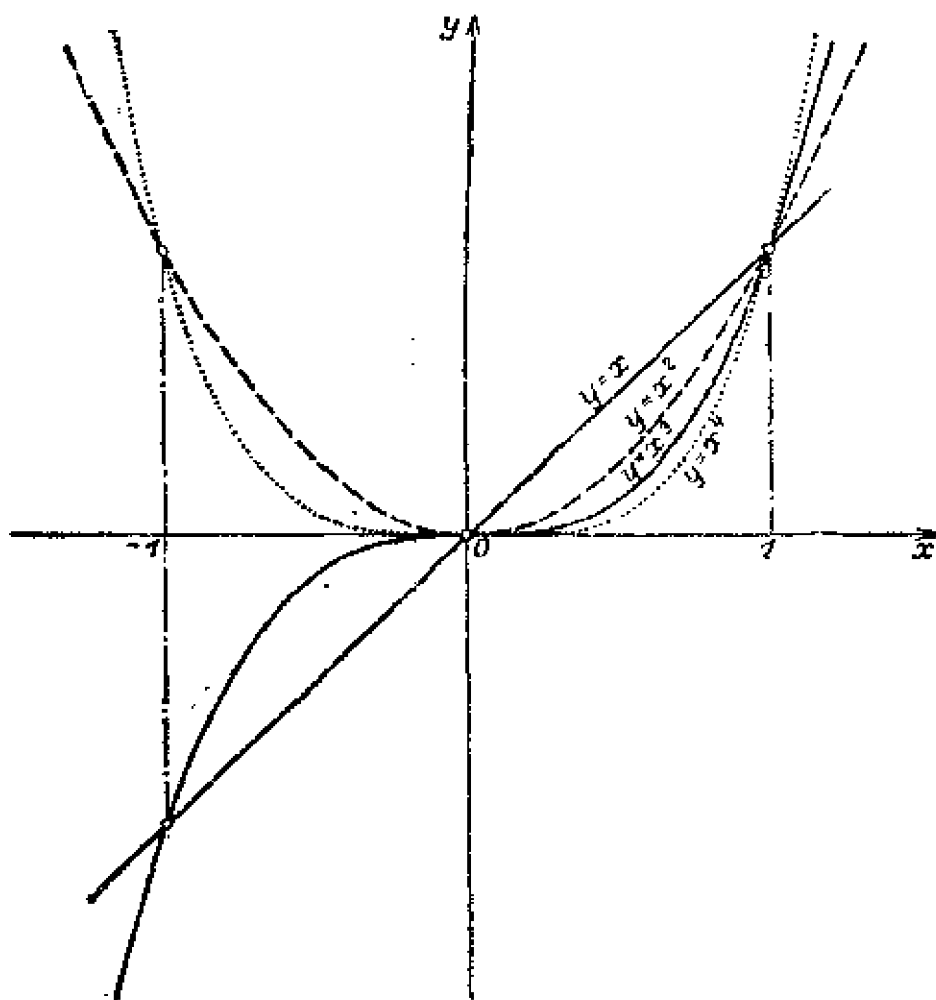


圖1.11

(1)Polynomial; polynome; Polynom. (2)rational integral function; fonction entière; ganze rationale Funktion.

即所謂直線性函數，其圖形為一直線．其次為二次之整有理函數，或簡稱為二次函數：

$$y = ax^2 + bx + c,$$

其圖形為一拋物線．至三次之整有理函數

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

則由一三次之拋物線表述之．在圖 1.11，吾人特製 $y=x^n$ 諸線，其 n 為 1,2,3,4 者．由是可見 n 為偶數時，$y=x^n$ 滿足 $f(x)=f(-x)$ 之關係，故為一偶函數，當 n 為奇數時，滿足 $f(x)=-f(-x)$，故為一奇函數．

以一整有理函數除另一整有理函數，從而產生之函數

如
$$y = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$$

者，謂之**分有理函數**[1]．當其中分母不等於零時，必有唯一確定之值與每一 x 之值相應．其最簡者為 $y=\frac{1}{x}$，在前節中已標繪其圖，得一等軸之雙曲線．他如 $y=\frac{1}{x^2}$ 亦為分有理函數之一例，其圖形見圖 1.12．

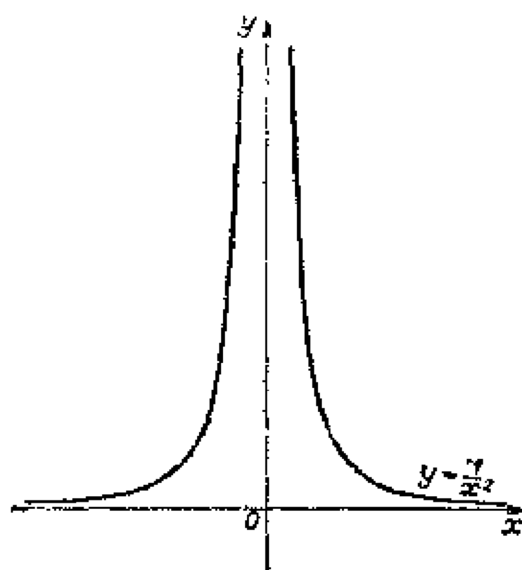


圖 1.12

整有理函數及分有理函數統稱之為有理函數．

1.3.2. 代數函數

試求有理函數之逆函數，則有所謂**代數函數**[2]者之產生．如 $y=x^n$ 之逆函數為 $x=\sqrt[n]{y}$，或仍以 x 表自變數，y 表因變數，

即
$$y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}};$$

試推廣其意，以 $R(x)$ 表一有理函數，可從而有

$$y=\sqrt[n]{R(x)},$$

更將此種函數以有理算法聯接之，又可得

(1) general or fractional rational function; fonction fractionnaire; rationale Funktion.　(2) algebraic function; fonction algébrique; algebraische Funktion.

$$y=\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{x^2+1}\qquad 或\qquad y=x+\sqrt{x^2+1}\,.$$

此種函數，皆爲代數函數.式中旣有根號出現，其爲正爲負，必須注意說明而後可.

1.3.3. 三角函數

考有理函數及代數函數均發源於代數學中之基本算法，已如上所述矣.此外復有所謂**超越函數**[1]者，其起源則在幾何學，超越函數之最簡者當推**三角函數**[2].

高等解析學中計量角度之法與初等數學中常用之法有異.初等數學中所習用者，以度、分、秒之制量角之大小；在高等解析學中，則以圓弧之長量度之，是即所謂**弧度法**[3].其法取欲量之角，將頂點置於一圓之中心，圓之半徑假定爲 1，則兩邊在圓上所割之弧卽爲此角量度之標準.於是角之 180° 者，其弧度爲 π，90° 者其弧度爲 $\frac{\pi}{2}$，360° 者其弧度爲 2π，而角之弧度爲 1 者，卽

$$\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ 17' 45''.$$

後者爲近似之値.吾人嗣後概用弧度之法，所謂 x 角者，卽指弧度爲 x 之角也.

三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ 之定義，當在吾人記憶之中.觀於圖 1.13 更可瞭然.圖中之 x 角爲自 OC(其長爲 1)一邊開始計量者，亦以反時針之轉向爲正.試標繪其圖則得圖 1.14 及 1.15.

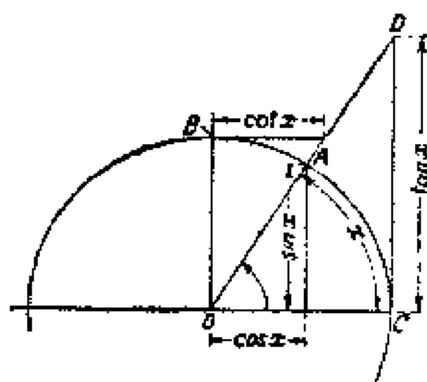


圖 1.13

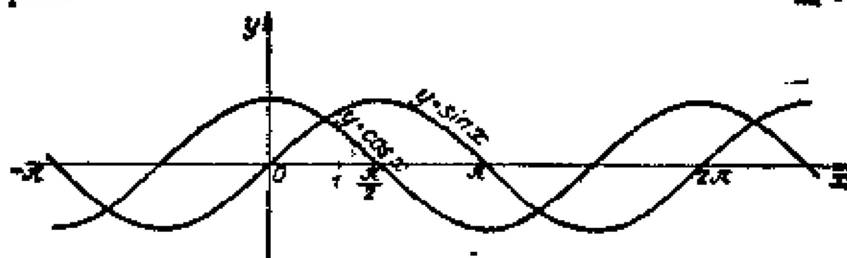


圖 1.14

(1)transcendental function; fonction transcendante; transzendente Funktion.
(2)trigonometric function; fonction circulaire (trigonométrique); trigonometrische Funktion.　(3)radian measure; mesure en radian; Bogenmass.

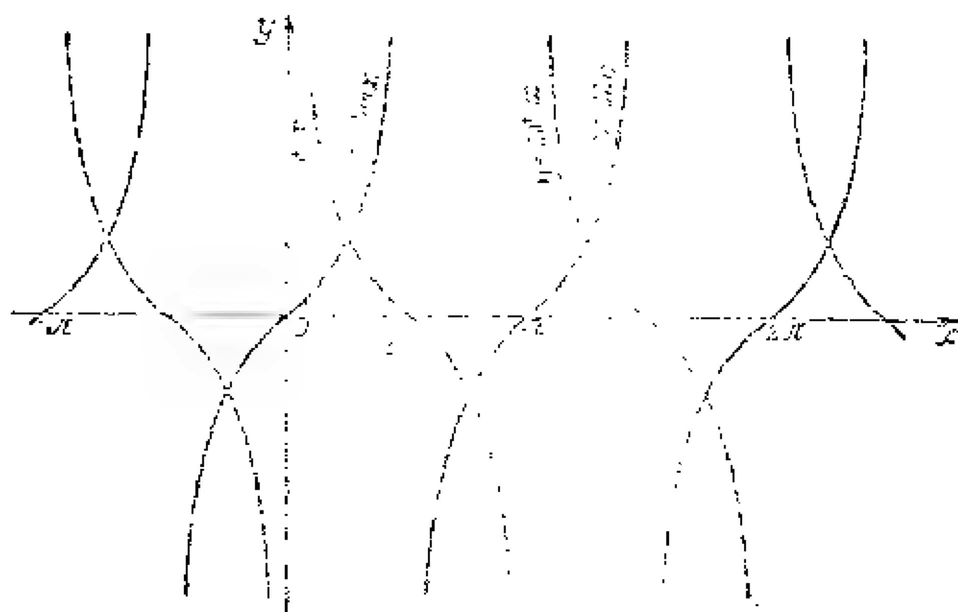


圖 11

1.8.4. 指數與對數函數

初等之超越函數，除上述之三角函數外，又有**指數函數**[1]

$$y=a^x,$$

其中 a 假定為一正數．指數函數之逆函數，때常以

$$x=\log_a y$$

表之者，謂之**對數函數**[2]．此兩種函數之精確定義，當於第三章中詳論之；此處祇能暫作如下之說明：既假定 a 為一正數，當 $x=\frac{p}{q}$（p,q 均為正整數），即 x 為有理數時，y 之值為 $y=\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$ 之一正根．惟 x 之有理值既具有密佈性（參閱§1.1.1），故如是規定之 y 假定給以應有之補充，使其成為一連續函數，無論 x 為有理數或無理數時，均有一確定之值．其值在 x 為有理數時已如上述，在 x 為無理數時，其值當與 x 為有理數時之值作連續性之變化①．如是規定之一連續函數謂之指數函數．其逆函數在 $y>0$ 之條件下為

$$x=\log_a y,$$

(1) exponential function; fonction exponentielle; Exponentialfunktion.

(2) logarithmic function; logarithme (fonction logarithmique); Logarithmus.

①此事之如何可能，當於本章附錄及第三章中詳之．

即所謂對數函數.

第四節　數序之極限

1.4.1. 數序

凡自變數均有其確定之變程.在其變程之中,自變數可任意變化,換言之,可任取變程中之一切實數值.此種變數亦稱連續變數(1).惟吾人在數學中所遇見之函數,其中自變數之變化有僅限於正整數者,即僅能取得 1,2,3,4 ··· 者.茲舉數例於下:

［例一］ 以1爲始,最初 n 個正整數之和,自爲 n 之一函數.以 $S_1(n)$ 表之,即

$$S_1(n)=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

蓋每一正整數 n 必有一 S_1 之值以應之.又最初 n 個正整數各自平方後之和亦爲 n 之一函數,以 $S_2(n)$ 表之:

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

［例二］ 他如　$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n$

及二項式係數(2)　$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

(其中 k 爲一固定之正整數)亦各爲 n 之函數.

［例三］ 任何正整數,除素數(3)僅有1及其本身爲其因數外,必有兩個以上之因數.設 n 爲一正整數,n 所有之因數果有若干,自隨 n 而定.故以 $T(n)$ 表 n 所含因數之個數,則當

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\cdots$$

時, $T(n)=1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 3,\ 4\cdots,$

於是又得一函數,其值隨正整數 n 而定. 此種函數,在研討整數之性質時,遇見甚多,世常以整數函數稱之.惟其有唯一確定之值,與每一正整數相應,故其值得依正整數固有之次序,排成先後相隨之形式:

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots,$$

---

(1)continuous variable; variable continue; stetige Veränderliche.　(2)binomial coefficient; coefficient binomial; Binomialkoeffizient.　(3)prime number; nombre premier; Primzahl.

其中 T_1 為 $n=1$ 時 T 所變得之值，T_2 及 T_3 為 $n=2$，3 時 T 所有之值，餘可類推。吾人鑒於此種形式，遂稱此種函數為數序[1]。

［例四］ 假定 n 為一正整數，凡小於 n 之質數果有若干，自隨 n 而定，吾人於此又得一函數，其自變數之變程為一切正整數者。至於此函數究竟何如，為數論中富有趣味之問題，在此未能詳論。

例　題

1. 試標繪 $y=x^3$ 之圖，並由是而求 $x=\sqrt[3]{y}$ 之圖。

2. 試標繪下列函數之圖，並說明其為奇或偶：

　(a) $y=\sin 2x$.

　(b) $y=5\cos x$.

　(c) $y=\sin x+\cos x$.

　(d) $y=2\sin x+\sin 2x$.

　(e) $y=\sin(x+\pi)$.

　(f) $y=2\cos(x+\frac{\pi}{3})$.

　(g) $y=\tan x-x$.

3. 試標繪下列各函數之圖，並說明其是否獨行，及或奇或偶：

　(a) $y=x^2$　$(-\infty<x<\infty)$.

　(b) $y=x^2$　$(0\leqq x\leqq 1)$.

　(c) $y=x$　$(-1\leqq x\leqq 1)$.

　(d) $y=|x|$　$(-1\leqq x\leqq 1)$.

　(e) $y=\sqrt{x^2}$　$(-1\leqq x\leqq 1)$.

　(f) $y=|x-1|$　$(-\infty<x<\infty)$.

　(g) $y=|x^2+4x+2|$　$(-4\leqq x\leqq 3)$.

　(h) $y=[x]$　$(-\infty<x<\infty)$，其中 $[x]$ 指不超過 x 之最大整數，

　　即 $[x]\leqq x<[x]+1$.

　(i) $y=x-[x]$　$(-\infty<x<\infty)$.

(1) sequence of numbers; suite de nombres [illegible]

(j) $y=\sqrt{x-[x]}$　　$(-\infty<x<\infty)$.

(k) $y=x+\sqrt{x-[x]}$　　$(-\infty<x<\infty)$.

(l) $y=|x-1|+|x+1|-2$　　$(-3\leq x\leq 3)$.

(m) $y=|x-1|-2|x|+|x+1|$　　$(-\infty<x<\infty)$.

以上函數中有無相同者?

4. 有一物體自停止狀態開始下落,在 t 秒中約墜 $16t^2$ 呎. 今設一球自高出地面 25 呎之窗口落下,在墜落之最初四秒中,其高度將如何隨 t 變化,試作圖說明之.

5. 試證 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

6. 試由 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 之公式求得 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2$ 之公式.

7. 試證下列二項式係數之性質:

(a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$,　　$(k\leqq n)$.

(b) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$,　　$(k>0)$.

(c) $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$.

8. 試求下列之和:

(a) $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)$.

(b) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(c) $\dfrac{3}{1^2\cdot2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

9. 一數序,其連續各項之差為常數者,謂之第一階算術級數. 若其連續各項之差成一第一階算術級數者,則謂之第二階算術級數;推而言之,若其連續各項之差成一第 $(k-1)$ 階算術級數者,即謂之第 k 階算術級數.

4,6,13,27,50,84 諸數為一算術級數之最初六項. 問此級數為第幾階? 其第八項為何?

10. 試證第二階算術級數之第 n 項可寫成 an^2+bn+c 之形式,其中 a,b,c 各數均與 n 無關.

11. *試證第 k 階算術級數之第 n 項可寫成 $an^k+bn^{k-1}+\cdots+pn+q$ 之形式,其中 $a,b,\cdots,p,q$ 均與 n 無關.

試為題 5 中之級數求其第 n 項.

1.4.2. 極限舉例

既明實數與函數之義，乃可進而討論極限。極限之概念，要為窮理之利器，欲求格物之精，窮理之微，均不可或缺者。請先論數序之極限。數序者，無限多之數依一確定之公例排成先後相隨之形式如 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，故就其實際而論，亦為一函數，惟其自變數為正整數，而為醒目之故，將 $a(n)$ 之符號代以 a_n 而已。考 a_n 隨 n 而變之情形，有深足注意者，特舉例言之。

［例一］ $a_n=\frac{1}{n}$，當定其中 n 之變域為正整數 1，2，3，…，所成者為一數序：

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=\frac{1}{4},\ a_5=\frac{1}{5},\ \cdots$$

蓋每一正整數有一 a_n 以應之。所欲討論者，即 a_n 如何隨 n 之變而變。不論 n 如何變化，a_n 永為正數，不能為零或負，此可以望而知者；且 n 愈大，則 a_n 必隨之而愈小；如 n 為 100，則 a_n 為 $\frac{1}{100}$；如 n 為 1,000，則 a_n 為 $\frac{1}{1000}$。試在直線上依次作 a_1，a_2，a_3，$\cdots$ 諸點，可見 n 愈大，其離原點將愈近。如一切 a_n 其中 n 大於 1,000 者，其與原點之距離必小於 $\frac{1}{1000}$。倒言之，欲求 a_n 與原點之距離小於 $\frac{1}{1000}$，但取其中之 n 大於 1,000 即可。不特此也，吾人欲求 a_n 與原點之距離小於 $\frac{1}{2000}$ 固可，小於 $\frac{1}{800000}$ 亦可，即小於任意小之一正數 ε 亦無不可；其法無他，但求其中 n 相當大，即可實現之。所謂 a_n 與零點之距離，無異 a_n-0 之絕對值 $|a_n-0|$；此絕對值將因 n 之趨大而為任意小。所謂任意小，乃其小絕無限制之謂；吾人得隨意所欲，指定一極小之正數 ε，使 $|a_n-0|$ 即 $|a_n|$ 小於 ε。如指定 $\varepsilon=\frac{1}{80000}$，欲求 $|a_n|<\frac{1}{80000}$，試問 n 必如何而後可；吾人略一思索，即可知 n 如大於 80,000，則 a_n 之小於 $\frac{1}{80000}$ 必能實現無疑。據是以觀，吾人苟隨意所欲，擇定一任何小之正數 ε，必能依之求得一正整數 N，當 n 大於 N 時，a_n 與 0 相差之絕對值小於 ε。惟如是，吾人遂謂 0 為 $a_n=\frac{1}{n}$ 當 n 趨大時之極限，或謂 $a_n=\frac{1}{n}$ 當 n 趨大時向極限 0 收斂[1]。

［例二］ 設每一正整數 $n=1,2,3,\cdots$ 有一 a_n 如

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

以應之者，即得一數序：

$$a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=-\frac{1}{4},\ \cdots$$

(1) converge; converger; konvergieren.

其爲正爲負，視 n 之爲奇爲偶而定；當 n 爲奇數時，a_n 爲一正數，n 爲偶數時，a_n 爲一負數。惟 n 愈大，則 a_n 之距 0 愈近。因此之故，0 實爲 a_n 在 n 趨大時之極限。若 $a_1=1, a_2=-\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{3}$，$a_4=-\frac{1}{4}$，$\cdots$，$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdots$ 諸點在直線上之位置或居原點之右，或居原點之左，其距離原點之遠近，則隨 n 之大小而異；n 小者，其離原點較 n 大者爲遠，n 愈大，則 a_n 之離原點愈近。惟如是，設在原點之左右劃一線段，其長不論如何小均無不可，謂之原點之鄰(1)；於是徵諸極限之義，此原點之鄰必爲無限多之 a_n（即 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdots$）聚會之所。何以言之？設任意劃一原點之鄰，例如取一線段，其一端爲 $\frac{1}{210}$，其他一端爲 $-\frac{1}{210}$ 者，如是則一切 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，其中 n 之大於 210 者，無一不在其中。大於 210 之 n，其多不可勝數，其他不大於 210 之 n，不過二百十個而已。惟如是，一切 a_n，除去有限個之例外（如上所云不過二百十個）均聚於原點之鄰，或謂均與原點爲鄰。不論其鄰如何狹小，吾人必能求得一正整數 N，將 a_n 中除去 N 個例外，餘者悉聚於此鄰之中。a_n 之多自是無限，在無限多之數中，除去有限個例外，仍無損其多，故謂 a_n 幾乎全體居於原點之鄰亦可。據是以論，所謂 a_n 之極限爲 0，或 a_n 向 0 收斂，其意即謂 a_n 幾全①在 0 之鄰中，不論其鄰如何之小。在此所謂"幾全"，乃無限多之中，除去有限個例外之謂。如 a_n 當 n 趨大時，其極限爲 0，吾人以

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

表達之。

〔例三〕 $a_n=\frac{n}{n+1}$，當 $n=1,2,3,\cdots$，此爲一數序如下：

$$a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{3}{4}, \cdots, a_n=\frac{n}{n+1}, \cdots.$$

若其中各數均可化成 $a_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ 之形式，由是知 n 愈大，其與 1 之差之絕對值將隨之而愈小。惟如是，吾人必能求得一 N，使所有 a_n 之隨於 a_N 之後者，皆與 1 爲鄰。此事乃得以

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

表而出之，與此極相似者更有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=1;$$

(1)neighborhood; voisinage; Umgebung.

①德人 Kowalewski 在其微積分學大要一書中最先應用 fast alle 之術語，其後 Landau 則在其演講中改用 zuletzt 一字，以英語直譯爲 almost all. "除去有限個例外"之意，亦可用"自一相當之 n 以後"一語替代之

欲知其理之真確，當先注意

$$\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=1-\frac{n+2}{n^2+n+1},$$

然後證

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}=0,$$

即得。查 n 若大於 2，則 $n+2<2n$ 之真確可無疑義，復因 $n^2+n+1>n^2$ 之故，遂有

$$0<\frac{n+2}{n^2+n+1}<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n},\quad(n>2),$$

吾人所欲證者，已可由是得之。此種證法，同時可使吾人斷然於 $\frac{n^2-1}{n^2+n+1}$ 與其極限 1 之差至多不能超過 $\frac{2}{n}$，無論 n 如何變大。

［例四］ $a_n=\sqrt[n]{p}$，其中 p 假定為一固定之正數，此 a_n 當 n 趨大時果有無一極限？如有一極限，其極限果為何數？吾人所欲證者，為

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1.$$

此事之證明，有基於一重要之關係，即世所熟稱之 Bernoulli 不等式，其言謂 h 若為一任何正數；n 為大於 1 之任何整數，則必有

$$(1+h)^n>1+nh.$$

此關係在 $n=2$ 時顯然真確。吾人假定此關係在 $n=m$ 時為真，而能證明其在 $n=m+1$ 時亦真，則此關係之普遍真確，乃根據數學歸納法則必有之事。試假定

$$(1+h)^m>1+mh,$$

則 $$(1+h)^{m+1}>(1+mh)(1+h)=1+(m+1)h+mh^2;$$

因 mh^2 為一正數，故得

$$(1+h)^{m+1}>1+(m+1)h,$$

由是知此關係在 $n=m+1$ 時亦真。故不論 n 為任何大於 1 之正整數，

$$(1+h)^n>1+nh$$

之真確，已得證矣①。吾人應用此關係，即可證

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1.$$

在此須分別討論者，為 $p>1$ 及 $p<1$ 兩種情形。在 $p=1$ 時，$\sqrt[n]{p}$ 各數均為 1，則上所欲證者為

①Bernoulli 不等式亦可由二項式定理 $(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots$ 推知之，蓋此式右方均為正數故也。

無足證之事，可置之不論.

在 $p>1$ 時，$\sqrt[n]{p}$ 無一不大於1，故 $\sqrt[n]{p}=1+h_n$，其中 h_n 自爲正數，且必隨 n 而變. 於是據上所證之不等式，得知

$$p=(1+h_n)^n>1+nh_n,$$

由是得

$$0<h_n<\frac{p-1}{n};$$

於此可見 h_n 當 n 趨大時必趨於0. 故 $\sqrt[n]{p}=1+h_n$ 當 n 趨大時，其極限必爲1無疑. 又據此證法可以見 $\sqrt[n]{p}$ 與1之差，無論 n 如何變化，不能超過 $\frac{p-1}{n}$.

次論 $p<1$ 時之情形. 此時 $\sqrt[n]{p}$ 均小於1，因之可寫成 $\sqrt[n]{p}=\frac{1}{1+h_n}$ 之形式，其中 h_n 自爲正數，且隨 n 而變者. 於是復據 Bernoulli 不等式，可知

$$p=\frac{1}{(1+h_n)^n}<\frac{1}{1+nh_n},$$

由是得

$$1+nh_n<\frac{1}{p}$$

或

$$h_n<\frac{\frac{1}{p}-1}{n},$$

故 h_n 當 n 趨大時亦趨於0. 於是知 $\sqrt[n]{p}$ 在此情形之下亦向1收斂.

上述之結果可用標繪圖顯示之. 試作 $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ 諸曲線；當 $n=1$ 時，得一直線 $y=x$；如 $n=2,4,8$ 時，所得曲線如圖1.16. 觀此諸曲線，無一不經過原點及 $x=1,y=1$；惟 n 愈大，

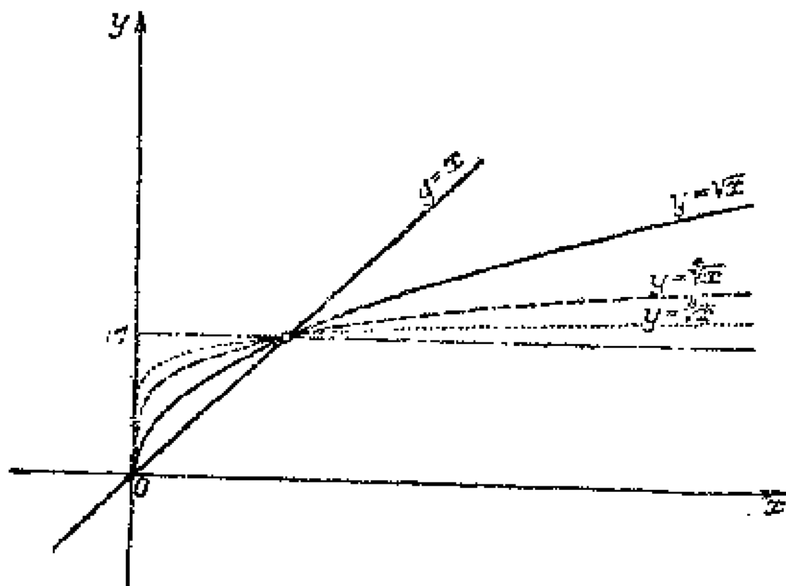


圖1.16

則漸向一折線收斂，此折線無他，縱軸上由 $y=0$ 至 $y=1$ 之一段與直線 $y=1$ 之居於縱軸右方者相接而成，觀於圖1.16 至爲顯然，而上述之結果，至此更覺瞭然無餘矣.

〔例五〕 $a_n=S^n$. 設有一如是之數列，其中 S 爲一固定之實數，n 爲一變數，可變爲任

何正整數者．所欲討論者，乃此數序當 n 趨 ∞ 時是否有一極限之問題．試先假定 S 爲一小於 1 之任何正數，如是則 S 可寫如 $S=\frac{1}{1+h}$，其中 h 自爲一固定之正數，然後據 Bernoulli 不等式，可知

$$S^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{hn},$$

由是得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{hn}=\lim_{n\to\infty}S^n=0\qquad(0<S<1)$$

細考此關係，可見 S 爲大於 -1 之一負數時亦[illegible]，因在此情形必有 $\lim_{n\to\infty}|S|^n=0$ 故也．

如 $S=1$，則一切 S^n，不論 n 爲任何正整數，均爲 1；在此情形之下，1 即可視爲 S^n 之極限．

其次，若 S 爲大於 1 之一數，則可寫如 $S=1+h$，其中 h 自爲一固定之正數．於是據 Bernoulli 不等式，可知

$$S^n=(1+h)^n>1+nh$$

將隨 n 之增加而趨大．吾人無論如何不能選擇一[illegible]固定之絕對值爲任意小者．惟如是，在 $S>1$ 時，S^n 顯然無極限可言，其值愈趨愈大，絕無限制，吾人常以

$$\lim_{n\to\infty}S^n=\infty\qquad(S>1)$$

表而出之．所當注意者，此 ∞ 非用以代表一數，吾人絕對不能以此爲數之一種，不過以此符號表示無限制變大之意而已．

最後尚須研討者，爲 $S=-1$ 及 $S<-1$ 兩種情形．若 $S=-1$，則 S^n 在 n 爲奇數時爲 -1，在 n 爲偶數時爲 1，S^n 之值當 n 變化時將在 -1 及 1 兩數之間交相變化；欲求一確定之極限，自不可得．若 $S<-1$，則 S^n 之絕對值將隨 n 而愈趨愈大，亦無極限可言．

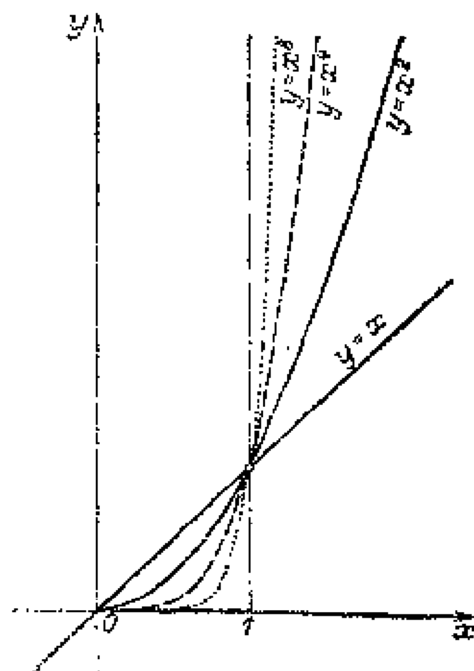


圖1.17

上述之結果，又可藉標繪圖線示之．試作 $y=x^n$，$n=1,2,4,8$ 時之諸曲線如圖 1.17，並爲求簡之故，假定 x 之變程爲 $x\geqq 0$．觀此諸線，無一不經過原點及 $x=1,y=1$；惟在變程 $0\leqq x<1$ 中，其線因 n 之增加而趨近於橫軸，在此變程之外，其線則隨 n 而漸與橫軸垂直，觀此圖形，[illegible]

上述之結果更可瞭然.

［例六］ 在代數學中吾人已知有所謂幾何級數[1]者, 其最初 n 項之和, 嘗以 S_n 表之, 如

$$1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots+q^{n-1}=S_n,$$

其中 q 假定為一固定之數. 苟 $q\neq 1$, 此 S_n 可寫如

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q},$$

蓋將 S_n 乘以 q 後, 減去 S_n 即可得之. 今所欲討論者, 此 S_n 當 n 擴大時果有無一極限之問題. 據例五所論, 若 $|q|<1$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$, 因此在 $|q|<1$ 之假定下, 必有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q},$$

故 S_n 之極限為 $\frac{1}{1-q}$. 若 S_n 中所含之項數將隨 n 而增多, 吾人遂謂一無窮之幾何級數 $1+q+q^2+\cdots\cdots$ 當 $|q|<1$ 時收斂於 $\frac{1}{1-q}$.

［例七］ $a_n=\sqrt[n]{n}$. 此為一數序如:

$$a_1=1, a_2=\sqrt{2}, a_3=\sqrt[3]{3}, \cdots\cdots, a_n=\sqrt[n]{n}, \cdots\cdots,$$

其極限為 1:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

欲證之, 可先由 a_n 組織另一數序 $\sqrt{a_n}$, 以 b_n 名之, 即 $b_n=\sqrt{a_n}=\sqrt{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\sqrt{n}}$. 考此 b_n 在 $n>1$ 時必大於 1, 故有 $b_n=1+h_n$, 其中 h_n 自為正數且隨 n 而變者. 於是復據 Bernoulli 不等式得知

$$\sqrt{n}=(b_n)^n=(1+h_n)^n>1+nh_n,$$

或
$$h_n<\frac{\sqrt{n}-1}{n}<\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}};$$

由是知
$$1<a_n=b_n^2=1+2h_n+h_n^2<1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}, \quad (n>1)$$

故 a_n 之趨於 1, 至是得證.

吾人以類似之法, 又可證 $C_n=\frac{n}{q^n}$ 在 $n\to\infty$ 之極限為 0, 其中 q 為一大於 1 之數, 即

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{q^n}=0.$$

欲證此理, 可先由 C_n 組織另一數序

$$\sqrt{C_n}=\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{q})^n};$$

因 q 大於 1, 故 $\sqrt{q}=1+h$, 其中 h 自為一正數. 於是據 Bernoulli 不等式既有

(1) geometric series; série géométrique; geometrische Reihe.

$$(\sqrt{2})^n=(1+h)^n>1+nh,$$

則
$$\sqrt{c_n}=\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2})^n}=\frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n}<\frac{\sqrt{n}}{1+nh}<\frac{\sqrt{n}}{nh}=\frac{1}{h\sqrt{n}};$$

由是得
$$c_n<\frac{1}{nh^2},$$

故 c_n 之趨於 0，於此得證。

［例六］ $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$。此數序在 $n\to\infty$ 必趨於極限 0，蓋將其化爲

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

之後即可見之。

1.4.3.　極限之定義

吾人將以上所舉各例詳加剖析，審其同而析其異，即可爲極限立一精確之定義。

設有一數序 $a_1,a_2,a_3\cdots$ 於此，苟其有一確定之數 l 存在，使一切 a_n 點，至多除去有限個例外，皆與 l 爲隣者，即任意劃一含有 l 之線段，a_n 幾全在其中者，則 l 即稱爲 a_n 之極限，或謂 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 向 l 收斂或收斂於 l，以符號表之，爲 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$。若一切 a_n 均彼此相等，且等於 a，自爲一種特殊情形；上述定義亦包括此特殊情形在內，a 即爲此 a_n 之極限。

上述定義又可說明如下：

試任意擇定一正數 ε，不論 ε 如何小，而必有一正整數 N，當 n 大於 N 時，致 a_n 與 l 相差之絕對値均小於 ε，即 $|a_n-l|<\varepsilon$ 者，則 l 爲 $a_1,a_2,a_3\cdots$ 之極限。N 之値，視 ε 而異，若 ε 愈小，則 N 愈大，故吾人常用 $N(\varepsilon)$ 表之，以明 N 爲隨 ε 而變者。

據此定義，吾人即可推知一數序之有極限者，其各數之値均不能任意變大，詳言之，苟 a_n 收斂於 l，則一切 a_n，不論 n 爲何如，必不能超過一數 M，即 $|a_n|<M$，且此 M 爲始終固定，不因 n 而變者。數序中各數之値不能超過一固定之數者謂之**有涯**[1]。欲證一收斂數序之必爲有涯，其事甚易。試任意擇一 ε，如使 $\varepsilon=1$，則根據 a_n 之向 l 收斂，可知

(1)bounded; borné; beschränkt.

必有一 N，當 n 大於 N 時，a_n 與 l 相差之絕對値皆小於 1，即

$$|a_n-l|<1.$$

由是知　　$|a_n|<|l|+1,\quad (n>N).$

此即謂 a_n 中之 n 大於 N 者，其絕對値均不能超過 $|l|+1$. 更就其他 a_n，其中 n 不大於 N 者，一一觀之，則於

$$|a_1-l|, |a_2-l|, |a_3-l|, \cdots\cdots |a_N-l|$$

N 個之數中必有一最大者，以 A 名之，於是有

$$|a_n-l|<A+1,\ (n=1,2,3,\cdots\cdots N).$$

故 a_n 中之 n 不大於 N 者，其絕對値不能超過 $A+1+|l|$；

即　　$|a_n|<A+1+|l|,\ (n\leqq N).$

至於 a_n 中之 n 大於 N 者，其絕對値據前所論均不能超過 $|l|+1$，自更不能超過 $|l|+A+1$. 循是以論，不論 n 爲任何正整數，一切 a_n 之絕對値無有能大於 $|l|+A+1$ 者. 於是以 M 名此 $|l|+A+1$，此 M 顯然爲一確定不易之數，與 n 之變化無關. 因此吾人已爲所有 a_n 覓得一不可超過之涯涘，是即所謂 a_n 之有涯性.

數序之不能收斂或無極限者謂之發散[1]. 如 n 變大時，a_n 隨之變大，絕無限制者，則此數序謂之向 $+\infty$ 發散，以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ 表達之. 仿此則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$，即 $-a_n$ 無限制變大之謂. 惟所謂發散，其意僅謂無有極限之存在，非即無限制變大之謂. 因此設有一數序如 $a_1=1, a_2=-1, a_3=1, a_4=-1, \cdots\cdots$ 雖未嘗無限制趨大，吾人亦視爲一種發散之數序，蓋其値在 1 及 -1 兩者之間交相變換，無確定之極限故也.

所當注意者，在討論收斂問題之時，一數序中如偶有有限個之數未嘗確定者，其事亦不致有何關礙，蓋在無限多之數中，棄去其有限個之例外，置而不論，於其收斂與否絕無影響也.

觀於以上所論，可知極限之爲物，絕非幽渺難明，如常人所想像者，蓋極限之例幾在在皆是，特吾人遇之而不識耳. 如將一分數化爲無窮小

(1) divergent; divergent; divergent.

數之形式如$\frac{1}{3}=0.333\cdots$，則以$a_1=0.3, a_2=0.33, a_3=0.333, \cdots$，即成數序，而$\frac{1}{3}$實為此數序之極限．他如圓線與其外切多邊形之關係亦復相似．外切多邊形之邊數愈多，則其與圓之相差愈微，故圓線亦為一種極限．諸如此類，言之甚多．惟此種極限皆前段各例中所舉者，均為吾人所已知之數．然數序之收斂，並不必向已知之數收斂．數序之收斂與否，為一基本重要之問題，苟其收斂，則極限之存在已定，至於此極限果為何數，乃為另一問題．極限之為何數，雖未能知之，苟其果能存在，則必確有其數，吾人即以此收斂之數序表達其必然存在之極限可矣．以一收斂之數序規定一未知之新數，從而推知其特性，實為極限理論最大之成功，吾人當於§1.4.7中舉例說明之．

1.4.4. Cauchy 審斂法

據上所論，極限之存在與否為一事，極限之果為何數又為一事．欲知其是否存在而不問其物之為何，將以何法取決之？十九世紀之法國大數學家 Cauchy 已求得一普遍之標準以解答之矣．其言曰，**苟 ε 為一任意指定之正數，不論 ε 如何之小，必有一正整數 $N(\varepsilon)$，一隨 ε 而變，且因 ε 之變小而變大之 $N(\varepsilon)$，當 n 及 m 各大於 $N(\varepsilon)$ 時，足致 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ 之關係成立者，則 a_n 為一收斂之數序，換言之，a_n 必有一極限．**

此理之證明，可求之於本章之附錄．至其逆之真確，則殊顯而易見．何則，苟有一極限 l，為 a_n 所趨者，則據收斂之義，不論 ε 為如何小之正數，必有一 $N(\varepsilon)$，凡 n 及 m 之大於 $N(\varepsilon)$ 者，皆足以致 $|l-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $|l-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ 之成立無疑；由是得知

$$|a_n-a_m|=|(l-a_m)-(l-a_n)|\leq|l-a_m|+|l-a_n|<\varepsilon,$$

故數序之收斂者必有此特性．吾人在附錄中所欲證明者，乃具有此特性之數序必有一極限；遵此標準，則極限之存在與否可以立決．考此標準之涵義，如以直線上之點代表數序，無異謂點之在 a_N 之後者，苟自限

於任意小之變化，則必趨一極限；其眞確亦至爲顯然.

1.4.5. 獨行數序之收斂條件

數序之收斂與否，在某種情形之下，有甚易決定者. 設有一數序，其中各數 a_n 隨 n 而增大；換言之，居後之數必大於居前之數，即不論 n 爲任何正整數，必有 $a_n < a_{n+1}$ 者，謂之**獨升數序**(1). 據同理，不論 n 爲任何正整數，必有 $a_n > a_{n+1}$，即居後之數必小於居前之數者，謂之**獨降數序**(2). 獨升數序與獨降數序統稱之爲獨行數序(3).

獨行數序之收斂性，可用下法決定之. 一數序苟爲獨升而其數又不能超過一固定之數，即 a_n 不論 n 爲任何正整數必小於 M 者，必有一極限. 又一數序苟爲獨降而其數又始終大於一固定之數者，亦必有一極限. 前者稱爲獨升數序之有上涯者，後者稱爲獨降數序之有下涯者. **凡有上涯之升數序及有下涯之降數序無不收斂**，由幾何觀覺言之，可謂昭然無疑. 至其精密之證明，可求諸本章之附錄. 舉例言之，$\frac{1}{n}$ 爲一有下涯之降數序，其極限爲 0，而 $1-\frac{1}{n}$ 爲一有上涯之升數序，收斂於 1 者.

復次；據上所謂獨升數序，其中 a_n 隨 n 而變大；所謂獨降數序，其中 a_n 隨 n 而變小之謂. 苟代以較寬之假定，謂 a_n 隨 n 而不變小，換言之，苟許其前後相隨之數可以相等，則上述定理依然有效，是謂廣義之獨升數序，簡稱爲升數序. 據同理，又有所謂廣義之獨降數序，乃其中之數隨 n 而不變大者，常簡稱爲降數序.

1.4.6. 極限之運算

根據極限之定義，可以推知下列諸理. 苟 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 爲一數序，收斂於 a 者，$b_1, b_2, b_3, \cdots$ 爲另一數序，收斂於 b 者，則 a_n+b_n 及 a_n-b_n 亦各爲收斂之數序，其極限分別爲 $a+b$ 及 $a-b$:

---

(1) monotonic increasing sequence; suite constamment en croissant; monoton zunehmende Zahlenfolge. (2) monotonic decreasing sequence; suite constamment en décroissant; monoton abnehmende Zahlenfolge. (3) monotonic sequence; suite monotone; monotone Zahlenfolge.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b;$$

又 a_nb_n 亦為一收斂之數序，其極限為 ab：

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab;$$

復次，若 $b\neq 0$，則 $\frac{a_n}{b_n}$ 必向 $\frac{a}{b}$ 收斂：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

凡此皆顯而易見之理．蓋 a_n 既幾全與 a 為鄰，b_n 幾全與 b 為鄰，則 a_n+b_n 之幾全與 $a+b$ 為鄰，自為必然之事．若欲證

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab.$$

但證
$$|ab-a_nb_n|$$
在 n 趨大時為任意小即可．因 a_n 之收斂於 a，b_n 之收斂於 b，故任擇一正數 ε 之後，必有一 $N(\varepsilon)$ 可尋，在 $n>N(\varepsilon)$ 時足致

$$|a-a_n|<\varepsilon \text{ 及 } |b-b_n|<\varepsilon$$

之成立，復因 $ab-a_nb_n=b(a-a_n)+a_n(b-b_n)$ 之故，可知

$$|ab-a_nb_n|\leqq|b||a-a_n|+|a_n||b-b_n|,$$

惟據 a_n 之收斂性知其必為有涯，即有一不隨 n 而變之 M 如 $|a_n|<M$ 者，從而知

$$|ab-a_nb_n|<(|b|+M)\varepsilon,$$

其中 $(|b|+M)\varepsilon$ 為任意小之一正數，故 a_nb_n 之向 ab 收斂，於此得證．至 $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ 在 $b\neq 0$ 之條件下亦可以類似之法證之，在此不復贅述．考 a_nb_n 之意，乃將 a_n 與 b_n 相乘而組成一數序；既知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$，其意即謂欲求 a_nb_n 之極限，可分別先求 a_n 及 b_n 之極限，然後乘之即得．綜上所論，可知加減乘除四法之運用與極限之求索可以互易先後而不變其結果．

應用上述之理，可使極限之求索，易於從事．例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=1,$$

即應用前理而求得之者.求索極限時有一事不可不注意者.設有兩收斂之數序 a_n 及 b_n，前者各數均大於後者各數，即不論 n 爲任何正整數必有 $a_n>b_n$ 之關係，如是則前者之極限自不能小於後者之極限，然亦不必大於後者之極限.例如 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{1}{2n}$，$n=1,2,3,4,\cdots$，在此雖有 $\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$，惟兩者之極限則同等於零.由是以論，若 $a_n>b_n$，所可斷言者，

$$\lim_{n\to\infty}a_n\geqq\lim_{n\to\infty}b_n$$

而已.

1.4.7. e 與 π

根據上述之定理，可以推知下列數序：

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

必有一極限.何則，據 S_n 之定義，知其値隨 n 之趨大而增加，故 $S_1,S_2,S_3,\cdots$ 實爲一獨升數序；復因

$$S_n\leqq1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}<3$$

之故，可知 S_n 不論 n 如何變化，終不能大於3。故據前述之理，必有一數存在，爲此有上涯獨升數序之極限，此極限常以 e 名之，因之遂有：

$$e=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

所當注意者，此極限同時亦爲

$$T_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

所趨；欲證

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}T_n=e,$$

可先將 T_n 據二項式定理化爲：

$$T_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

由此關係，可得兩種認識：其一，T_n 爲一遞升數序，其二，不論 n 如何變化，必有 $T_n<S_n$，從而知 T_n 亦有上限．惟如是，T_n 之必有一極限，可無疑義，因之遂有 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$．既知 T 之存在，始可從事於 $T=e$ 之證明．試任擇一大於n之正整數 m，則

$$T_m>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

之眞確，顯而可見．假定 n 暫時不變，m 愈趨愈大，則此公式之左方趨於 T，公式之右方趨於 S_n，於是得

$$T\geqq S_n,$$

復據前已證明之 $S_n>T_n$，得 $T\geqq S_n>T_n$．然後使 n 趨大，即可由是而推知

$$T\geqq\lim_{n\to\infty}S_n\geqq\lim_{n\to\infty}T_n=T,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=e=T$，是卽欲證之理．

吾人由 S_n 或 T_n 之收斂性，可以斷定必有一數 e 存在．e 果爲何數，吾人未能詳悉，所可知者，爲大於 2，小於 3 之一實數而已．惟其存在既無疑義，且又爲 S_n 或 T_n 所收斂，則其特性如何，可由 S_n 或 T_n 推知之，卽藉 S_n 或 T_n 規定之可矣．

他如初等數學中所習見之 π，亦可視爲一種數序之極限．所謂 π，乃圓之面積，其半徑爲 1 者，故 π 之存在，昭然可無疑義．所欲討論者，此面積果用何法以計量之耳．試爲此圓作外切及內接多邊形，可知多邊形之邊數愈多，其面積與圓之面積相差愈微．因此之故，π 實爲此兩種多邊形面積之極限．

例　題

1．試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$，求一如此之 N，當 n 大於 N 時，$\frac{n^2+n+1}{3n^2+1}$ 與 $\frac{1}{3}$ 之差

小於下列諸數：(a) $\frac{1}{10}$，(b) $\frac{1}{1000}$，(c) $\frac{1}{1000000}$。

2.求下列諸式在 $n\to\infty$ 時之極限：

(a) $\frac{n^5+3n+1}{n^6+7n^2+2}$。 (b) $\frac{n^6+3n+1}{n^5+7n^2+2}$。

(c) $\frac{6n^3+2n+1}{n^3+n^2}$。 (d) $\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}$。

(e) $\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$。

3.試證 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$。

4.試證 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$。求一 N，當 $n>N$ 時，$\frac{n^2}{2^n}$ 均小於 $\frac{1}{1000}$。

5.試求 N_1, N_2, N_3 三正整數，符合下列之要求者：

(a) $\frac{n}{2^n}<\frac{1}{10}$，當其中 $n>N_1$；

(b) $\frac{n}{2^n}<\frac{1}{100}$，當其中 $n>N_2$；

(c) $\frac{n}{2^n}<\frac{1}{1000}$，當其中 $n>N_3$。

6.試以題 5 之法處理 $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$。

7.試證 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$。

8.試證 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=0$。

9.設有 $a_n=\frac{10^n}{n!}$。(a)問 a_n 趨何極限？(b) a_n 是否有獨行性？(c)是否由某一 n 以後有獨行性？(d)試約計 a_n 與其極限之差。(e) n 必至少如何大，其差始小於 $\frac{1}{100}$？

10.試證 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

11.試證 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$。

12.試證 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$。

13.試證 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$。

14.*試證 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$。

15.試證 a, b 若為兩正數，又 $b\leqq a$，則 $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ 必收斂於 a。據類似之推理，若 $a_1, a_2,$

$a_3, \cdots, a_k$ 爲任何 k 個固定之正數，則 $\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$ 亦必收斂；試求其極限.

16. 試證數序

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$$

有收斂性，並求其極限.

17.*設 n 爲任何正整數，其所有之素因數彼此不同者共有若干，以 $\varphi(n)$ 表之，試證

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0.$$

18.*設 a_1, b_1 爲任何兩正數，並假定 $a_1 < b_1$. 又 $a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots a_n, b_n$ 爲如下諸數：

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

$$a_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

試證(a) $a_1 a_2 a_3 \cdots$ 有收斂性，(b) $b_1 b_2 b_3 \cdots$ 有收斂性，(c)兩者有同一極限.

19.*若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，又 $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \xi$，試證之.

20. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，又 $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，$\tau_n = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n}{n}$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \xi$，試證之.

21. 以 $S_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ 作爲 e 之近似值，試計其誤差. 試準確算出 e 之值至小數五位.

第五節　連續變數之極限

1.5.1. 再論極限之定義

前所論述之極限，皆爲數序之極限. 在討論連續變數或函數之自變數爲連續變數時，亦有極限可論. 設有一函數 $y = f(x)$，其中自變數 x 在其規定之變程如 $a \leqq x \leqq b$ (a 及 b 爲兩固定之實數)中任意變化，則當 x 趨向一數 ξ 時，$f(x)$ 常有一極限可趨，換言之，當 x 與 ξ 之差甚微時，有一數 l 存在，其與 $f(x)$ 之差亦相當微小. 吾人試標繪 $y = f(x)$ 之圖，即

易見此事爲可能.此在觀覺上可能之事當有一精確之定義.

所謂 $y=f(x)$ 在 x 趨於 ξ 時有一極限 l,以符號表之,即

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=l.$$

其義如下:設隨意指定一任何小之正數 ε 之後,必可求得一其他甚小之數 δ 當一切不同於 ξ 之 x 滿足 $|x-\xi|<\delta$ 時,足致 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 之關係成立,如是即謂 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 時之極限爲 l,或謂 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 時向 l 收斂.

吾人對此定義,願更作數言之說明.其一,自變數 x 之變化,自有其規定之變程,如 $y=\sqrt{1-x^2}$,其中 x 之變程如爲 $-1\leqq x\leqq 1$,則 x 不能越此範圍,而 ξ 所表示者爲其中一固定之數.苟 ξ 所表者爲其中之兩端,如 $\xi=-1$ 或 $\xi=1$,則 x 之趨於 ξ,僅可來自一方,即由內趨近之.在其他情形之下,x 之趨於 ξ,可由左右兩方迫近之.x 之趨於 ξ,不論其自左自右,或忽左忽右,苟有一數 l 存在,當 x 與 ξ 之差甚微時,$|f(x)-l|$ 爲任意小,則 l 即稱爲 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 時之極限.其二,觀上述定義,曾假定趨於 ξ 之 x 皆不同於 ξ,此不可不特加注意.其三,趨於 ξ 之 x 可設想其爲一數序 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\cdots$,蓋設有一數序 $x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots$,其中各數皆不同於 ξ 而趨於 ξ 者,則由 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=l$ 可以斷定 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$ 必然成立.何則,苟有一數 $\delta>0$ 存在,致合於 $|x-\xi|<\delta$ 之 x 皆滿足

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

(其中 ε 爲任何小之正數),則因 $x_n\to\xi$ 之故,當 n 相當大時,如 $n>N$,必有 $|x_n-\xi|<\delta$;惟如是,在 $n>N$ 時必有 $|f(x_n)-l|<\varepsilon$,是即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$ 之謂.此理既明,連續變數之極限可以歸併於數序之極限.不甯唯是,運算極限之法,前在 §1.4.6. 中所論述者,在此亦一一有效,讀者可自思得之.

1.5.2. 舉例

茲特舉淺顯之例以明上述定義:

[例一] 試觀 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，此函數在 $x=0$ 時無確定之值。今由不同於0之 x 出發，使其向0趨近，以考 $\frac{\sin x}{x}$ 能否有一極限。吾人所欲證明者為

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

觀圖1.18，可見在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時

$$\sin x<x<\tan x.$$

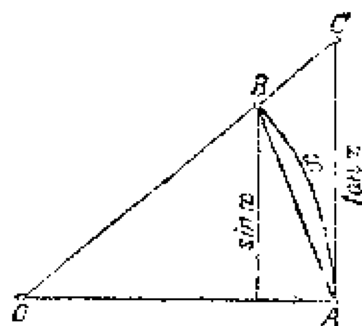


圖1.18

由是知在 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 之條件下必有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x};$$

惟 $\cos x$ 在 $x\to 0$ 時趨於1，故

$$1\leqq\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\leqq 1,$$

是即吾人所欲證明之理。故 x 離0趨近時，$\frac{\sin x}{x}$ 以1為其極限。

[例二] 由例一，應用極限運算之理，可以推知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

之真確，亦不難概見，蓋在 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 時常有

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot\sin x,$$

遂得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

復次，吾人可據前證之理推知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

[例三] 試觀 $\sqrt{x^2}$。此函數不論 x 為任何實數均有一確定之值，且其值始終為正。當 $x\geqq 0$ 時，其值為 x；當 $x<0$ 時，其值為 $-x$，簡言之，$\sqrt{x^2}=|x|$。惟如是，

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

為一函數，其值除 $x=0$ 外亦均確定，且在 $x>0$ 時為 $+1$，在 $x<0$ 時為 -1。因此之故，當 x 趨於0時，不論其如何接近，$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 之值可 $+1$ 或 -1，無一確定之數可趨，故謂其極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 不能存在。

［例四］ 若 x 愈趨愈大，絕無限制，則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

之存在，爲根據前理所必有之結果，無待贅言.

例　題

1.試求下列之極限，同時說明每步推論之所根據者爲何項定理：

(a) $\lim_{x\to 2} 3x$.　　(c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2x+2}$.

(b) $\lim_{x\to 3}(4x+3)$.　　(d) $\lim_{x\to 2}\sqrt{5+\sqrt[3]{2x-5}}$.

2.試證

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$; (b) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=1$; (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}=0$.

3.試考下列之極限是否存在；苟其存在，更試求其值：

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{x}$; (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$; (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

第六節　函數之連續性

1.6.1. 連續性之定義

何謂連續函數，前論函數之圖形時，已略及之，惟當時之剖析，未見精微，恐結果所至，易生誤解.今極限之義既明，吾人乃得一精確之術語以闡明函數之連續性. 由常識言之，一連續函數之圖形爲一不斷之曲線，然習見之圖形儘多斷而復續，續而復斷者.因此吾人暫不統觀其全，而專注意於一處，論函數在某一點上之連續性.

設有一函數 $y=f(x)$，苟其在某一點如 $x=\xi$ 時具有如下之特性者則在此點謂之連續.$f(x)$在 $x=\xi$ 有一確定之值 $f(\xi)$，且在 x 趨近 ξ 時 $f(x)$必與$f(\xi)$任意接近；換言之，苟 ε 爲一隨意指定之正數，不論 ε 如何小，必有一正數 $\delta(\varepsilon)$，一隨 ε 而趨小之 $\delta(\varepsilon)$，致合於 $|x-\xi|<\delta$ 之 x 皆滿足 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$.據是以言，所謂 $f(x)$ 在 ξ 點有連續性者其意乃要求

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$$

之成立耳.果如是，則據前所論，不論 x_n 爲任何數序之收斂於 ξ 者，其 $f(x_n)$亦必有極限$f(\xi)$.$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$.

考上述連續性之條件，其要點有二:(1) $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)$ 之存在.(2)此存在之極限適等於$f(x)$據其定義在 ξ 點上所應有之值.兩者滿足,始得謂 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 時有連續性.

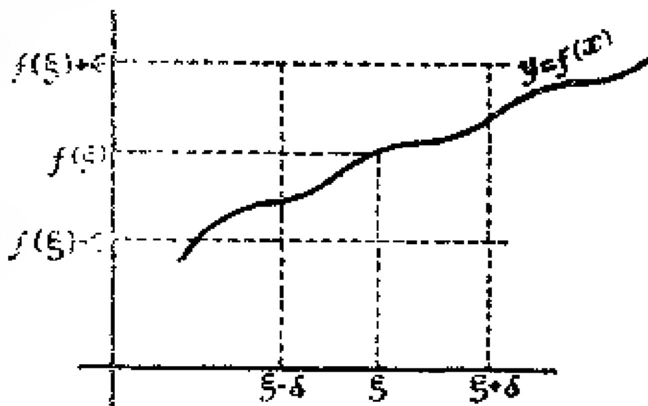


圖 1.19

既明函數 $f(x)$在某點之連續性,乃可進而統觀其全體,以斷定其是否處處連續.設有 $y=f(x)$，其中自變數之變程爲 $a\leqq x\leqq b$(a 與 b 爲任何兩實數)，**若 $f(x)$ 在此變程中之每一點均有連續性,則謂 $f(x)$ 在此變程中有連續性,或稱 $f(x)$ 爲此變程中之一連續函數**.據是以論，$f(x)$在 $a\leqq x\leqq b$ 中具有連續性，其意乃謂隨意選擇一正數 ε 之後，不論 ε 如何小，必可爲此變程中之任何一點 $\bar{x}$ 求得一 δ,一隨 ε 而變且視 $\bar{x}$ 而異之δ,致合於$|\bar{x}-x|<\delta$ 之 x 皆滿足$|f(\bar{x})-f(x)|<\varepsilon$.

更進而細察一函數在其變化全程中之連續性，則其在兩不同點上之連續情形可有程度上之差別.於是有所謂**均匀連續**[1] 之義.所謂均匀連續，淺言之，其連續性程度不因地位而異，其連續度處處相等之謂,精言之,則應有如下之說明:設 ε **爲一隨意指定之正數,而有一相應之正數 δ，不論 x_1 及 x_2 爲變程中之任何兩數,當其間之相去小於 δ,即 $|x_1-x_2|<\delta$ 時，致其函數值 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 之相差必小於 ε，即 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 者,則 $f(x)$在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中謂之有均匀連續性.考此定義中之 δ，其値僅隨 ε 而變,不因 x 之地位而異，所謂連續性之均匀,即可於此見之.**

明乎上述之義,可知一函數在其變程中有均匀連續性者,在此變程

(1)uniform continuity; continuité uniforme; gleichmässige Stetigkeit.

中必為連續無疑．倒言之，一閉程中之連續函數（在此必假定 x 之變程為閉，如 $a\leqq x\leqq b$）亦必均勻連續，其證可求之本章附錄．吾人如暫時假定其理之真確，則一閉程中之連續函數，必同時為均勻連續，可以斷言矣．

1.6.2. 間斷點

欲明連續性之義，可設想其反面而觀察之．函數在某點如無連續性，則其點謂之**間斷點**或**不連續點**(1)．如其圖形在某點作一跳躍而呈中斷之象者，即為間斷點之一種．略舉數例於後以明間斷點之性質．

［例一］ 設有一函數如

$f(x)=0,$ 當 x 合於 $x^2>1$ 之時；

$f(x)=1,$ 當 x 合於 $x^2<1$ 之時；

$f(x)=\frac{1}{2},$ 當 x 合於 $x^2=1$ 之時，

細考此函數之所由組成，其不能連續甚顯，不難概見．此函數在 $\xi=1$ 及 $\xi=-1$ 兩點失去連續性；其圖形在此呈中斷之象，可於圖 1.20 中見之．試令大於 1 之 x 趨近 1，$f(x)$之極限為 0，令

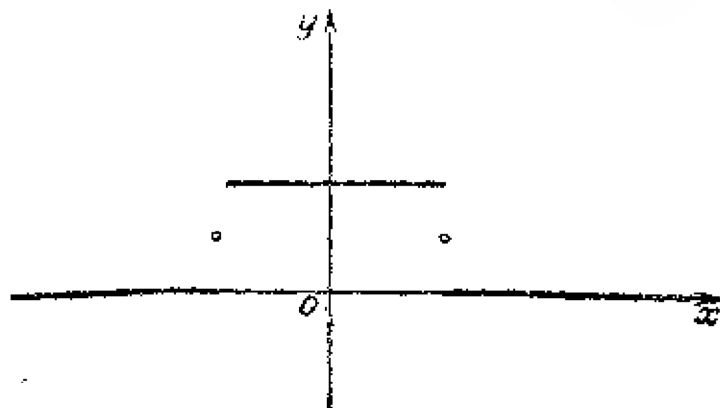


圖1.20

小於 1 之 x 趨近1，$f(x)$ 之極限為 1，兩者既不相等又不等於$f(1)$，其不連續，顯而可見．據同理，可知 $\xi=-1$ 亦為一如是之間斷點．明此函數之性質，吾人可將其定義簡寫如下：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}},$$

蓋在 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 之時，x^{2n} 之極限為0，故 $f(x)$ 之值為 1，又在 $x^2>1$ 之時，x^{2n} 將隨 n 而愈趨愈大，故$f(x)$之值為0；至 $x^2=1$ 即 $x=1$ 或 $x=-1$ 之時，$f(x)$之值為$\frac{1}{2}$．如是者

(1)point of discontinuity; point de discontinuité; Unstetigkeitspunkt.

即為上述之函數,故吾人得以此形式表而出之.

曲線之有此種間斷點者,在圖 1.21 中又得兩例. 若此種間斷點之所以出現,自有其淺顯之原因. 當 x 自左或自右趨近 ξ 點時,各有一極限,惟兩者不相等且不等於 $f(\xi)$;故 $f(x)$ 在 ξ 點

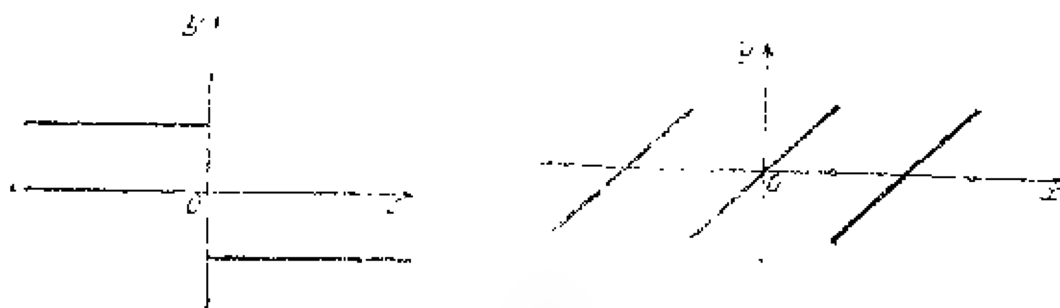


圖 1.21

之不連續,乃由於左右兩極限之不等,非由於極限之不存在. 雖如是,$f(x)$ 在 ξ 即呈跳躍之象. 然間斷點之起,亦有由於極限之不存在者,其例如下.

[例二] 前已論述之 $y=\frac{1}{x}$ (見圖 [illegible]) 及 $y=\frac{1}{x^2}$ (見圖 1.12) 在 $x\to 0$ 時作無限制之趨大, 故無極限存在. 他如 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 及 $x=-1$ 時亦有其間斷點, 而此間斷點之出現, 實由於極限之不存在, 試觀圖 1.22,可以見之.

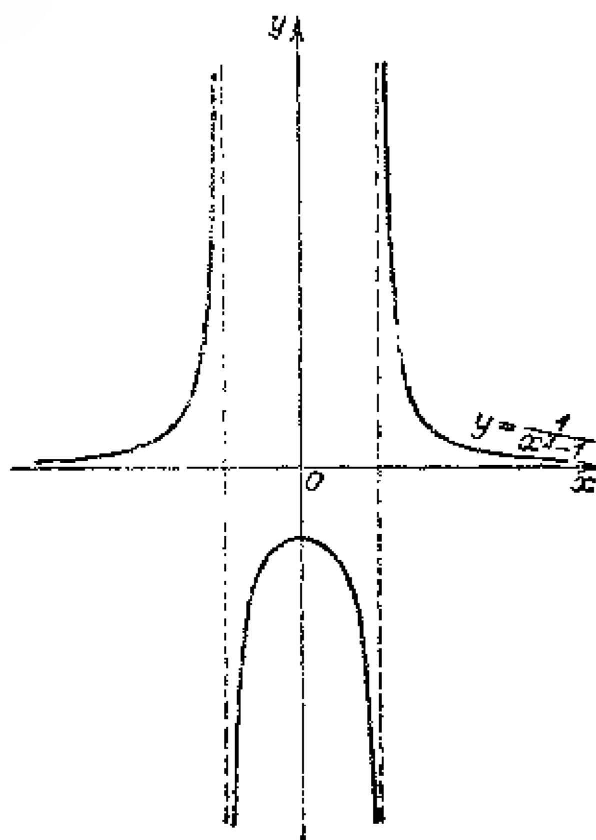


圖1.22

[例三] 設有一函數如

$$y=\sin\frac{1}{x},$$

此在 $x\neq 0$ 時均有確定之值. 當 $\frac{1}{x}$ 自 $(2n-\frac{1}{2})\pi$ 變至 $(2n+\frac{1}{2})\pi$, 不論其中 n 為任何整數,y 必自 -1 變至 $+1$,此顯而易見者. 在 $x=\frac{2}{(4n-1)\pi}$ 時, y 之值為 -1, 又在 $x=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ 時,y 之值為 $+1$. 惟如是,若令 $x\to 0$, 即令 $n\to\infty$,則 y 將因之而忽上忽下,作無限次之"擺動";在 $x=0$ 之鄰近,不論其鄰域如何小,仍有無限次之上下"擺動",故無一確定之極限,觀於圖 1.23,更可瞭然.

[例四] 與上例之性質完全不同者則有

$$y = x \cdot \sin\frac{1}{x},$$

此函數在 $x\to 0$ 時收斂於 0，蓋 $\sin\frac{1}{x}$ 雖上下"振動"，其"振幅"則因 $x\to 0$ 而愈趨愈弱，故有一極限，觀於圖 1.24 可以見之．惟其如是，吾人如規定 y 在 $x=0$ 時之值為 0，則此函數在 $x=0$ 時

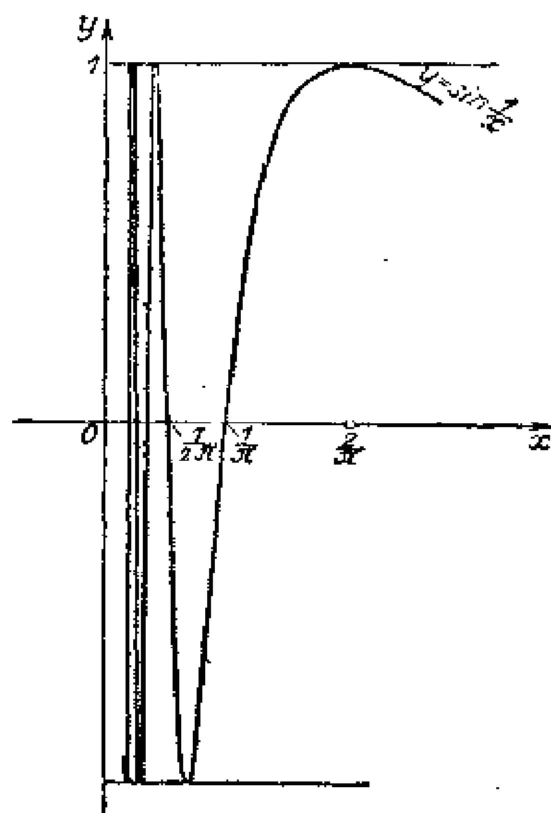


圖1.23

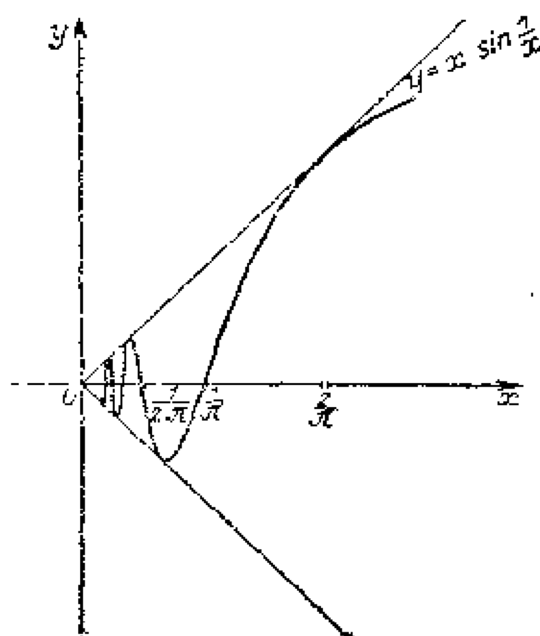


圖1.24

亦為連續．

在討論函數之連續性時，有一事須特加注意．函數之值常有在某點未能確定者．如上所舉之第三及第四例中，y 在 $x=0$ 時均無定值．苟 y 在 $x\to 0$ 時有一確定之極限，則吾人可設法補充 y 之定義，以此極限之值作為 y 在 $x=0$ 時之值，於是 y 在 $x=0$ 亦得有連續性．此在第四例中已如法行之，在第三例則不可行，因 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 時無極限故也．

1.6.3. 關於連續函數之定理

既明連續函數之義，可知兩函數如在某點有連續性，則其和，其差，及其積均在同一點上有連續性．其理甚顯，證之亦易①．又以一連續函數除另一連續函數，在其分母未為零時，亦為一連續函數．由是可知一切整有理函數均為連續函數；而一切分有理函數，在其分母不等於零之時，亦為連續無疑．

①由運算極限之定理可以推知之．

例　題

1.試證　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$。

2.試證

(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}$；　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-1}=1$；　(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1$。

3.試為下列函數：

(a)　$f(x)=6x$；

(b)　$f(x)=x^2-2x$；

(c)　$f(x)=\sqrt{x}$，　$x\geqq 0$；

(d)　$f(x)=\sqrt{x^2}$；

(e)　$f(x)=3x^4+x^2-7$；

各求一如是小之 δ，且係隨 ξ 而變者，當 $|x-\xi|<\delta$ 時足致 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$。所指定之 ε 假定為：

(1) $\varepsilon=\dfrac{1}{10}$；　(2) $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$；　(4) $\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$。

4.試證下列各函數在其變程中為均勻連續：

(a)　$f(x)=x^2-2x$，　$-1\leqq x\leqq 1$；

(b)　$f(x)=3x^4+x^2-7$，　$2\leqq x\leqq 4$；

(c)　$f(x)=\sqrt{x}$，　$0\leqq x\leqq 4$；

(d)　$f(x)=\sqrt{x^2}$，　$-2\leqq x\leqq 2$；

即各求一如是小之 δ，當 $|x_1-x_2|<\delta$ 成立時足致 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 者，假定 ε 為：

(1) $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$；　(2)　ε 為一任意小之正數。

5.試考下列各函數何者為連續，何者為不連續。若其無連續性，試求其間斷點之所在。

(a)　$x^2\sin x$。

(b)　$x\sin^2(x^2)$。

(c)　$\dfrac{1}{x}\sin x$。

(d)　$\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$。

(e) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+8}$。

(f) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+9}$。

(g) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+10}$。

(h)　$\tan x$

(i)　$\dfrac{1}{\sin x}$。

(j)　$\cot x$。

(k)　$\dfrac{1}{\cos x}$。

(l)　$x\cot x$。

(m)　$(\pi-x)\tan x$。

第一章附錄

數學中發達最早系統最完者首推幾何學.希臘之幾何學者以最少數最淺顯之原理爲根據,推論其他一切之理,前後一貫,絲毫不苟,其謹嚴之精神,後世學者無不奉爲模範.如 Descartes 及 Spinoza 輩均主張哲學亦必取法於是,求一切哲理之根據於少數淺顯之原理中,而後其理始有不拔之眞確性.蓋理之可證者,必求所以證之;證之之道無他,求其根據於其他已證之理而已.故據甲以證乙,復據乙以證丙,循是以論,必有最後不能證之理.此最後不能證之理,以其質論之,必求其淺顯易明,故雖不能證,亦不必證;以其量言之,必求其最寡,蓋可證者必證,不可證者祇最少數耳.此不必證之理,其他之理之所從出者謂之原理.觀希臘之幾何學,以少數原理爲基礎,其他一切皆從而得一嚴密之組織,誠可謂治學之理想目標矣.

數學自十八世紀以後,研究之範圍日廣,新理之發見日多,惟其研究之方法與精神頗有與前不同者.其時法德諸國之數學名家恃其特殊之天才,發爲驚人之偉論,以其創獲之豐富言之,爲從來所未有,就其系統之嚴密論之,則遠不逮昔.其時所倡導者,惟新理之是求,信任觀覺之力,缺乏明辨之功;至於理論之組織,概念之解剖,常不加以應有之注意.處此時代之中,獨賴少數傑出之人才,具有深厚之眞理感者,創獲特多,若憑其不甚明晰之基本概念,不甚嚴密之推理方法以從事數學,日久必有反動之發生.至十九世紀中葉果有所謂批判學派者興,將基本概念及原理,施以一番審擇明辨之功,而舊日所已獲得之成績,至是始有一堅固不拔之基礎.自此以後,數學得恢復其應有之謹嚴性,而今日之發揚光大,未始非發源於此.

在微積分學中領導批判之工作者,以 Caŭchy, Weierstrass, Dedekind 諸人之力居多.其間最要之工作莫如概念之明辨;而各種證明或討論之基於觀覺者,在批判學派視之,均不能認爲滿意.蓋人類觀

覺，自有其不精之處（至德國大哲Kant所論之純粹觀覺[1]與普通觀覺截然不同，不可相提並論，為另一問題，在此不能詳述），以觀覺輔助思考則可，以觀覺作推理之根據則不可．因此之故，微積分學之基礎，不能求之於觀覺；一切討論，當以數及數之運算為基礎，是即所謂微積分學之"解析化"．觀覺之不可恃，吾人將於本書下數章中屢見之．今姑舉一淺例言之：欲全憑觀覺以認識一連續曲線，其事已甚難，蓋一連續曲線未必在在有一確定之方向，亦有連續曲線、無長短之可言者．吾人有鑒於此，乃知"解析化"之為必要矣．

然觀覺之有助於認識，實為無可諱言之事．況史冊所載，數學中偉大之發明，多以是為原動力，而理論與實用之攜手，亦常以是為媒介，故觀覺之重要，殊有不可忽視者．吾人在第一章中討論各種定理時，求助於觀覺之處甚多，其用意乃為初學認識之利便而已．今當於附錄中為各定理補述一謹嚴之證明，將微積分學之基礎完全建立於數之概念之上．

第一節 聚點原則及其應用

A1.1.1. 聚點原則

近代之微積分學，常奉**聚點原則**[2]為最後之基礎．聚點原則為德國大數學家Weierstrass所首創，其言曰：**設有$x_1, x_2, x_3, \cdots$，其絕對值不能超過一固定之數者，換言之，在一有限之變程中設有無限多之數$x_1, x_2, x_3, \cdots$則其中必至少有一聚點，即至少有一點ξ，在含有ξ之任何變程中，不論其如何小，必為無限多此種數羣居之所．**此理之淺顯易明，幾為人人所共喻．如必欲用解析法證明之，可假定此有限之變程為自0達1之一線段；將此線段用0.1, 0.2, 0.3, $\cdots$ 0.9諸點分為十段，其長彼此相等者，則其中至少必有一段含有無限多之數．於是即取一如是之分段，此種分段如多於一個，則任擇其中之一．假定取一分段之起

(1)reine Anschauung. (2)Principle of the point of accumulation; principe du point d'accumulation; Häufungs[illegible]

自 $0.a_1$ 者,復等分爲十,則此十段之中,至少必又有一段,含有無限多之數者,如是遞推,必可獲得一有盡或無窮小數如

$$\xi=0.a_1a_2a_3a_4\cdots$$

(其中 $a_1,a_2,a_3,a_4\cdots$ 各爲 $0,1,2,3,\cdots 9$ 諸數中之一),是卽吾人所欲求之聚點,蓋任何線段之含 ξ 者,不論其線段如何小,當吾人作相當多次之等分後,所得之分段必盡在其中,因之必有無限多之數居於其中.故 ξ 之必爲一聚點,從可識矣

吾人爲求推理之簡潔,曾取一線段之自 0 達 1 者.如爲一由 a 達 $a+h$ 之線段,則推論之經過,與前無異,惟所得之聚點,當以

$$a+h\times 0.a_1a_2a_3\cdots$$

表達之耳.

A1.1.2. 聚點與極限

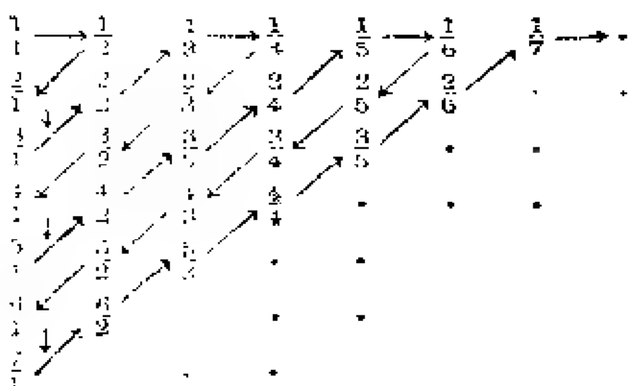
自聚點之義旣明,極限之理得隨之而有一種新解釋.先就一特殊情形言之,設有一數序 $a_1,a_2,a_3,\cdots$,其中無限多之數均彼此相等者,據前所論,此數序亦謂有一極限(卽爲此數),吾人現擬補充聚點之義,而謂此數序有一聚點(僅有一個聚點亦卽此數).設一數序 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 中無限多之數彼此不盡相等,惟其絕對値,不論 n 爲任何正整數,均小於一固定之數 M,卽 $|a_n|<M$,則據 Weierstrass 之聚點原則,其間必至少有一聚點 ξ.**苟其僅有此一聚點,而除 ξ 外別無其他聚點,則 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 幾全與 ξ 爲鄰,是卽 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 收斂於 ξ 之謂,故 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 有一極限,且此極限卽爲 ξ.**明乎此,乃知一數序若有多於一個之聚點,則必無極限可趨;如

$$a_{2n}=\frac{1}{n},\quad a_{2n-1}=1-\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,4\cdots)$$

有兩聚點而無極限,可以見之.循是以論,**一數序有一極限云者,卽有唯一聚點之謂**;吾人欲證一數序之收斂,但證其有唯一之聚點可矣.

聚點之出現於一數序之中,爲數可以甚多.惟當其有唯一聚點時,此聚點始爲其所趨之極限.如一切正有理數亦可視爲一種數序,蓋吾人

可依下表內之矢向將一切正有理數,遇重出者棄之,排成先後有序之形式.考此數序之聚點,其多可謂無窮,蓋任何正有理數及正無理數均為無限多正有理數聚會之所,故無一非此數序之聚點.觀乎是例,可以明數序之聚點,得有無限多.



聚點與極限之關係,觀於上述,已可瞭然.要之,設有一數序 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 苟其有一極限,則其極限必為一聚點;倒言之,一數序之聚點未必即為其極限,惟當其有唯一聚點時,此唯一聚點始為其極限.故**聚點之唯一與極限之存在可謂兩相同之概念.**

A1.1.3.　Cauchy 審斂法之證明

據前所論,一數序之有無極限,可由 Cauchy 審斂法取決之.此法內容已述於前,惟其證明尙付闕如.考其內容,謂一數序 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 當 m, n 為相當大之正整數時,其中 $|a_m - a_n|$ 任意小者必有一極限.在此假設之下,a_n 不論 n 為任何正整數必不能超過一固定之數,可以斷言,故據聚點原則必至少有一聚點 ξ;所欲證明者,僅有此 ξ 一聚點耳.倘其除 ξ 之外,更有一聚點 η,而 ξ 與 η 之相去為 α 者:$|\xi - \eta| = \alpha$,則據聚點之義,必有無限多之 a_n 與 ξ 為鄰,於 $n > N$(N 為一相當大之正整數)時,a_n 與 ξ 之距離甚小,如小於 $\frac{\alpha}{3}$,又必有無限多之 a_m 與 η 為鄰,於 $m > N$ 時,a_m 與 η 之距離亦小於 $\frac{\alpha}{3}$.如是則就此種 a_m 及 a_n 而論,其中 $n, m > N$ 者,其間之相去必大於 $\frac{\alpha}{3}$,即 $|a_m - a_n| > \frac{\alpha}{3}$,是與所假設者適相牴牾,蓋據假設 $|a_m - a_n|$ 在 $m, n > N$ 時為任意小也.故僅有一個聚點,別無其他,而 Cauchy 審斂法遂得證矣.

A1.1.4.　有涯獨行數序之斂斂性

一獨升數序之有涯者，即 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，其中 a_n 隨 n 之增加而變大，惟其值不論 n 為任何正整數，不能超過一固定之數者必有一極限，其理已述於前，且其眞確，羣認為無可致疑．茲擬應用聚點之概念為求一謹嚴之證明．考 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 既有上涯，則必有一聚點 ξ；此聚點 ξ 必大於數序中任何一數．何則，倘其中有一點如 a_l 者，等於或大於 ξ，則一切 a_n 其中 $n>l+1$ 者，必更大於 ξ，蓋據數序之獨升性必有 $a_n>a_{l+1}>a_l\geqq\xi$．如是則試劃一線段，以 ξ 為中心，其長為 $2(a_{l+1}-\xi)$ 者，可見此數序中之數，至多除去最初之 $l+1$ 個，必盡在此線段之外，因此 ξ 將不得為一聚點，與 ξ 之原義不符．明乎是，乃知此數序中無一數大於 ξ，自更無一聚點大於 ξ 者．倘除 ξ 外，尚有一聚點 η 之可能，則 $\eta<\xi$．惟據同理，可以證無一聚點大於 η 者，因之惟有 $\eta=\xi$．循是以推，此數序祇能有一個聚點，故其收斂，可以識矣．

前理得證之後，吾人可用類似之法以證一獨降數序之有下涯者亦必有一極限．且推而至於升數序及降數序亦然，讀者可自求證明．

A1.1.5. 最大與最小聚點；數集之上下涯

吾人在 § A1.1.1. 討論聚點之存在時，曾設法求得一聚點．其法無他，乃將一有限之線段，其中含有無限多之數者，等分為十段，然後選擇其中之含有無限多之數者，復等分為十，如是分而又擇，擇而又分，必可獲得一點，其鄰有無限多之數者，是即所謂聚點．考上述求索聚點之法，不外分段擇段兩重要步驟，而擇段之事，實有其任意性．蓋分段之後，其中含有無限多之數者，大抵不祇一段；惟其多於一段，則應取何者而復分之，自有任意選擇之餘地．若每次分段之後，就其含有無限多數之分段中，擇其居於最右者而復分之，必可得一聚點 β，謂之**最大聚點**(1)，以 $\overline{\lim}$ 或 lim sup 之記號表而出之．如是獲得之聚點謂之最大，蓋無一聚點能更大於此．故大於 β 之數，即使有無限多之可能，大於 $\beta+\varepsilon$ 之數，

(1)upper point of accumulation; le plus grand des points d'accumulation; oberer Häufungspunkt.

不論 ε 如何小，必不能無限多(倘有無限多之數大於 $\beta+\varepsilon$，則未始不可有一大於 β 之聚點，是與 β 之原義不符)．據同理，在應用前法求索聚點之時，若每次分段之後，就其含有無限多數之分段中，擇其居於最左者而復分之，必可得一聚點 α，且無一聚點更小於此，故 α 謂之**最小聚點**(1)，以 $\underline{\lim}$ 或 lim inf 表而出之．考其性質，雖或有無限多之數小於 α，惟小於 $\alpha-\varepsilon$ 之數，不論 ε 如何小，決不能無限多（倘有無限多之數小於 $\alpha-\varepsilon$，則未始不可有一小於 α 之聚點，是與 α 之原義不符)．如就 $a_{2n}=\frac{1}{n}, a_{2n-1}=2-\frac{1}{n}$ 而論，其最小聚點爲 0，最大聚點爲 2；惟此兩聚點未嘗屬於此數序之中，是又不可不注意者．

更觀 $a_{2n}=\frac{1}{n}$，$a_{2n-1}=2-\frac{1}{n}$，其中各數無一大於 2 者，故 2 既爲此數集①之最大聚點，同時又爲其上涯(2)．一數集之**上涯**爲一如是之數 M，凡集內之數無一大於 M，惟至少必有一數大於 $M-\varepsilon$，不論 ε 爲如何小．又所謂數集之**下涯**(3)，其義得以類似之法規定之．苟集內之數無一小於某數 m，惟不論 ε 如何小，至少必有一數，小於 $m+\varepsilon$ 者，則 m 謂之此數集之下涯．細考上述之義，可知一數集之上涯可與其最大聚點相同（如 $a_n=\frac{1}{n}$，$a_{2n-1}=2-\frac{1}{n}$，兩者均爲 2)，而亦可不相同，如 $a_n=1+\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 之上涯爲2，最大聚點爲 1．

試以 M 表一數集之上涯，β 表其最大聚點．於是有兩種情形可以發生．其一，集中無大於 β 之數，如是則 β 卽爲其上涯：$M=\beta$．其二，集中有大於 β 之數，試舉其中之一如 a，則大於 a 或等於 a 之數必爲有限，蓋若無限，其結果可有一聚點大於 β 者，其事自不可能．此種大於或等於 a 之數既爲有限，其中必有一最大者；此最大者必爲此數集之上涯無疑．故在此情形之下，其上涯爲大於最大聚點之一數：$M>\beta$，且必

(1)lower point of accumulation; le plus petit des points d'accumulation; unterer Häufungspunkt.　(2)upper bound; borne supérieure; obere Grenze (einer Zahlenmenge).　(3)lower bound; borne inférieure; untere Grenze (einer Zahlenmenge).

①任何數會合而成一集團者謂之數集．如一切有理數或實數之介於 $0\leqq x\leqq 1$ 之間者各爲一數集．又任何數序必爲數集，惟數集不必爲數序．

孤立於其最大聚點之右(謂其鄰近僅有有限個數,故曰孤立.如是之點,即謂之孤點.)綜上所論,乃知必有 $M \geqq \beta$ 之關係;**苟一數集之上涯不同於其最大聚點,必爲集內之一孤點**[1].據同理,可證**一數集之下涯必不能大於其最小聚點(而必小於或等於其最小聚點),苟其不等於最小聚點,亦必爲其中之一孤點**.

數集之上涯與其最大聚點,數集之下涯與其最小聚點,其間之關係,初學者幸深思而明辨之.

第二節 關於連續函數之定理

A1.2.1. 連續函數之最大與最小值

數集之有上下涯者,其上下涯不必屬於數集之中,因此吾人常謂一數集可無一最大或最小値.例如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$ 之下涯爲 0,然 0 固未屬於此數集,故此數集無一最小之數.

吾人有鑒於此,乃知如下關於連續函數之一定理殊未能認爲當然無足證明.其言曰:**閉程如 $a \leqq x \leqq b$ 中之任何連續函數 $f(x)$ 必至少有一次取得其最大或最小値;換言之,必有一最大或最小値**.欲證之,當知一連續函數 $f(x)$ 在其閉程 $a \leqq x \leqq b$ 中之値爲一有涯之數集,故必有一上涯 M.倘其無一上涯,則其變程中將有一數序 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$,其 $f(\xi_n)$ 愈趨愈大,絕無限制;而此數序 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ 必至少有一聚點 $\bar{\xi}$,在 $\bar{\xi}$ 之鄰近必可求得 ξ_n 滿足 $|f(\bar{\xi})-f(\xi_n)|>1$(其實可任意變大)者;果如是,則 $f(x)$ 在 $\bar{\xi}$ 自無連續性可言.故必有一上涯 M,可無疑義.今若有一 ξ 點,可使 $f(\xi)=M$,則欲證之事已明;否則必有一數序 $x_1, x_2, x_3, \cdots$,令

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

者.惟此 x_n 必有一聚點 ξ(據聚點原則);既有一聚點 ξ,自可據 x_n 以組成一數序 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ 收斂於 ξ 者:

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n=\xi;$$

(1)isolated point, point isolé, isolierter Punkt

因之必有
$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)=M,$$
復因 $f(x)$之連續性及 ξ 之必在閉程之內，可知
$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)=f(\xi);$$
由是得$f(\xi)=M$.故在 $a\leqq x\leqq b$ 之中，必有一 ξ，使$f(x)$之值適爲M，是卽吾人所欲證之理.據相似之推論，可證$f(x)$在其閉程中必有一最小值.

所當注意者，吾人苟不明定變程爲閉，則如上之定理卽未必眞確.所謂 $f(x)$在閉程 $a\leqq x\leqq b$ 中爲連續，意卽在其兩端卽 $x=a$ 及 $x=b$ 時亦有連續性.如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $0<x<\infty$ 之間爲連續，惟其變程旣開，故無一最大值(其值在 $x=0$ 之鄰近愈趨愈大，絕無限制)，又無一最小值(其值在 $x\to\infty$ 時愈趨愈小，然不能爲 0).

A1.2.2. 均勻連續性

連續函數在其閉程中除上述定理外，尙有其他特性，深堪注意者.所謂函數在 $x=\xi$ 之連續性，據其定義言之，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ 可以推得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$而已.精確言之，不論 ξ 爲 $a\leqq x\leqq b$ 中之任何一點，苟 ε 爲任意指定之一正數，必有一 $\delta>0$ 可求，凡合於 $|x-\xi|<\delta$ 之 x 皆足致 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ 成立者，則 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中謂有連續性.

舉例言之，設有 $y=cx$ (假定 $c\neq0$)，則欲求一 δ，符合上述之條件者，其事甚易，蓋 $\delta=\frac{\varepsilon}{|c|}$ 卽是.設有一函數 $y=x^2$，亦不難覓得一如是之 δ. 假定 x 之變程爲 $0\leqq x\leqq1$，所欲討論者，x 與 ξ 之相去必如何近而後 $|x^2-\xi^2|$ 始得小於隨意指定之 ε.欲答覆此問題，可先將 $|x^2-\xi^2|$ 寫作 $|x^2-\xi^2|=|x-\xi||x+\xi|\leqq|x-\xi|(1+\xi)$，由是知 $|x-\xi|$ 若小於 $\frac{\varepsilon}{1+\xi}$，則 $|x^2-\xi^2|<\varepsilon$ 必能成立無疑.故卽以 $\frac{\varepsilon}{1+\xi}$ 作 δ，欲求之 δ 已得之矣.惟一考此 $\delta=\frac{\varepsilon}{1+\xi}$，不特隨 ε 而變，且與 ξ 有關.如是則 δ 之大小，亦視 ξ 之地位而異，在考察每一點 ξ 上之連續性時，當爲每一點 ξ 求得一 δ.然則能否求一 δ，可適用於任何 ξ.換言之，能否求一 δ，僅隨 ε 而變，不隨 ξ 而異者，卽不論 ξ 爲任何一點，凡合於 $|x-\xi|<\delta$ 之 x 皆足致 $|x^2-\xi^2|<\varepsilon$ 之成立.細考如上情形，不難求得一如是之 δ.因 ξ 爲閉程中之任何一點，故必小於 1；惟如是，若令 $\frac{\varepsilon}{1+\xi}$ 中之 ξ 代以 1，可知 $\frac{\varepsilon}{1+\xi}>\frac{\varepsilon}{2}$.故以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 作 δ，則當 $|x-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{1+\xi}$ 時，$|x^2-\xi^2|<\varepsilon$ 必更能成立無疑.於是覓得一 δ 不隨 ξ 而變者；不論 ξ 爲任何一點均可適用.$y=x^2$在$0\leqq x\leqq1$ 中，

之連續性遂謂之均勻.

既明此例，吾人當提出一重要之問題，卽一連續函數在其閉程中是否必爲均勻連續。詳言之，設 ε 爲隨意指定之一正數，不論 ε 如何小，必有 $\delta=\delta(\varepsilon)$，僅隨 ε 而變，不隨 ξ 而異者，凡合於 $|x-\xi|<\delta$ 之 x 皆足致 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ 之成立，不論 ξ 爲閉程中之任何一數。此事之可能爲連續性之必然結果，吾人擬用反證法證之，卽假定一函數 $f(x)$ 在閉程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性而無均勻連續性，則必流於矛盾。所謂 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中之連續性爲均勻，詳言之，設 u，v 爲變程中之任何兩數，不論其所處地位何如，但求其彼此之距離小於 $\delta=\delta(\varepsilon)$，必能使 $|f(u)-f(v)|$ 小於任意小之正數 ε。今在反面之假定下，謂 $f(x)$ 之連續性未能均勻，其意無異謂有一任意數序 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\cdots$ 趨於 0 者，當 $|u_n-v_n|<\delta_n$ 時，$|f(u_n)-f(v_n)|$ 仍大於一正數 α，卽 $|f(u_n)-f(v_n)|>\alpha$。惟 u_n 必有一聚點 ξ，而 v_n 亦必有同一聚點 ξ，故無限多之 u_n 及 v_n 必聚於 ξ 之鄰近。倘如上所云，$|f(u_n)-f(v_n)|$ 果始終大於 α，則 $f(x)$ 在 ξ 將失其連續性 ①。循是以論，$f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 內必爲均勻連續。

所當注意者，在上述證明中，必假定變程爲閉而後可；苟其不然，則上述之聚點 ξ 大可不必屬於變程之中，一切論據，遂失其效，蓋此定理在開程中固未能真確也。

茲舉一淺例以明上述定理在開程中不確，如 $\frac{1}{x}$ 在 $0<x\leqq 1$ 中自是連續，但未能均勻連續。試任擇一 δ，不論其如何小，然在接近原點之處如 $\frac{\delta}{2}\leqq x\leqq\frac{3\delta}{2}$ 中，仍可覓得兩點，令其函數值之相差大於 1，故其連續性之不均勻，顯而可見。推原其故，乃由於 $\frac{1}{x}$ 在閉程 $0\leqq x\leqq 1$ 中有一間斷點 0。若在開程如 $-\infty<x<\infty$ 中討論 $y=x^2$ 其不能均勻連續亦爲顯而易明之事。

A1.2.3.　介值定理

連續函數在其閉程中復有如下之特性：

若一函數 $f(x)$ 在閉程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，又 $f(a)$ 及 $f(b)$ 兩數

---

① $f(x)$ 在 ξ 點之連續性，由 Cauchy 審斂法言之，必要求 $|f(x_1)-f(x_2)|<\alpha$，其中 x_1 及 x_2 爲相當接近 ξ 之數.

爲一正一負，則至少必有一數 ξ，介於 a 及 b 之間，其函數值爲 0，即 $f(\xi)=0$。

試假定 $f(a)<0$, $f(b)>0$（若假定 $f(a)>0$, $f(b)<0$，其理亦同），則此理之眞確，由幾何圖形言之，自顯而易見，蓋一連續曲線之起於橫軸之下，終於橫軸之上者，必與橫軸至少相交於一點．欲證之，可就一切 x，其 $f(x)<0$ 者，而細考之．此種 x 必爲無限多，蓋自 a 點起之某一線段內，其中 x 皆合 $f(x)<0$ 之關係．如是則必有一上界 ξ，且 $\xi>a$．既在 ξ 之任何鄰近均有 x，其 $f(x)<0$ 者，則據 $f(x)$ 之連續性可以推知 $f(\xi)\leqq 0$（從而可知 $\xi\neq b$）．然 $f(\xi)<0$ 爲不可能之事；何則，倘其 $f(\xi)<0$，則與 ξ 相當接近之處，尚有大於 ξ 之 x，其 $f(x)$ 因連續性之故亦小於 0，而 ξ 據其原義爲最大之一數，其 $f(x)$ 小於 0 者．故必 $f(\xi)=0$ 而後可，是即欲證之理．

明乎此，乃得從而推論如下之定理，即世所稱之介値定理：

苟一函數 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，又 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$；μ 爲任何一數，介於 α 及 β 之間者，則 $f(x)$ 在其變程中必至少有一處取得 μ 値． 蓋在此假定之下，$\varphi(x)=f(x)-\mu$ 爲一連續函數，其中 $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ 兩者一正一負，故據前證之理，此理之眞確可以識矣．

A1.2.4. 獨行連續函數之逆函數

苟 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，又有獨行性，則不論 μ 爲任何一值，介於 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間者，$f(x)$ 必能取得此値一次，且僅能一次．是乃連續性與獨行性之必然結果，顯而易見者．惟如是，當 y 在 $f(a)=\alpha$ 及 $f(b)=\beta$ 之間變化時，每一 y 必有一確定之 x 以應之．因此之故，吾人可視 x 爲 y 之一單値函數，換言之，$y=f(x)$ 有一單値之逆函數 $x=\varphi(y)$．現所欲證者，此逆函數 $x=\varphi(y)$ 在 $\alpha\leqq y\leqq\beta$ 中亦有連續性與獨行性耳．

$x=\varphi(y)$ 之爲一獨行函數，至爲顯然．至其連續性，當證之如次．據 $f(x)$ 之獨行性，可知 x_1 及 x_2 如爲變程中兩不同之數，則必有

$|f(x_2)-f(x_1)|=|y_2-y_1|>0$. 今假定 h 為一正數，小於 $b-a$ 者，則 $|f(x+h)-f(x)|$ 在閉程 $a\leqq x\leqq b-h$ 中為連續，故於其中某處如 $x=\xi$ 時必有一最小值 $|f(\xi+h)-f(\xi)|=\alpha(h)$；此 $\alpha(h)$ 自不等於 0，惟因 $f(x)$ 之連續性當隨 $h\to 0$ 而趨於 0 耳.明乎以上所述，可知 x_1 及 x_2 苟為變程中之兩數，其間之相去如 $x_1-x_2\geqq h$ 者，則必有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqq\alpha(h)$. 此意如剖析之，即 $x=\varphi(y)$ 連續之謂. 何則，誠如所論，則當 $|y_1-y_2|$ 小於 $\alpha(h)$ 時，必有 $|x_1-x_2|<h$ 之關係. 故隨意指定一 ε 之後，但使 $\delta=\alpha(\varepsilon)$，則一切 y 之滿足 $|y_1-y|<\delta$ 者皆足以致 $|\varphi(y_1)-\varphi(y)|<\varepsilon$ 之成立，是即欲證之理.

A1.2.5. 其他定理

在 §1.6.3，已論及**連續函數之和、差、積均為連續函數；連續函數之商，在其分母不等於 0 時，亦為連續**. 今欲補述者，為如下之事實：**一連續函數之連續函數又為一連續函數**. 設 $\varphi(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，其值在 $\alpha\leqq\varphi\leqq\beta$ 中變化；又 $f(\varphi)$ 在 $\alpha\leqq\varphi\leqq\beta$ 中亦有連續性，則 $f(\varphi(x))$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中亦為一連續函數. 其證明甚易，讀者可自求之.

第三節 再論初等函數

吾人在第一章中所討論之初等函數均為連續，現已不難證明之. 無論如何，$f(x)=x$ 必為連續無疑，因之 $x^2=x\cdot x$ 及 x^n 為連續函數之積亦必連續. 又任何多項式既為連續函數之和亦為連續. 至任何有理函數，因其為一連續函數除另一連續函數而成，在其分母不等於 0 時，亦為連續函數.

復次，x^n 既有連續性，復有獨行性(假定 $x>0$)，因之其逆函數，即其 n 次根亦必連續. 又任何有理函數之 n 次根，實為連續函數之連續函數，故亦為連續函數，惟其分母為零時，自須除外耳.

至三角函數之連續性，亦可應用上述之概念以證之. 吾人在下章中

將由另一觀點推論及之，故在此不復贅述.

今所欲討論者，爲指數函數 a^x、冪函數(1) x^α 及對數函數之定義及其連續性. 假定 a 爲一正數，如爲一大於 1 之數，則 a^x 當 x 爲有理數時，其義何如，至爲易明；設 r 爲一正有理數如 $r=\frac{p}{q}$（其中 p,q 爲兩整數），則 $a^r=a^{\frac{p}{q}}$ 爲一正數，其 q 次冪爲 a^p 者. 然則 a^x 中之 x 如爲一無理數時，其義當爲何如. 設 α 爲一無理數，而 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 爲有理數所組成之數序，趨於 α 者，則所謂 a^α，乃 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ 之意. 故在此必先證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ 之存在，然後得以此極限値定 a^α 之義.

欲證 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ 之存在，可應用 Cauchy 審斂法. 苟 $|a^{r_n}-a^{r_m}|$ 在 n，m 趨大時得任意小，則其收斂可無疑義. 試假定 $r_n>r_m$，兩者之差以 δ 名之，自爲一正有理數，$r_n-r_m=\delta>0$；於是欲證

$$a^{r_n}-a^{r_m}=a^{r_m}(a^\delta-1)$$

之任意變小，因 a^{r_m} 之有涯，但證

$$|a^\delta-1|=a^\delta-1$$

之任意變小已足. 惟 δ 既爲一正有理數，當 n 及 m 趨大時可使之任意小，故設 l 爲任意大之一正整數，則當 n 及 m 趨大時必有 $\delta<\frac{1}{l}$. 因 $\delta<\frac{1}{l}$ 及 $a>1$ 之故，遂得①

$$1<a^\delta<a^{\frac{1}{l}},$$

復因 $a^{\frac{1}{l}}$ 在 $l\to\infty$ 時向 1 收斂，故欲證之理，已在於是.

經此說明之後，a^x 中 x 之變程已由有理數擴展至無理數；至 x 爲負數時，其義爲
$$a^x=\frac{1}{a^{-x}}.$$
如是規定之指數函數 a^x 在變程 $-\infty<x<\infty$ 中爲一獨行連續函數，其值在 $0<a^x<\infty$ 中變化. 惟如是，必有一獨行連續之逆函數存在，是即所謂對數函數，其基數爲 a 者.

---

(1) general power function; Potenzfunktion.

① 在 $a>1$ 假定之下，$a^{\frac{m}{n}}$ 在 $\frac{m}{n}$ 爲正時必大於 1. 何則，倘 $a^{\frac{m}{n}}$ 小於 1，則 $a^m=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ 亦將小於 1，是乃不可能，蓋 a^m 明大於 1 也.

據類似之推理，可以證 x^α，不論其中 α 爲任何固定之有理數或無理數，在 $0<x<\infty$ 中亦爲一連續函數；又 x^α 在 $\alpha\neq 0$ 時兼有獨行性.

吾人在下章中當由一較佳之觀點研討此二種函數之定義，其法較現用之法更覺簡潔易明，讀者宜前後參閱，深思而體會之也.

例　　題

1. 說出下列各數序之上下限及最大與最小聚點，並求是否屬於各該數序：

(a) $\frac{6^n}{n!}$，　$n=1,2,\cdots$.　　(b) $0,\ \frac{(-1)^n}{n!}$，　$n=1,2,\cdots$.

(c) $\frac{(-1)^n}{n}+\frac{n}{2n+1}$，　$n=1,2,\cdots$.　　(d) $1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n n}{2n+1}$，$n=1,2,\cdots$.

(e) $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$，　$m,n=1,2\cdots$.

2.* 設 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中爲連續，則任意指定一正數 ϵ，必有一多角形函數 $\varphi(x)$，可使變程中之 x 皆滿足 $|f(x)-\varphi(x)|<\epsilon$ 之關係．試證之（所謂多角形函數者，乃一連續函數，其標繪圖係由有限個數之直線段相接而成，狀如多角形.）.

3. 試證任何多角形函數 $\varphi(x)$ 可寫成一和數之形式，如

$$\varphi(x)=a+bx+\Sigma c_i\,|x-x_i|,$$

其中 x_i 爲各角點之橫坐標.

試爲由下列等式定義之函數 $f(x)$ 求一此種公式：

$$f(x)=2x-1,\qquad (0\leqq x\leqq 2),$$

$$f(x)=5-x,\qquad (2\leqq x\leqq 3),$$

$$f(x)=x-1,\qquad (3\leqq x\leqq 5),$$

$$f(x)=4,\qquad (5\leqq x\leqq 7).$$

4. 如§A1.2.2所舉之例，試爲下列函數各求一 $\delta(\epsilon)$，致 $|x_1-x_2|<\delta(\epsilon)$ 時有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$ 之關係者：

(a) $f(x)=2x^3$，　　$-1\leqq x\leqq 1$.

(b) $f(x)=x^n$，　　$-a\leqq x\leqq a$.

(c)* $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$，　　$0\leqq x\leqq 1$.

5. *函數 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在變程 $0<x<1$ 中並無間斷點，試證其在此間程中不爲均匀連續。

6. 今有於一切 x 值定義如下之函數 $f(x)$：

$f(x)=0$，　當 x 爲任何無理數時；

$f(x)=\frac{1}{q}$，　當 $x=\pm\frac{p}{q}$ 爲任何有理數時；

此處 $\frac{p}{q}$ 爲一已約簡之分數（例如於 [illegible]）

試證 $f(x)$ 於 x 之一切無理值爲連續，而於 x 之一切有理值爲不連續。

第二章 微積分學之基本概念與定理

微積分學所研討者，有兩種重要極限，一曰**積分**(1)，一曰**導數**(2) 或**微商**(3). 此兩種極限在古代已散見於各種特殊問題；直至其間相互關係發明之後，始得據之以建立一謹嚴之理論. 最初闡明之者，當推英之 Newton 與德之 Leibniz；前者對於基本概念剖析盡致，發揮殊多，後者對於應用符號及計算方法貢獻尤富，各自獨出心裁，闡明眞理，誠可謂二難競爽，殊致同歸者矣.

第一節 定積分

2.1.1. 面積問題

計算面積之問題，發生甚早，如多邊形之面積如何計算，初等數學中固已論及之. 今設有一區域，其周爲一曲線或其周之一部分爲曲線所成，則雖明知其面積有大小可言而不知量之之法. 此難題之解決，吾人試於極限之思想中求之.

設有一連續函數 $y=f(x)$，其値在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中爲正. 將 $y=f(x)$ 標繪之後，卽可得一區域，其上由 $y=f(x)$ 之圖形，其下由橫軸上自 a 達 b 之一段，左右由 $x=a$ 及 $x=b$ 兩直線所圍而成，見圖 2.1. 此區域顯有一確定之面積，吾人以 F_a^b 表之，並稱之爲 $f(x)$ 自 a 至 b 之**定積分**(4). 所難者，此 F_a^b 果用何法以求之. 試先將橫軸上自 a 至 b 之一段分作 n 段，爲行文之便，假定各段彼此相等，復在每分點立垂直於橫軸之直線如圖 2.2；於是得 n 個帶形區域.

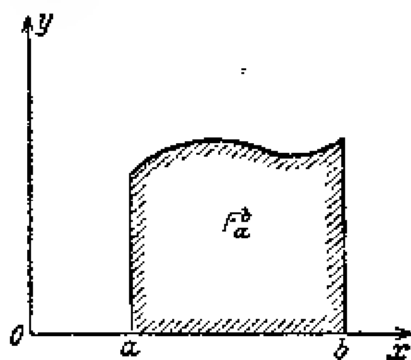


圖2.1

(1)integral; intégrale; Integral. (2)derivative; dérivée; Ableitung. (3)differential quotient; quotient différential; Differentialquotient. (4)definite integral; intégrale définie; bestimmtes Integral.

故欲知 F_a^b，但知如上每一帶形之面積即可．惜此種帶形面積之不易計量仍無異於前；推原其故，實由其上非一直線線段所致．惟如是，當設法作一直線線段於其上．若 $f(x)$ 在每一帶形之內有其最高點及最低點；試在每一最低點作一直線與橫軸平行，必從而總得 n 個長方形，此 n 個長方形面積之和為吾人所熟知，其值小於 F_a^b，惟隨 n 而變，且隨 n 之增加而變大；姑以 $\underline{F}_n$ 表而出之．據同理，如就 $f(x)$ 在每一帶形內之最高點作一直線與橫軸平行，亦必從而得 n 個長方形，其面積之和大於 F_a^b，以 $\overline{F}_n$ 表之，藉示其值隨 n 而變之意．於是遂有

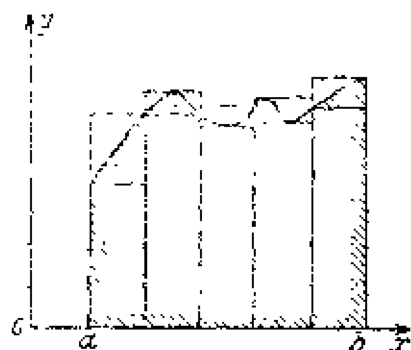


圖2.2

$$\underline{F}_n \leqq F_a^b \leqq \overline{F}_n$$

之關係．然則吾人如將橫軸上之分段愈分愈細，則如上兩種長方形將隨之而愈分愈多，其面積之和或能同斂於 F_a^b；誠如是，則 F_a^b 為兩種數序之極限：

$$F_a^b = \lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{F}_n;$$

而面積問題，至是得有一普遍之解決．

2.1.2. 定積分之定義

前段所論，為計算面積之一法，視面積為極限之一種，而以 $f(x)$ 之定積分名之．此其立論，全由觀覺；今擬倒轉論之，先為定積分立一純粹解析定義①，然後闡明其意義在幾何上為一種面積．蓋定積分與觀覺未嘗有不可離之關係；以觀覺闡明定積分之為物則可，以定積分為一幾何概念則不可．吾人鑒於上述之理，試與觀覺分離而為定積分立一定義如下：

設 $f(x)$ 在 $a \leqq x \leqq b$ 中之值為正，且有連續性．又設想此變程(其長為 $b-a$，即橫軸上由 a 至 b 之一段)由 $n-1$ 個點 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 分作 n 個相等或不相等之分段，並命 $x_0 = a$，$x_n = b$．在每一分段之中，

①解析定義乃定義之基於數之概念者，與本於幾何觀念者不同．

即在$x_{k-1}\leqq x\leqq x_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$**之間，任擇一點**$\xi_k\ (k=1,2\cdots n)$；**就$f(\xi_k)$與x_k-x_{k-1}相乘後一一相加，**即得

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

此與n有關之數，自有其幾何上之簡單意義，**吾人以F_n表之：**

$$F_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

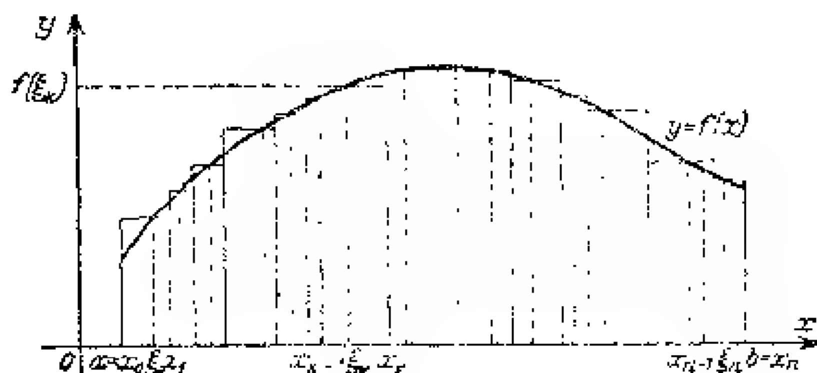


圖 3

復令x_k-x_{k-1}以Δx_k之符號縮寫之，則有

$$F_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

苟n趨大，Δx_k隨之趨小時，不論ξ_k爲任何居於Δx_k內之點，F_n有一極限者，則此極限即稱之爲$f(x)$由a至b之定積分，以

$$\int_a^b f(x)dx$$

之符號表而出之.綜觀此定義，自可用下列公式概括書之：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

此極限之存在，由觀覺上言之，自覺顯而易見，惟亦當視$f(x)$之性質如何以爲斷.以常識測之，苟$f(x)$在$a\leqq x\leqq b$中處處連續，則其定積分必能存在，至$f(x)>0$之假定殊非必要，吾人當於附錄中詳之.復次，在上述定義中所作$a<b$之假定亦無關宏旨；如$a>b$，則Δx_k將爲負數，

因之遂有
$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

明乎以上所述，可知
$$\int_a^b f(x)dx$$

不過爲一種極限，其中$\int$之符號，形似一伸長之 S，見之令人回憶其來源爲由 Σ 收斂而得．**此極限亦簡稱爲$f(x)$在 a，b 間之定積分，b 爲其上界**[1]**，a 爲其下界**[2]．定積分之上下界相等者自等於 0：

$$\int_a^a f(x)dx=0;$$

又設 $a<b<c$，則

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

之眞確，至爲顯然．復次，設 c 爲一常數，則必有

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx;$$

又設
$$f(x)=g(x)+h(x),$$

則
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx+\int_a^b h(x)dx;$$

凡此皆據其定義而可以推知之．尚有一言須申述者，卽

$$\int_a^b f(x)dx$$

中之 x，世常以積分變數稱之者，爲一自限於 $a\leqq x\leqq b$ 中之一變數，因此

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 或} \int_a^b f(u)du \text{ 或} \int_a^b f(t)dt \cdots$$

苟爲同一函數之定積分，其變數之變程又相同者，則無論以何種字母表之，其意義完全無異，此雖自明之理，亦不可不注意及之．

2.1.3. 舉例

既明前段所論，可知求 $f(x)$ 之定積分，實爲求一種極限之問題，同時又爲計量一種面積之問題．茲特舉最淺顯之函數數例，求其定積分，務使上述概念瞭然無餘而後已．

〔例一〕 直線性函數之定積分．

設 $f(x)=1$，則 $\int_a^b 1\cdot dx=b-a$，自無待論．設 $f(x)=x$，則

$$\int_a^b xdx,$$

(1)upper limit; limite supérieure; obere Grenze (eines bestimmten Integrals).

(2)lower limit; limite inférieure; untere Grenze (eines bestimmten Integrals).

就其幾何意義言之，爲一梯形之面積，必等於$\frac{1}{2}(b-a)(b+a)$ $=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，今以極限之法求之，以考其結果是否相符．試將橫軸上由 a 至 b 之一段等分爲 n 段，以 $a+h$，$a+2h$，$a+3h$，……，$a+(n-1)h$ 諸點分之，其中 h 自爲 $\frac{b-a}{n}$；又在每分點作直線與縱軸相垂直，即得 n 個分區．考 $f(x)=x$ 在每分區內有其最高及最低點，而吾人所欲求之定積分則爲

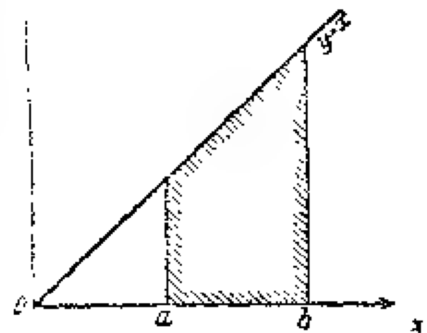


圖2.4

$$\overline{F_n}=h\left\{(a+h)+(a+2h)+\cdots+(a+nh)\right\}=h\left\{na+h\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

或

$$\underline{F_n}=h\left\{a+(a+h)+(a+2h)+\cdots+(a+\overline{n-1}h)\right\}=h\left\{na+h\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

在 $n\to\infty$ 即 $h\to 0$ 之極限．因

$$\overline{F_n}=nh\left\{a+h\frac{n+1}{2}\right\}=(b-a)\left\{a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right\},$$

$$\underline{F_n}=nh\left\{a+h\frac{n-1}{2}\right\}=(b-a)\left\{a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right\}$$

之故，在 $n\to\infty$ 時兩者必同斂於

$$(b-a)\left\{a+\frac{1}{2}(b-a)\right\}=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

故

$$\int_a^b x\,dx=\lim_{n\to\infty}\overline{F_n}=\lim_{n\to\infty}\underline{F_n}=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

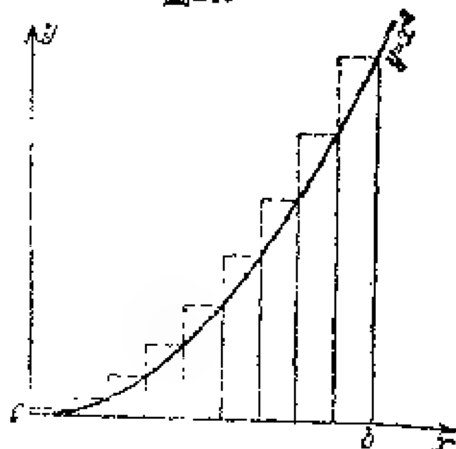
是即欲證之理．

［例二］　$f(x)=x^2$ 之定積分．

假定 $b\geqq 0$，如欲求

$$\int_0^b x^2dx,$$

圖2.5



當先將橫軸上由 o 至 b 之一段等分爲 n 段，每段之長爲 $\frac{b}{n}$，試令 $\frac{b}{n}=h$，並組織如下 n 項之和

$$h\,(h^2+2^2h^2+3^2h^2+\cdots+n^2h^2)$$

$$=h^3(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2),$$

而求其在 $n\to\infty$ 時之極限，即爲吾人所欲求之定積分。如用

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

之關係，可將上式簡寫如

$$\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

遂得
$$\int_0^b x^2dx=\frac{b^3}{3}.$$

由是可以推知

$$\int_a^b x^2dx=\int_0^b x^2dx-\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

［例三］　$f(x)=x^\alpha$ 之定積分，其中α爲任何正整數。

假定 α 爲一固定之正整數，又 $0<a<b$，如仍用前法以求

$$\int_a^b x^\alpha dx,$$

將橫軸上自 a 至 b 之一段等分爲 n 段，其事將不甚便利[1]，因此吾人擬放棄等分之法，使 $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=q$，改以如下諸點

$$a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},aq^n=b$$

分之。觀此諸分點之地位，其間顯有幾何級數之關係。如是則吾人所欲求之定積分爲下列 n 項之和在 $n\to\infty$ 時之極限：

$$\begin{aligned}&a^\alpha(aq-a)+(aq)^\alpha(aq^2-aq)+(aq^2)^\alpha(aq^3-aq^2)+\cdots+(aq^{n-1})^\alpha(aq^n-aq^{n-1})\\&=a^{\alpha+1}(q-1)[1+q^{\alpha+1}+q^{2(\alpha+1)}+q^{3(\alpha+1)}+\cdots+q^{(n-1)(\alpha+1)}];\end{aligned}$$

列於此式右方之方括弧爲一幾何級數，其中 $q^{\alpha+1}\neq1$，因之可簡化爲

$$a^{\alpha+1}(q-1)\frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

將其中之 q 代以$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$，即得

---

①如用等分法，當設法求索 $\frac{1}{n^{\alpha+1}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)$ 在 $n\to\infty$ 時之極限，讀者可試爲之。

$$(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

復因 $q\neq1$ 之故，又可寫如

$$(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{1}{q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+\cdots+1};$$

惟 $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ 在 $n\to\infty$ 時收斂於 1，由是遂得

$$\int_a^b x^{\alpha}dx=\lim_{q\to1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{1}{q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+\cdots+1}=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}).$$

［例四］ $f(x)=x^{\alpha}$ 之定積分，其中 α 為任何不等於 -1 之有理數.

假定 α 為一正有理數如 $\alpha=\frac{r}{s}$，其中 r, s 為兩正整數，如欲求

$$\int_a^b x^{\alpha}dx,$$

仍可用前例中分段之法，作種種推論，直至下一步驟：

$$\int_a^b x^{\alpha}dx=\lim_{n\to\infty}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

據前所述，$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ 在 $n\to\infty$ 時之極限為 1，故現所欲討論者，為 $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ $=\frac{q-1}{q^{\frac{r+s}{s}}-1}$ 之極限。令 $q^{\frac{1}{s}}=\tau(\tau\neq1)$，可知 q 趨於 1 時，τ 亦趨於 1；於是遂有

$$\lim_{\tau\to1}\frac{\tau^{s}-1}{\tau^{r+s}-1}=\lim_{\tau\to1}\frac{\tau^{s-1}+\tau^{s-2}+\cdots+1}{\tau^{r+s-1}+\tau^{r+s-2}+\cdots+1}=\frac{s}{r+s}=\frac{1}{\alpha+1},$$

故

$$\int_a^b x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}).$$

當 α 為正有理數時亦依然真確。若 $\alpha=-1$，則上述用以簡化幾何級數之關係不能成立，一切推論，自失其效。若 α 為其他負有理數如 $\alpha=-\frac{r}{s}$，則令 $q^{-\frac{1}{s}}=\tau$，仍可依前理推知同一結果。至 α 為無理數時此關係能否成立，當於 § 2.6.2 中詳論之.

［例五］ $\sin x$ 與 $\cos x$ 之定積分.

欲求

$$\int_a^b \sin x\,dx,$$

當求如下 n 項之和

$$S_h=h[\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots+\sin(a+nh)],$$

在 $h\to0$ 時之極限，其中 $h=\frac{b-a}{n}$。假定 h 非 2π 之倍數，將此式上下均乘以 $2\sin\frac{h}{2}$，復應用

$$2\sin u\sin v=\cos(u-v)-\cos(u+v)$$

之關係，即可將 S_h 化簡如

$$S_h=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right],$$

或
$$S_h=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right],$$

因 $a+nh=b$，故得

$$S_h=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right],$$

由是知 $h\to0$ 時，因 $\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\to1$，卽得

$$\int_a^b\sin x\,dx=-(\cos b-\cos a).$$

據同理可以推知

$$\int_a^b\cos x\,dx=\sin b-\sin a.$$

觀於以上各例，有一事最足令人注意。據定積分之義，欲求一定積分，卽求一種極限之謂，而求極限之事，就如上各例言之，顯無一普遍之法，其間有甚爲曲折繁瑣者，且因 $f(x)$ 性質之不同而求法卽隨之而異；其支離瑣碎，殊難令人滿意。推原其故，實由於缺乏理論所致。然則如何建立一高遠之理論，從而獲得普遍之方法以解決當前之問題乎？欲其事之可能，非求助於他種基本概念不爲功。故繼定積分之後所欲討論者，爲導數之概念。

例　　題

1. 求一區域之面積，其周爲拋物線 $y=2x^2+x+1$，直線 $x=1$ 與 $x=3$，及 x 軸所成者。

2. 求一區域之面積，其周爲拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 及直線 $y=3+x$ 所成者。

3. 求一區域之面積，其周爲拋物線 $y^2=5x$ 及直線 $y=1+x$ 所成者。

4. 求一區域之面積，其周爲拋物線 $y=x^2$ 及直線 $y=ax+b$ 所成者。

5. 用本節所述之法，求下列各定積分：

$$(a)\int_a^b(x+1)^\alpha dx,\quad (b)\int_a^b\sin\alpha x\,dx\quad (c)\int_a^b\cos\alpha x\,dx,$$

其中 α 爲任何整數。

6. 應用題 5 之結果及下列恆等式

$$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,\qquad \cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

以證
$$\int_a^b\cos^2x\,dx=\frac{b-a}{2}+\frac{\sin 2b-\sin 2a}{4},$$

$$\int_a^b \sin^2 x\,dx = \frac{b-a}{2} - \frac{\sin 2b - \sin 2a}{4}.$$

7. 藉§1.4.1題5之助試以等分段法求 $\int_a^b x^3 dx$ 之值.

8. 試展開括號以求 $\int_0^1 (1-x)^n dx$ 之值.

第二節 導數

2.2.1. 導數與切線

論導數之起源，亦爲一幾何問題．設有一曲線 C，任取其上一點如 P，則 C 在 P 點之切線(1)亦爲一種極限．欲求得之，當在曲線上另取一點 P_1（任何不同於 P 之點），連接 P 與 P_1，得一割線(2) $\overline{PP_1}$，然後令 P_1 沿 C 向 P 趨近，以考割線之地位有無一極限（見圖2.6）．苟其有一極限，此極限卽稱之爲 C 在 P 點上之切線．C 在 P 點上如果有一切線，無異謂 C 在 P 點有一確定之方向，蓋其在 P 點之方向，惟藉其在 P 點上之切線以識之耳（切線之存在，在此爲一假定，至此假定在何時能成立，爲另一問題．）．

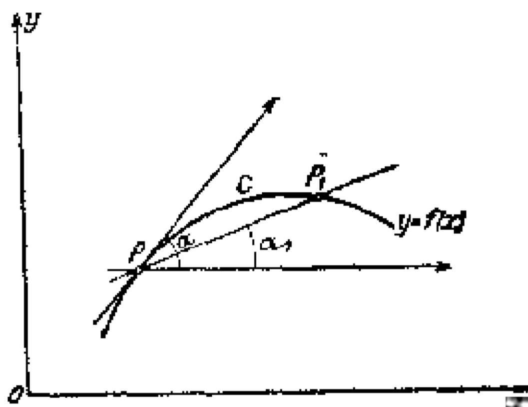


圖2.6

設以 $y=f(x)$ 爲 C 之方程式，名 $\overline{PP_1}$ 與正橫軸所成之角①爲 α_1，C 在 P 點上之切線與正橫軸所成之角爲 α，則據上所述，除垂直於橫軸之切線置而不論外，顯有

$$\lim_{P_1 \to P} \alpha_1 = \alpha$$

之關係．此意用坐標表達之，自更覺顯明．設以 $x, y(=f(x))$ 爲 P 點之坐標，$x_1, y_1(=f(x_1))$ 爲 P_1 之坐標，則因②

$$\tan\alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

(1)tangent; tangente, Tangente. (2)secant, sécante; Sekante.

①一直線 l 與橫軸所成之角，乃是將正橫軸依正向轉動後最初與 l 平行之角.

②在此自必假定 $0<|x-x_1|<\delta$，其中 δ 指定爲相當小之數，否則此種公式將無意義可言.

之故,上述之極限遂有如下之形式:

$$\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\tan\alpha;$$

由是可見切線問題亦爲極限問題之一種.

苟不問 $f(x)$ 之圖形,專就 $f(x)$ 函數言之,則上述之理,仍有可論.考 x 及 x_1 既爲自變數之任何二值,其間之差以 h 或 Δx 名之,即 $x_1-x=h=\Delta x$,則 $f(x_1)-f(x)$ 亦自有其簡明之義,其義無他,乃 x 有 Δx 之變時,y 或 $f(x)$ 因之而有之變;此 y 之變,爲 Δx 所促成者,稱之爲 Δy,而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

稱之爲 $f(x)$ 之差商(1). 此差商在 $x_1\to x$ 即 $\Delta x\to 0$ 時果有無一極限可覓,自爲一種問題. 苟其有一極限,即稱之爲 $y=f(x)$ 在 x 之微商,或在 x 之導數,以 y' 或 $f'(x)$,或 $\frac{dy}{dx}$ 等符號表而出之. 故導數之定義,可由

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

概括盡之. 觀此可知一函數 $f(x)$ 之導數 $f'(x)$ 復爲 x 之函數.

明乎導數之義,如欲求 $f(x)=x^2$ 在 x 之導數,當問

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$$

在 $x_1\to x$ 時之極限. 倘令其中 x_1 等於 x,其結果將全無意義. 故吾人先作 $x_1\neq x$ 之假定,在此假定之下將其化爲

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=x_1+x;$$

此公式在 $x_1\neq x$ 時方能成立,蓋 x_1+x 與 $\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 兩函數不能謂爲完全相等,前者在 $x_1=x$ 時有連續性,後者在 $x_1=x$ 時無確定之值. 因此吾人必先假定 $x_1\neq x$,將 $\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}$ 變爲 x_1+x 之形式,然後令 $x_1\to x$,即知 x^2 在任何 x 之導數爲

$$f'(x)=\frac{d(x^2)}{dx}=2x.$$

吾人苟立於幾何學之觀點,將 $f(x)$ 標繪之後,則其導數

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(1) difference quotient; quotient de différences; Differenzenquotient.

爲其圖形在 x 點之方向，即其切線在此之斜度．而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

則爲一割線之斜度(經過 x,y 及 $x+\Delta x,y+\Delta y$ 兩點之一割線)，徵諸以前所述，可以知之．惟所謂導數，雖與視覺分離之後，仍有其獨立之意義，正如定積分自有其解析之定義，不可與面積混爲一談．吾人既認數爲最後之基礎，當爲定積分及導數立一謹嚴之解析定義，然後據之以定面積及切線之義，其間先後本末之分，有不可不注意者．

然幾何觀覺之有助於認識，要爲無可否認之事．如將 $y=f(x)$ 標繪

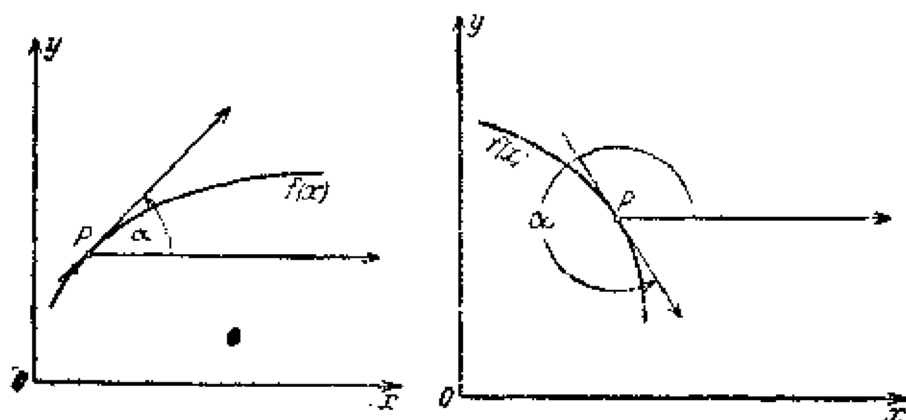


圖2.7

之後，試循其圖形依 x 趨大之方向而進．當 $f'(x)$ 爲正數時，其切線必向上，故 $f(x)$ 在此必趨大，蓋 $f(x+\Delta x)$ 在此情形之下當 Δx 爲相當小之正數時必皆大於 $f(x)$．據同理，若 $f'(x)$ 爲負數時，其切線必向下，$f(x)$ 在此必趨小，觀圖 2.7，可以見之．

苟一函數 $f(x)$ 在 x 之導數果能存在，即

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

不論 Δx 如何趨於零(不論 Δx 爲正爲負，即不論 $x+\Delta x$ 在 x 之左或在 x 之右，但求其趨於 0)**必有一極限者，則 $f(x)$ 在 x 稱之爲有可導性，或言 $f(x)$ 在 x 爲可導**．

由導數之定義，可以推知如下之定理：苟 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$，則 $\varphi'(x)=f'(x)+g'(x)$，蓋由

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

求雙方在 $h\to 0$ 之極限即可；據是以推，欲求數個函數之和之導數，但分別求各函數之導數後再求其和可矣．復次，設有 $\varphi(x)=cf(x)$，其中 c 爲一常數，則由

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

可以知 $\varphi'(x)=cf'(x)$．

2.2.2. 導數與速度

物體之運動常有速度可言，而其速度常瞬息變化．欲表達此瞬息變化之速度，非求助於極限不爲功．試考一質點在一直線上之運動，其意即其空間坐標 y（表其在直線上所處地位）隨時間 t 而變之謂，故吾人如能知 y 隨 t 而定之函數 $y=f(t)$，即可知其運動情形爲何如．苟其爲一直線性函數如 $f(t)=ct+b$，則爲一恆速運動，蓋以 t_1 及 t 表任何兩不同之時間，其速度必爲如下之差商：

$$\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}=c,$$

此差商之值不隨 t_1 或 t 而變；不論所取之 t_1 及 t 爲何如，其值始終爲 c，故其速度始終如一．然則運動之非恆速者，其速度不能爲一常數，必隨時間而變化．欲知其瞬息變化之速度，其道將若何？

設 $f(t)$ 所表達者爲一非恆速運動，則

$$\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}$$

之意義，乃自 t 至 t_1 時間內之平均速度，蓋在此時間內所行之途程爲 $f(t_1)-f(t)$，以其所需之時間除之，適爲此時間內之平均速度．由是以論，苟令 t_1 趨於 t，此差商果有一極限可趨者，此極限即稱之爲在 t 時之速度，或稱之爲在 t 時之即時速度（蓋此速度僅屬於 t 一時刻者）．故 t 時之即時速度，乃爲 $f(t)$ 之導數：

$$f'(t)=\lim_{t_1\to t}\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t},$$

在此必假定極限 $f'(t)$ 之存在,否則所謂速度亦無可論.是為導數之一種新意義,與前所論述之切線問題絲毫無涉.惟如是,吾人討論導數之時,必設法脫離幾何觀覺,務瞭然於其本身定義而後已.

運動與其速度之關係,可舉一淺例說明之.設有一自由落體,其在 t 一段時間內所墜落之途程,據實驗之結果,實與 t^2 成比例,故有

$$f(t)=at^2;$$

其中 a 為一正數.復據前論,求其導數,得 $f'(t)=2at$,於是知一自由落體之墜落速度實隨時間而增.

2.2.3. 求導數舉例

既明導數之義,即可據之以求下列各函數之導數:

[例一] 以 $y=f(x)=c$ 為始,假定 c 為一常數.因 $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ 之故,遂得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

故任何常數之導數為0,由其幾何意義言之,亦理有固然者.

[例二] 試求直線性函數 $y=f(x)=cx+b$ 之導數,必有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ch}{h}=c.$$

[例三] 試求 $y=f(x)=x^\alpha$ 之導數,假定其中 α 為一正整數.設 $x_1\neq x$,則

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^\alpha-x^\alpha}{x_1-x}=x_1^{\alpha-1}+x_1^{\alpha-2}x+x_1^{\alpha-3}x^2+\cdots+x^{\alpha-1}.$$

此式之右方為一函數,在 $x=x_1$ 時有連續性,故令 $x_1\to x$,每項均為 $x^{\alpha-1}$,而其中共有 α 項,因之遂得

$$y'=f'(x)=\frac{d(x^\alpha)}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

[例四] 若 α 為一負整數如 $\alpha=-\beta$,則例三之結果依然有效,即

$$\frac{d(x^\alpha)}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

其證如下:假定 $x_1\neq x$,$\alpha=-\beta$,$\beta>0$,又 $x\neq 0$ 則有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\dfrac{1}{x_1^\beta}-\dfrac{1}{x^\beta}}{x_1-x}=-\frac{x^\beta-x_1^\beta}{x-x_1}\cdot\frac{1}{x^\beta x_1^\beta}$$

$$=-\frac{x^{\beta-1}+x^{\beta-2}x_1+\cdots+x_1^{\beta-1}}{x_1^\beta x^\beta}$$

然後使 $x_1\to x$,即得

$$y' = -p\frac{x^{p-1}}{x^{2p}} = -px^{-p-1} = qx^{q-1},$$

是即欲證之理。

［例五］ 最後擬證明

$$\frac{d(x^{\alpha})}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$$

在 $x>0$ 而 α 為任何有理數時亦為真確。茲先假定 $\alpha=\frac{p}{q}$，其中 p 及 q 為兩正整數（若其中之一為負整數時，其證無甚大異，若 $\alpha=0$ 時，已於例一中詳之），則在 $x_1 \neq x$ 時，先求

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{x_1^{\frac{p}{q}}-x^{\frac{p}{q}}}{x_1-x}.$$

試令 $x^{\frac{1}{q}}=\xi$，又 $x_1^{\frac{1}{q}}=\xi_1$ 則

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{\xi_1^{p}-\xi^{p}}{\xi_1^{q}-\xi^{q}} = \frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\cdots+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\cdots+\xi^{q-1}};$$

然後令 $x_1\to x$，即令 $\xi_1\to\xi$，則有

$$y'=\frac{p}{q}\,\frac{\xi^{p-1}}{\xi^{q-1}}=\frac{p}{q}\,x^{\frac{p-q}{q}}=\frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}=\alpha x^{\alpha-1},$$

是即欲證之理。又 α 為負有理數時，其證如何，讀者可自求之。此類函數之導數，吾人在下章中將由另一觀點詳論之。

［例六］ 試求 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之導數。據導數之義及三角術中所習用之關係，

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\sin x\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\frac{\sin h}{h},$$

復據前已證明之

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0,$$

遂得

$$y'=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x.$$

據同理，可由

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\,\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\,\frac{\sin h}{h}$$

推知

$$y'=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x.$$

2.2.4. 函數之可導性與連續性

凡函數之可導者必爲連續，換言之，函數之連續性爲其可導性之必然結果．何以言之？苟假定 $f(x)$ 在 x 有可導性，意即

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

不論 h 如何趨於 0，必有一確定之極限，則當 $h\to 0$ 時 $f(x+h)-f(x)$ 亦趨於 0，是即 $f(x)$ 在 x 有連續性之謂．所當注意者，**此理之倒陳未能眞確，蓋函數之連續者未必可導**．吾人常見函數連續之處，其導數有未能存在者，如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 之情形即其一例．考此函數之定義，其值在 $x\leqq 0$ 時爲 $f(x)=-x$，在 $x\geqq 0$ 時爲 $f(x)=x$，其在 $x=0$ 之連續，自無疑義．然考其差商 $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 當 h 由正數趨 0 時趨於 $+1$，由負趨 0 時趨於 -1，兩者旣不相等，則其在 $x=0$ 自無極限存在（見圖 2.8）．故 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 爲不可導．

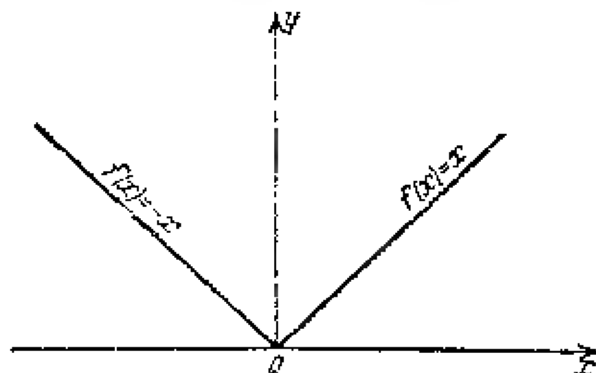
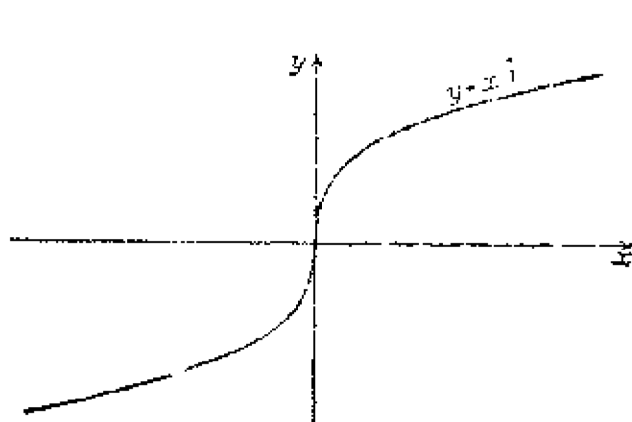


圖2.8

由是知函數之可導者必爲連續；連續者未必可導，故函數之連續性爲其可導性之必要條件而非充分條件，從可識矣．

觀上例中函數之不可導，乃由於左右兩極限之不相等．然不可導之故，亦有源於極限之未能存在者．例如 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x\neq 0$ 時之導數爲 $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，惟在 $x=0$ 時，則 $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h}=h^{-\frac{2}{3}}$．當 $h\to 0$ 顯無一極限，故 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 爲不可導，至其在 $x=0$ 固爲連續，自不待言．又如 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x\geqq 0$ 處處連續，而在 $x=0$ 爲不可導，因 $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{h^{\frac{1}{2}}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ 在 $h\to 0$ 時無一極限之故．此種不可導之情形，就其幾何意義而言，其圖形適於此與縱軸相切，觀圖 2.9 及 2.10 可以見之．



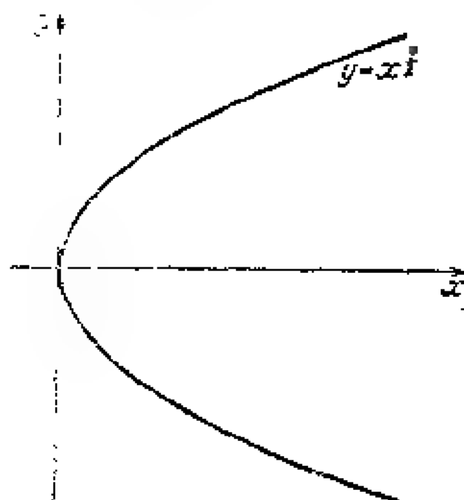


圖2.9

圖2.10

最後試一觀 $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$，其圖形如圖 2.11 所示．考其 $x=0$ 時之差商 $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h}}$ 當 h 由正趨 0 時，爲正而趨∞，當 h 由負趨 0 時，爲負而趨∞，故無極限之存在，其在$x=0$爲不可導，亦可見矣．

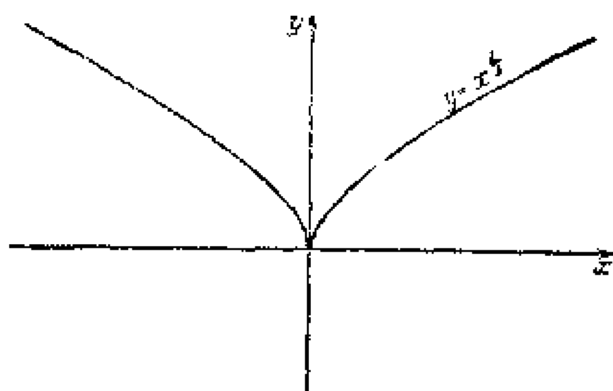


圖2.11

2.2.5. 高重導數及其意義

一函數 $f(x)$ 之導數 $f'(x)$ 必又爲 x 之函數，如 $y=x^2$ 之導數 $y'=2x$，及 $y=\sin x$ 之導數 $y'=\cos x$ 均爲 x 之函數．惟如是，吾人既得 $f'(x)$ 之後，復可據導數之義以求 $f'(x)$之導數：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

是爲 $f(x)$ 之第二重導數．若更求第二重導數之導數，卽得 $f(x)$ 之第三重導數．循是以推，有所謂 $f(x)$ 之第n重導數．爲行文之便，常稱$f(x)$爲其本身之零重導數，其導數爲其初重導數．

高重導數[1]之義，自覺淺顯而易明．如自變數所表之意爲時間 t，

(1)derivative of higher order; dérivée de l'ordre supérieure; höhere Ableitung.

則 $f(t)$ 可用以表達一物體之運動，於是 $f'(t)$ 爲其運動之速度，而 $f''(t)$爲其速度之速度，卽運動之加速度是已.

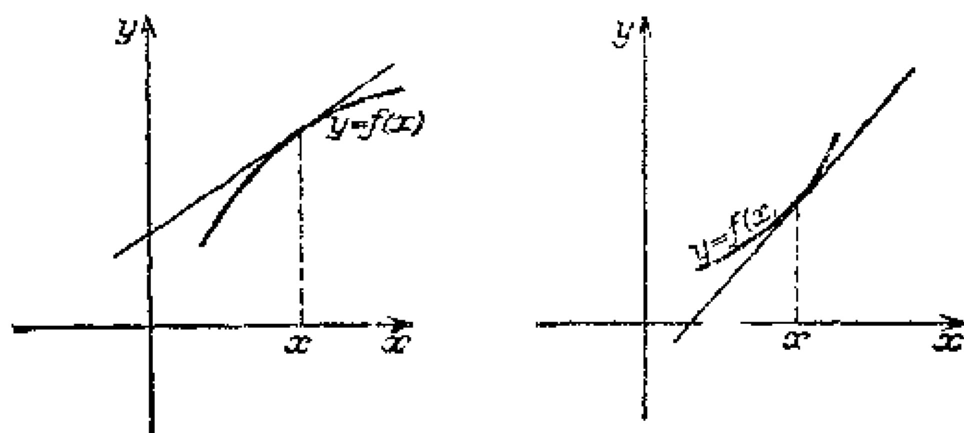


圖 2.12

復次，函數之第二重導數旣爲其初重導數之導數，則初重導數之變化情形可由第二重導數推知之. 如 $f''(x)$ 爲正數時，$f'(x)$ 必爲獨升；$f''(x)$ 爲負數時，$f'(x)$ 必獨降；前者如 $f(x)=x^2$ 其圖形居於其切線之上，謂有下凹性，後者如 $f(x)=-x^2$，其圖形居於其切線之下，謂有上凹性，讀者參閱圖 2.12 並自繪圖以明之可也

2.2.6. 導數之中值定理

導數與差商之間，有一極簡明之關係. 設有 $f(x)$之差商如

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

其中 x_1 及 x_2 爲其變程中之任何兩數，苟 $f(x)$ 在 $x_1<x<x_2$ 之間處處可導，則其間至少必有一點 ξ，其上之導數適與上列之差商相等：

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$$

是卽所謂**導數之中值定理**(1). 由觀覺言之，此理之眞確殊爲顯然. 蓋標繪 $f(x)$之後，徵諸$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$之義，實爲其一割線之方向，而 $f(x)$ 在 $x_1<x<x_2$ 之間旣處處有一切線，則觀圖 2.13，可見其間至少必有一

(1)mean value theorem; théorème des accroissements finis (théorème de la moyene); Mittelwertsatz.

點如 P，其上之切線，平行於此割線者．若 P 所處之地位無他，乃圖形中離此割線最遠之處是已；試將此割線不變其固有之方向而移動之，必至少有一次抵達切線之地位．至 P 果在何處，則非此定理所論及；所可斷言者，P 之橫坐標 ξ 必介於 x_1 及 x_2 之間，惟如是，若以 θ 表大於 0 小於 1 之一數，則 ξ 可寫如 $\xi=x_1+\theta(x_2-x_1)$．而上述之中值定理，精確言之，實有如下之內容．

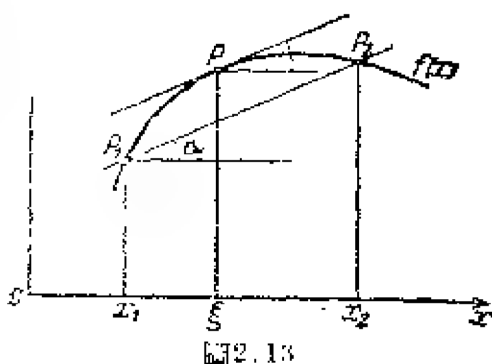


圖2.13

苟 $f(x)$ 在閉程 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 中有連續性，在開程 $x_1<x<x_2$ 中又處處可導，則必有一合於 $0<\theta<1$ 之 θ，滿足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_1+\theta[x_2-x_1]).$$

如將 x_1 寫作 x，x_2 寫作 $x+h$（兩點之距離為 h），**此式得有如下之形式：**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(\xi)=f'(x+\theta h),\quad x<\xi<x+h.$$

所當注意者，在此必假定 $f(x)$ 在其變程中處處連續且為可導，而在其變程之兩端，祇要求連續而不必要求可導．在如是假定之下，中值定理方為有效．由 $f(x)=|x|$ 在原點失其可導性，即不服從中值定理，可以見之．

導數之中值定理，由繪圖之法說明之，固極淺顯可信，然必有一嚴密之解析證明．欲證之，當先證一其他定理，即世所盛稱之 Rolle 定理，為中值定理之一特殊情形，其言曰：**苟 $\varphi(x)$ 在閉程 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 中有連續性，在開程 $x_1<x<x_2$ 中有可導性，又 $\varphi(x_1)=0$ 及 $\varphi(x_2)=0$，則其間至少必有一點 ξ，其上之導數為 0，即 $\varphi'(\xi)=0$．**蓋無論如何，$\varphi(x)$ 在其變程中必至少有一最大或最小值；為行文之便，姑假定在 ξ 有其最大值，則不論 x 在其變程中如何變化，必有 $\varphi(x)\leqq\varphi(\xi)$．故

設 h 爲任何一數，其絕對值 $|h|$ 相當小者，必有 $\varphi(\xi)-\varphi(\xi+h)\geqq 0$. 若 h 爲正，則

$$\frac{\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)}{h}\leqq 0,$$

由是令 $h\to 0$ 必得 $\varphi'(\xi)\leqq 0$; 又若 h 爲負，則

$$\frac{\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)}{h}\geqq 0,$$

由是令 $h\to 0$ 得 $\varphi'(\xi)\geqq 0$. 然則欲求兩者之並立（即不論 h 爲正爲負均能成立）必 $\varphi'(\xi)=0$ 而後可，是即欲證之理.

由是以推中值定理，其事甚易．試以 $f(x)$ 表一函數，滿足中值定理之各項假設者，吾人可據之以創一函數 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=f(x)-f(x_1)-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)],$$

此 $\varphi(x)$ 自適合 Rolle 定理之各假定，蓋 $\varphi(x_1)=0, \varphi(x_2)=0$，而其連續性與可導性一如 $f(x)$，其中 $f(x_1)$ 及 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 均爲常數．因此，必有一數 ξ，介於 x_1 及 x_2 之間者，滿足

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$$

或

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

而中值定理，於是得證矣.

中值定理之應用甚廣，茲舉其最淺之一例論之．設 $f(x)$ 在閉程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，又在開程 $a<x<b$ 中處處有一導數 $f'(x)$. 苟 $f'(x)$ 在 $a<x<b$ 中處處爲正，則 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中爲調升；苟處處爲負，則爲調降．試假定 $f'(x)>0$, x_1 及 $x_2>x_1$ 爲其閉程中之任何兩數，據中值定理應有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

其中 ξ 爲介於 x_1 及 x_2 之間之數，故據假定，其上之導數亦正，$f'(\xi)>0$. 由是遂得 $f(x_2)>f(x_1)$，是即 $f(x)$ 調升之意．至 $f'(x)<0$ 時，$f(x)$ 爲調降，其證亦同，讀者可自求之.

2.2.7. 何謂微分

考導數 $f'(x)$ 之定義，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

無異謂有一隨 $h=\Delta x$ 而趨於 0 之 ε，滿足

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\varepsilon h,$$

或

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

者.何以言之?假定 $y=f(x)$ 之差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 隨 $\Delta x\to 0$ 而斂於 $f'(x)$，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 與 $f'(x)$ 之差，試以 ε 名之，必隨 $\Delta x\to 0$ 而趨於 0.倒言之，如有一隨 $h\to 0$ 而趨 0 之 ε，滿足 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$ 者，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 與 $f'(x)$ 之差必因 $\Delta x\to 0$ 而為任意小，因之 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 必隨 $\Delta x\to 0$ 而斂於 $f'(x)$. **故 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之斂於 $f'(x)$，其意即謂有一隨 $\Delta x\to 0$ 而趨 0 之 ε，滿足**

$$\Delta y=y'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

而已.

由此關係，可以明 Δy 隨 Δx 而定之情形.試假定 x 為固定，Δx 為變數，則因 Δx 之變所引起之 Δy，實為 $f'(x)\Delta x$ 及 $\varepsilon\Delta x$ 兩者之和，前者與 Δx 成正比，後者則隨 Δx 而趨小.由是以論，**當 Δx 相當微小之時，Δy 與 $f'(x)\Delta x$ 必幾乎相等.惟如是，當 $\Delta x=h$ 甚微時，Δy 若代以 $f'(x)h$，其間之相差必無幾，因之 $f(x+h)$**（在此為 h 之一函數）**得由一直線性函數 $f(x)+f'(x)\cdot h$ 近似表達之.** 此其意義，由幾何學之觀點言之，乃 **$f(x+h)$ 在 x 鄰近之圖形可由其在 x 之切線近似替代之謂，且其近似之程度必因 h 之愈小而愈近.此幾等於 Δy 之 $f'(x)h$ 稱之為 $f(x)$ 之微分**(1).

$f(x)$ 之微分在昔日常視為一種無限小之數，而其導數 $f'(x)$ 常誤作兩無限小數之商，其立論自全無意義可言.自實數之義既明，極限之

(1) differential; différentielle; Differential.

設有一精確之基礎，所謂 $f'(x)$ 爲一種極限，而 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ 乃表達此極限之一符號而已．時至今日，吾人既已瞭然於導數之義，不妨以 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 視作 dy 與 dx 兩數之商．何以言之？據導數之定義，先確定 $f'(x)$ 爲一極限之後，令 x 固定不變而以 $\Delta x=h$ 作爲變數，然後名 h 爲自變數 x 之微分，以 dx 表之，稱 $f'(x)h=y'dx$ 爲 $y=f(x)$ 之微分，以 dy 表之：$dy=y'dx=f'(x)dx$．如是則所謂微分，爲確定之數，無所謂無限小，而就 $y'=f'(x)$ 之形式言之，則成爲兩微分之商矣．據是以言微分，自可一掃從前模糊不清之弊，至 $dy=f'(x)dx$ 之幾等於 Δy，且其差之隨 dx 而趨小，觀圖 2.14，更可瞭然．

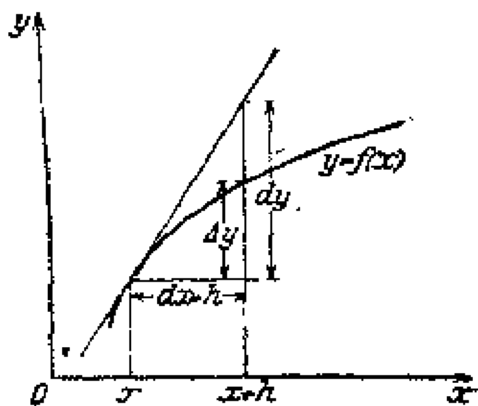


圖2.14

明乎 dy，復可據之以立高重微分之義．如爲每一 x 擇定一 h 之後，則 $dy=hf'(x)$ 實爲 x 之一函數，因之復可求其微分，即 y 之二重微分，以 $d^2y=d^2f(x)$ 表之．考 x 如有 h 之變，則 $dy=hf'(x)$ 因之而有之變必爲 $h[f'(x+h)-f'(x)]$，而 $f'(x+h)-f'(x)$，即所謂 $\Delta f'$，據前所論，幾與 $hf''(x)$ 相等，故 y 之二重微分必爲 $h^2f''(x)$，遂有 $d^2y=h^2f''(x)$．循是以推，可知 y 之三重，四重 $\cdots$ 微分爲 $h^3f'''(x)$，$h^4f^{\text{IV}}(x)$ $\cdots$，自無待論．

數學中之概念，就其在自然科學中之應用言之，常認爲近於理想而不切實際．如物體之長，果爲一有理數或無理數，殊無深究之必要，亦無深究之可能；但求能獲得一近似之有理數以表達之，於事已足．故數之爲有理或無理，在應用上常視爲無足重輕，而極限之求索，按之實際，亦爲一種理想而已．雖然，吾人欲對自然現象有所認識，非求助於數學中之理想不爲功．苟不知運用精確理想之概念以治科學，則繁複者無從化簡，結果必至一無所成．如應用導數以定即時速度，即可知其每一時之速度爲何如，以視某時間內之平均速度，隨時間之起訖而異者，其繁簡不可以道里計．觀此一例，可見理想雖不能實現，而理想之有助於認識，且爲認識之必要利器，要爲不可否認之事．欲論其詳，當先闡明數學之本質及其與經驗所發生之關係，其說甚長，姑置不論．惟爲求理論之透徹明瞭，有應略加申述者．在應用時如導數與差商相差幾希，則兩者可以互

相替代，如物理學家、化學家及工程師等在其研究所要求之精確限度內，可將導數與差商併而為一，或視 Δy 與 dy 為無足分別，甚至稱 dx 及 $dy=f'(x)dx$ 為"無限小"亦無不可。此所謂"無限小"在自然科學中自有其確切之意義，其值為恆定，且不等於零，惟小於其特殊研究時所要求之精確限度，如小於波長幾分之幾，或小於兩電子間之距離等皆是。此理想與事實之問題，讀者幸深思而自得之也。

例　題

1．"$f(x)$ 在 $x=\xi$ 點上為不可導"一語，如舍"不可導"而不用，其意當如何說明之。

2．直接由導數之定義，求下列各函數之導數：

(a) $\frac{1}{x+1}$．　(b) $\frac{1}{x^2+2}$．　(c) $\frac{1}{2x^2+1}$．　(d) $\frac{1}{\sin x}$．

(e) $\sin 3x$．　(f) $\cos ax$．　(g) $\sin^2 x$．　(h) $\cos^2 x$．

3．據中值定理，求下列各函數之中值 ξ，並標繪以明之：

(a) $2x$．　(b) x^2．　(c) $3x^2+2x$．　(d) $\frac{1}{x^2+1}$．　(e) $x^{\frac{1}{3}}$．

4．試示中值定理對於下列各函數在其中兩點為一正一負時（如 $x_1=-1, x_2=1$）未能有效：

(a) $\frac{1}{x}$．　(b) $|x|$．　(c) $x^{\frac{2}{3}}$．

並標繪以明之。

第三節　不定積分之定義，微積分學之基本定理

微積分學之成立，實由於積分與導數間相互關係之發明。此關係為何如，當於本節中詳論之。

2.3.1.　何謂不定積分

一函數 $f(x)$ 之定積分如

$$\int_a^b f(x)dx,$$

其中 a 及 b 為兩固定數者，自為一常數。若假定其下界 a 為定，其上界 b 為不定，並將不定之上界改用 x 表之，其積分變數改由 u 表之，則

$$\int_a^x f(u)du=\Phi(x)$$

自爲其上界 x 之函數. 此函數 $\Phi(x)$ 稱之爲 $f(x)$ 之**一不定積分**[1]. 論其幾何意義,爲一區域之面積,其上由 $f(u)$,其下由横軸之一段,左右由 $u=a$ 及 $u=x$ 兩直線相圍而成者(見圖2.15);至其值之爲正爲負,則由 a 與 x 之地位卽 $x \gtrless a$ 而定,其法已見第一節. 所當注意者,$f(x)$之不定積分甚多,此 $\Phi(x)$ 不過其中之一而已. 何以言之?設任擇一異於 a 之常數 α 則

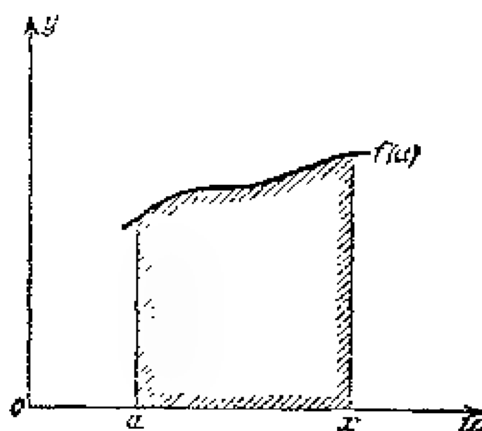


圖2.15

$$\int_{\alpha}^{x} f(u)du = \Psi(x)$$

又爲 $f(x)$之一不定積分. 據是以觀,$f(x)$ 之不定積分得有無限多,惟其中每兩者之差必爲一常數;蓋假定 a 及 α 爲任何兩常數,又 $a<\alpha$, 則

$$\int_{a}^{x} f(u)du - \int_{\alpha}^{x} f(u)du = \int_{a}^{\alpha} f(u)du,$$

因 $\int_{a}^{\alpha} f(u)du$ 爲一常數,遂有

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \text{常數}.$$

復次,苟假定下界爲變,上界不變,則如下之一不定積分

$$\int_{x}^{b} f(u)du$$

爲其下界之一函數,其理同前,可不贅述.

2.3.2. 不定積分之導數

設 $f(x)$ 爲一連續函數,則 $f(x)$ 之一不定積分如

$$\int_{a}^{x} f(u)du = \Phi(x)$$

爲其上界 x 之一函數, 已如上所述矣. 雖如是,其導數 $\Phi'(x)$ 之存在與否,爲一頗足研討之問題. 吾人研討之結果,得下列定理:

---

(1)indefinite integral; intégrale indéfinie; unbestimmtes Integral.

一連續函數 $f(x)$ 之不定積分 $\Phi(x)$ 必存在有一導數，且其導數適為 $f(x)$，換言之：

$$\Phi'(x)=f(x);$$

誠如是，若獲得 $f(x)$ 之一不定積分後，復求其導數，必仍歸於 $f(x)$. 是乃微積分學中基本要理，欲證之殊覺易易.蓋據導數之義，既知

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h},$$

欲問此極限之存否，當先考

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_a^{x+h}f(u)du-\int_a^x f(u)du=\int_x^{x+h}f(u)du,$$



圖2.16

此其意義，由幾何觀點言之，為介於 x 及 $x+h$ 間之面積，觀圖 2.16，可以知之.惟 $f(x)$ 在 x 及 $x+h$ 之間必有其最大及最小值；假定 $f(x)$ 在 x_1 之值最小，在 x_0 之值最大，則

$$hf(x_0)\geqq\int_x^{x+h}f(u)du\geqq hf(x_1)$$

或

$$f(x_0)\geqq\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(u)du\geqq f(x_1)$$

之真確，至為顯然.由是令 $h\to 0$，則 x_0 及 x_1 各趨於 x，於是據 $f(x)$ 之連續性，可知 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 皆斂於 $f(x)$；因此遂得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(u)du=f(x),$$

是即欲證之理.此理亦可直接由定積分之解析定義推知之.蓋

$$\int_x^{x+h}f(u)du=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}f(u_\nu)\Delta u_\nu,$$

其中自 x 至 $x+h$ 之一線段由 $u_0=x, u_1, u_2, \cdots, u_n=x+h$ 諸點分作 n 段，又 $\Delta u_\nu=u_\nu-u_{\nu-1}$，$\frac{\Delta u_\nu}{h}$ 不論 h 為正為負必為正數，惟 $h\to 0$

時，Δu_ν之絕對値皆趨於0.復因$f(x_0)\geqq f(u_\nu)\geqq f(x_1)$及$\Sigma\Delta u_\nu=h$之故，可知
$$f(x_0)\geqq\frac{1}{h}\Sigma f(u_\nu)\Delta u_\nu\geqq f(x_1);$$
然後令$h\to 0$，卽可由是而推得欲證之理.

自$\Phi(x)$之可導性得證之後，卽可從而推知下列定理：**一連續函數$f(x)$之不定積分**

$$\int_a^x f(u)du=\Phi(x)$$

爲其上界之一連續函數，蓋一函數之連續性爲其可導性之必然結果也.

上述之理旣明，設有一連續函數$f(x)$之不定積分如
$$\int_x^b f(u)du=\varphi(x),$$
隨其中之下界而變者，則必有
$$\varphi'(x)=-f(x);$$
何則，因
$$\int_x^b f(u)du=-\int_b^x f(u)du$$
之故，復應用前證之理而可以知之.

2.3.3. 原函數；不定積分之普遍定義

數學中所論之法，恆有一相逆法與之對峙，如加減兩法相逆，乘除兩法亦相逆.與前所論之求導數問題相對峙者則有如下之問題：設有一$f(x)$，如何求$F(x)$，可滿足
$$F'(x)=f(x)$$
者？前之所謂求導數，其已知者爲$F(x)$，所欲求者爲$f(x)$.今已知$f(x)$而欲求$F(x)$，其問題適與前相逆.吾人稱$F(x)$爲$f(x)$之**原函數**(1)(意謂$f(x)$發源於$F(x)$，由$F(x)$求導數而得之)；**故與前相逆之問題無他，求索$f(x)$之原函數而已.**

旣明前段所述之理，則求原函數之問題可稱已有相當之解決.何以言之？據前所論，$f(x)$之一不定積分如$\int_a^x f(u)du=\Phi(x)$爲其上界x

(1)primitive function; fonction primitive; primitive Funktion.

之可導函數，且其導數適爲 $f(x)$；因此之故，此不定積分必爲 $f(x)$ 之一原函數無疑。所難者，$f(x)$ 之原函數是否僅此一個，苟除此以外，尚有其他，自必一一覓得之而後可。以意測之，$f(x)$ 之原函數，必不僅此 $\varphi(x)$ 而已，試加一常數 C（不隨 x 而變之數）於此，則 $\varphi(x)+C$ 之導數依然爲 $f(x)$，即可見矣。然則吾人求索 $f(x)$ 之一切原函數，當先從事下列定理之證明。此定理因所關重大，常奉爲微積分學中之基本定理，其言曰：

一函數 $f(x)$ 之任何兩原函數 $F_1(x)$ 及 $F_2(x)$ 相差必爲一常數：

$$F_1(x)-F_2(x)=c;$$

因此，吾人如已得一原函數 $F(x)$，則其他任何原函數必可歸於

$$F(x)+c$$

之形式，但選擇一適當之 c 可矣。倒言之，如 $F(x)$ 爲一原函數，則不論 c 爲任何常數，$F_1(x)=F(x)+c$ 必爲 $f(x)$ 之一原函數。 若 $F(x)$ 果爲一原函數，則 $F(x)+c$ 亦然，其理至爲顯明，蓋由

$$\frac{[F(x+h)+c]-[F(x)+c]}{h}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

可以推知

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=\lim_{h\to 0}\frac{[F(x+h)+c]-[F(x)+c]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)=f(x).$$

至兩原函數 $F_1(x)$ 及 $F_2(x)$ 之差必爲一常數，可證之如下：試名其差爲 $G(x)$，

$$F_1(x)-F_2(x)=G(x),$$

然後求 $G(x)$ 之導數，

$$G'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}-\frac{F_2(x+h)-F_2(x)}{h}\right];$$

復據假定 $F'_1(x)=F'_2(x)=f(x)$，故不論 x 之値爲何如，當 $h\to 0$ 時，必由是而可以推知

$$G'(x)=0.$$

惟一函數之導數處處爲 0 者必爲常數。蓋據中値定理，試以 x_1 及 x_2 表

任何兩不同之數($x_2>x_1$)，既知

$$G(x_2)-G(x_1)=(x_2-x_1)G'(\xi),\qquad x_1<\xi<x_2;$$

若 $G'(x)$ 處處爲 0，則在 ξ 點亦爲零：$G'(\xi)=0$，於是遂得 $G(x_2)-G(x_1)=0$. 由是以觀，不論 x_1 及 x_2 爲如何兩不同之數，必有 $G(x_2)=G(x_1)$，是即 $G(x)$ 爲一常數之謂. 此理由幾何觀覺言之，固顯而可見，蓋一函數之導數處處爲 0 者，其圖形在在有一平行於橫軸之切線，故爲一常數，不待證而自明.

此理得證之後，復鑒於前段所述，即可推知一重要結果：

一函數 $f(x)$ 之任何原函數 $F(x)$ 得有如下之形式：

$$F(x)=c+\Phi(x)=c+\int_a^x f(u)du,$$

其中 c 及 a 所表者爲常數. 倒言之，不論 c 及 a 爲任何常數，凡有此形式之函數必爲 $f(x)$ 之原函數.

讀者於此，或不無感想，以爲式中之 c，似可不必附加，蓋將 a 改易，即有一常數產生. 此意似是而實非，蓋所當注意者，苟無 c，則此式常不能將一切原函數包羅盡之. 例如 $f(x)=0$ 之不定積分，不問其下界爲何如，均爲 0 無疑，然其原函數必藉一任意常數表達之而後可. 又如 $f(x)=\sqrt{x}$，其值在 x 爲正時均爲確定，若求其不定積分，則有

$$\Phi(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}},$$

故不論 a 爲任何正數，$\Phi(x)$ 必由 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 加一負數而得，因 $-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ 爲一負數之故；然 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$ 未始非一原函數，固未嘗包含於其中. 循是以觀，欲爲原函數求一普遍形式，其中之任意常數 c，有不可省略者焉.

明乎上述之關係，吾人擬爲不定積分立一普遍之定義：**凡函數之有 $c+\Phi(x)=c+\int_a^x f(u)du$ 形式者稱之爲 $f(x)$ 之不定積分；其意乃以 $f(x)$ 之原函數作爲不定積分，故自此以後，對兩者不復有所分辨.** 事雖如此，吾人不可不瞭然於積分概念實起於求索一種極限，而此極限之求索與求導數法之還原，就其性質觀之，爲兩完全不同之問題. 然其間竟有如

是之關係，不可謂非一大發明．此關係發見之後，乃即稱原函數爲不定積分，自無不可；惟其中層累曲折之經過，不可不深思而熟察之也．

復次，吾人尙擬爲不定積分採用一種符號如

$$F(x)=c+\int_a^x f(u)du=\int f(x)dx$$

將其中 c 及 a 省略，而復以 x 表積分變數，故 $\int f(x)dx$ 之意，爲一函數，其導數爲 $f(x)$ 者，簡言之，爲 $f(x)$ 之一不定積分或一原函數而已．

2.3.4. 定積分之計算

一函數 $f(x)$ 之定積分如

$$\int_a^b f(x)dx,$$

其中 a 及 b 爲兩定界者，實爲一種極限，前在 § 2.1.1 已詳述其義，且曾舉淺例以說明之．時至今日，吾人已有一普遍之法，藉以求索此種極限．苟吾人能獲得 $f(x)$ 之一原函數 $F(x)=\int f(x)dx$——如何獲得，爲另一問題，當於下章中詳之，—— 則其定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 之計算，事甚簡易．何以言之？據前所論，$f(x)$ 之一不定積分如

$$\Phi(x)=\int_a^x f(u)du$$

亦爲 $f(x)$ 之一原函數，故與 $F(x)$ 相差爲一常數：

$$\Phi(x)=F(x)+c,$$

因 $\Phi(a)=0$ 之故，可知 $c=-F(a)$，於是知

$$\Phi(x)=F(x)-F(a),$$

由此關係，令其中 $x=b$，即得

$$\int_a^b f(u)du=F(b)-F(a).$$

據是以觀，欲求索 $f(x)$ 由 a 至 b 之定積分，但求 $f(x)$ 之一原函數 $F(x)$，將其中之 x 先代以 b，後代以 a，而取其差 $F(b)-F(a)$ 即得；爲求簡明之故，此 $F(b)-F(a)$ 常寫如 $F(x)\Big|_a^b$，故上述結果，可概括言之如下：

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

考此式之意義，因$F(x)$爲$f(x)$之一原函數之故，換言之，因$F'(x)=f(x)$，亦可寫如

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b \frac{dF}{dx}dx;$$

而此關係之眞確，不難直接證之．試將$a\leqq x\leqq b$之線段分作n段，依次以$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \cdots, \Delta x_n$表之．無論其分段如何實施，必有
$\Sigma\frac{\Delta F}{\Delta x_\nu}\Delta x_\nu=\Sigma\Delta F=F(b)-F(a)$，故在$n\to\infty$時，其極限爲$F(b)-F(a)$：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta F}{\Delta x_\nu}\Delta x_\nu=F(b)-F(a).$$

復次，設以ξ_ν表一數，居於Δx_ν之中者，則據中值定理，可知
$\frac{\Delta F}{\Delta x_\nu}=F'(\xi_\nu)$由是得$\Sigma\Delta F=\Sigma\Delta x_\nu F'(\xi_\nu)$，然後據定積分之義，如令$n\to\infty$，必有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta F}{\Delta x_\nu}\Delta x_\nu=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}F'(\xi_\nu)\Delta x_\nu=\int_a^b F'(x)dx,$$

而如上之關係於是遂得證矣。

2.3.5. 舉例

一函數之定積分，不定積分及其導數間之關係已如上述；玆更舉例觀之，務求透澈明瞭而後已．

〔例一〕 據§2.1.3例四，若$0<a<b$，α爲不等於-1之有理數時，巳知

$$\int_a^b x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1});$$

今以x表其上界，u表其積分變數，則

$$\int_a^x u^\alpha du=\frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}).$$

由是據基本定理可以斷定

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha+1}=(\alpha+1)x^\alpha$$

之成立．此式在$x>0$，$\alpha=-1$時亦依然眞確，可直接代入而知之．如是獲得之結果，與§2.2.3例五所論完全符合．

〔例二〕 據§2.1.3例五，旣知

$$\int_a^x \cos u\,du=\sin x-\sin a,$$

由是據基本定理得知

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x,$$

與§2.2.3例六又相符合.

［例三］ 據基本定理所論，可知 $f(x)$ 之不定積分為 $F(x)$，則 $F(x)$ 之導數為 $f(x)$，以式表之：

$$F(x)=\int f(x)dx,\qquad \frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

明乎此，遂得由

$$\frac{dc}{dx}=0\qquad 以知\qquad \int 0\,dx=c,$$

$$\frac{d(ax+b)}{dx}=a\qquad 以知\qquad \int a\,dx=ax+b.$$

或由

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c\qquad 以知\qquad \frac{dx^2}{dx}=2x,$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x\ 以知\qquad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x.$$

例　題

1. 由本章第二節例題2,3所得之 $f(x)$ 應用基本定理，寫出 $\int f(x)dx$.

2. 求　(a) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$.　　(b) $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

3. 應用例題2，試由定積分之定義，證明

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{1}{2}.$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{(n^2+1^2)^2}+\frac{2}{(n^2+2^2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n^2)^2}\right]=\frac{1}{4}.$$

第四節　繪圖求積分之法

函數 $f(x)$ 之不定積分或原函數 $F(x)$ 得由一面積表而達之，已如前所述矣．惟既為一函數，自可設法標繪其圖．考 $F(x)$ 之性質，為一如是之函數，其導數為 $f(x)$ 者；用幾何術語言之，為一如是之曲線，其切線處處為 $f(x)$ 所規定．此種曲線之多，不可勝舉，因其中每兩者相隔為一常數，故吾人如能標繪其一，卽可由是平移而得其他．因此之故，當在 x 之變程中任擇一點，以此為起點而標繪 $F(x)$；如 $x=1$ 屬於 x 變程之中，不妨選擇一點，其坐標為 $x=1,\ y=0$ 者．吾所欲討論之問題，為如何

繪一曲線,經過 $x=1, y=0$, 而其切線處處受 $f(x)$ 之規定.此曲線可以逐步追近之法繪成之.試先將橫軸上之線段由 $x=1$, x_1, x_2, x_3, $\cdots$ 諸點分作若干段,每段之長不必相等,復在各分點立平行於縱軸之直線如 $x=x_1$, $x=x_2$ $\cdots$.然後經過 $x=1, y=0$ 作一直線,其方向爲 $f(1)$;此直線自與

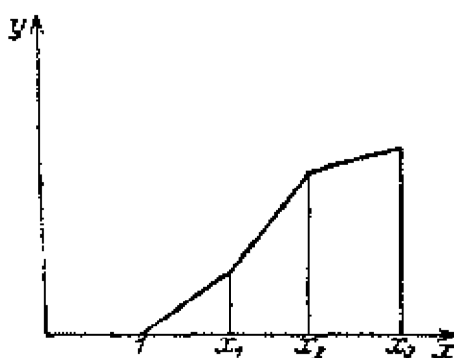


圖 2.17

$x=x_1$ 相交,經此相交點又作一直線,其向爲 $f(x_1)$ 者;更求其與 $x=x_2$ 之相交點作一直線,其向爲 $f(x_2)$ 者;$\cdots$ 如是逐步進行,卽可得一折線.此折線與 $F(x)$ 之圖形,就其在各分點之向論之,已彼此相同;然則使各分點之相隔愈趨愈近,吾人所欲繪之 $F(x)$,即可近似得之矣.

上述之法在實施時或有其不甚便利之處,倘可設法改進之.細考上法成功之關鍵,要不外作種種直線,其向爲 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, $\cdots$ (其中 x_1, x_2, x_3 $\cdots$ 表線段之分點)而已.此事可用下法化簡行之.試先標繪 $f(x)$, 又在 x_1, x_2, x_3, $\cdots$ 各分點立平行於縱軸之直線,則 $f(x)$ 在各分點之縱坐標可在此種直線上一望而知,蓋其上由 $y=0$ 至 $y=f(x)$

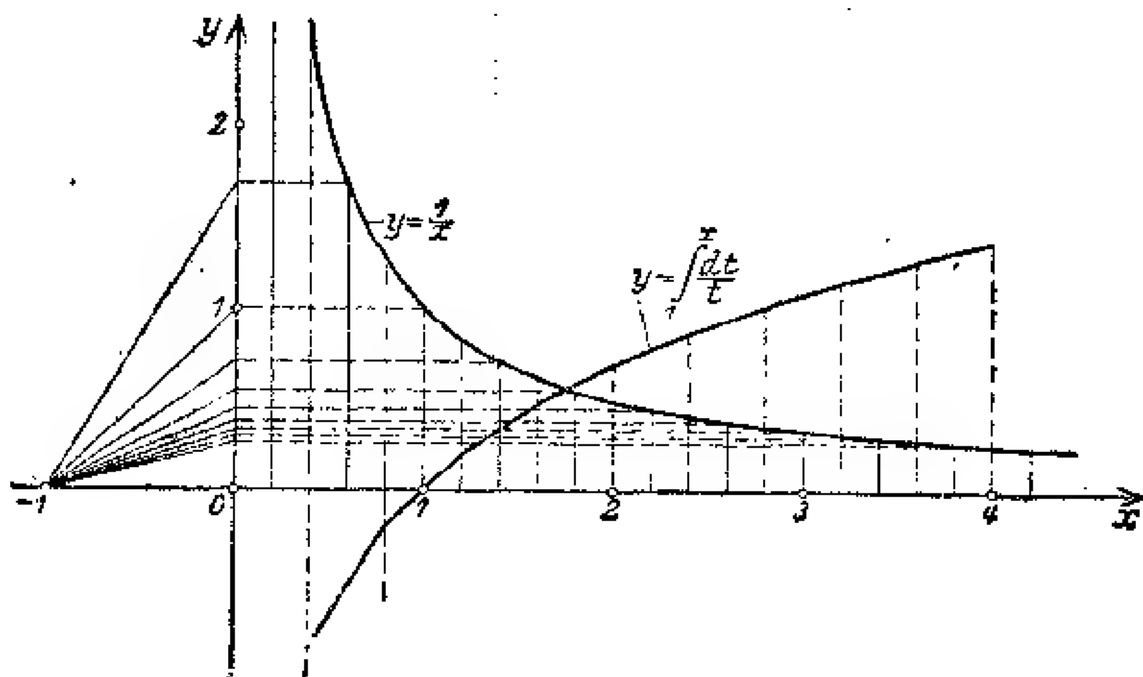


圖2.18

之線段卽表達 $f(x)$ 在任何 x 之縱坐標也．將此種線段一一投影於縱軸，自可在縱軸上得 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots$ 諸點，令各點與 $x=-1$，$y=0$ 一點相連，卽得種種直線，其向爲合於吾人所要求之 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots$．旣得此，其他問題自迎刃而解矣．

例如欲繪 $\int_1^x \frac{dt}{t}$ 時，經過 $x=1, y=0$ 者，可先標繪 $f(x)=\frac{1}{x}$，又在橫軸上離 $x=1$ 不遠之處取一點 $x=x_1$，立平行於縱軸之直線，卽於其上得一線段，表 $f(x)$ 在 x_1 之縱坐標 $f(x_1)=\frac{1}{x_1}$．然後將此投影於縱軸，得 $x=0, y=\frac{1}{x_1}$．令此點與 $x=-1, y=0$ 相連，得一直線，其向適爲 $f(x_1)=\frac{1}{x_1}$．依此類推，卽得圖 2.18，讀者幸細玩而自得之．又圖 2.19 所示者，爲 $F(x)=\int_0^x t\,dt-\frac{1}{2}$ 之近似圖，係根據 $y=x$ 之圖，應用上法繪成．據上述之理，乃有求積分器之創造．所謂求積分器，爲一如是之工具，當其中一針沿 $f(x)$ 進行時，其他一針從而描繪一圖 $F(x)$，其間適有 $F'(x)=f(x)$ 之關係．至於積分後出現之任意常數，由於求積分器最初安置地位之不同，卽可解釋之．其詳可參閱專書，如 B. Williamson Integral Calculus, pp. 214–217 (Longmans); Dictionary of Applied Physics, Vol. III, pp. 450–457 (Macmillan, 1923); A. Galle, Mathematische Instrumente, IX. Abschnitt (Leipzig, 1912).

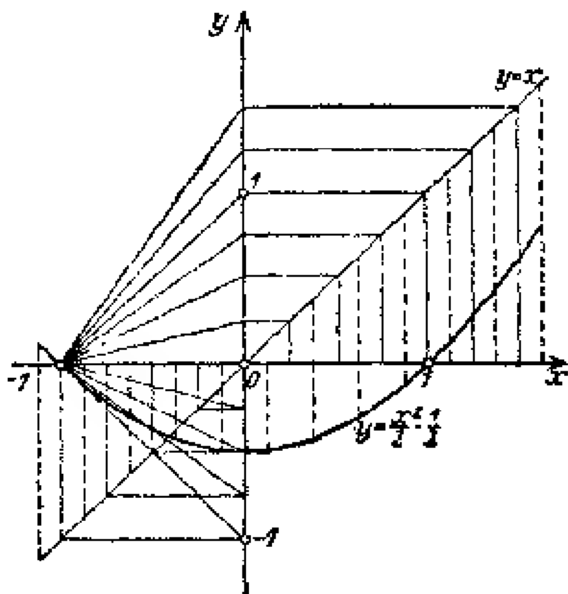


圖2.19

例　題

1．設分段之長 $h=\frac{1}{10}$，試以繪圖求積分之法作下列各積分曲線：

(a) $\int_0^x x^2dx\ (0\leqq x\leqq 2)$.　　(b) $\int_1^x \frac{1}{x^2}dx\ (1\leqq x\leqq 2)$.

(c) $\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx\ (0\leqq x\leqq 1)$.　　更求 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 之值．

第五節　再論積分與導數之關係

積分與導數之關係，復可由物理學概念闡明之．

空間內物質之分佈，常假定爲連續而不必均勻．如豎立地面上一直

柱體內之空氣卽其一例;試假定柱底之面積為 1，向上豎立之一直線作為 x 軸,地面上之一點作為原點,空氣之分佈卽由此量起.如是則介於 0 及 x 兩點間之總量得由一函數 $F(x)$ 決定之.設 x 由 x_1 變至 x_2,則其間質量之變化為

$$F(x_2)-F(x_1),$$

其為正為負亦隨之而定;當其中 x_1 與 x_2 對易時,則正負更迭.

明乎是,可知在 x_1 至 x_2 之間,每單位長之平均質量為

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1};$$

苟假定 $F(x)$ 為可導，則當 $x_2\to x_1$ 時，此平均質量卽斂於 $F'(x_1)$，而 $F'(x_1)$ 之值完全視 x_1 之地位而定.由是以觀,物質分佈之總量 $F(x)$ 與其分佈之密度 $f(x)$，其間實有如下之關係:

$$F(x)=\int_0^x f(u)du,\quad f(x)=F'(x);$$

換言之,總量為密度之積分,而密度為總量之導數耳.

此種關係在物理學中幾在在皆是.如欲將某物質單位質量之溫度自 t_0 增至 t 度,所需之熱量以 $Q(t)$ 表之，則當溫度由 t_1 變至 t_2，其所需之熱量為 $$Q(t_2)-Q(t_1);$$

故在 t_1,t_2 之間每一度所需之平均熱量必為

$$\frac{Q(t_2)-Q(t_1)}{t_2-t_1}.$$

試假定 $Q(t)$ 為可導,則有下列極限:

$$\lim_{t_1\to t}\frac{Q(t)-Q(t_1)}{t-t_1}=q(t),$$

是卽所謂某物質之比熱(物質之比熱恆為溫度之函數).故比熱與總熱量之間復有

$$\int_a^b q(t)dt=Q(b)-Q(a),$$

是前者又為後者之一導數.他如電荷密度與電荷，壓力強度與總壓力，其間關係亦復如是.

物理學中總量比量之對峙，幾隨處可見．惟吾人五官之所感，實驗之所及者，實爲總量而非比量．因此之故，總量不妨稱爲原始之物（原函數之名，或由於此）；由是施以剖析之功，復假設有導數存在，而後始有比量之認識，故比量絕非直接可以經驗者也．

第六節　積分估值法

定積分之值，常可近似估計之，因之有所謂積分估值法；其最簡者以如下之定理爲根據，即世所謂稱積分學之中值定理，與前所論導數之中值定理互相對峙，各佔一重要地位者．

2.6.1. 積分之中值定理

設一連續函數 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中無處爲負（處處爲正或爲零），則其定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

之值，亦不能爲負．據同理，若 $f(x)$ 在如上之變程中無處爲正（處處爲負或零），則其定積分不能爲一正數．是皆由定積分之定義可以知之，無待贅述者．惟如是，設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 爲兩連續函數，在 $a\leqq x\leqq b$ 中滿足

$$f(x)\geqq g(x)$$

者，則

$$\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$$

之成立，自無疑義；蓋 $f(x)-g(x)$ 在同一變程中不能爲負，因之遂有

$$\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\geqq 0$$

故也．復次，如以 M 表 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中之最大值，m 表其在同一變程中之最小值，則 $M-f(x)$ 及 $f(x)-m$ 在此不能爲負，因之據前所論必有

$$\int_a^b m\,dx\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b M\,dx.$$

復因

$$\int_a^b m\,dx=m\int_a^b dx=m(b-a),$$

$$\int_a^b M\,dx=M\int_a^b dx=M(b-a)$$

之故，遂得 $$m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq M(b-a);$$

故必有一數 μ，不大於 M 又不小於 m 者，如

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a),\qquad m\leqq\mu\leqq M.$$

此 μ 果爲何數，自未能定；惟據 $f(x)$ 之連續性及 $m\leqq\mu\leqq M$，可知至少必有一 ξ，介於 a 及 b 之間，當 $x=\xi$ 時，$f(x)$ 之值適爲 μ 此 ξ 果在何處，亦不必加以確定，與前論導數之中値定理時正同，惟至少必有一如是之 ξ，則可斷言耳．因此之故，遂得 $\mu=f(\xi)$，故必有一數 ξ，滿足

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),\qquad a\leqq\xi\leqq b,$$

是卽**積分之中值定理**．

上述定理可加以擴充而出之以如下之形式：**若 $f(x)$ 及 $p(x)$ 兩函數在 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，又 $p(x)\geqq 0$，則必有一 ξ 如 $a\leqq\xi\leqq b$，足數**

$$\int_a^b f(x)p(x)dx=f(\xi)\int_a^b p(x)dx$$

之成立．蓋令 M 及 m 仍保持原義，則 $mp(x)\leqq f(x)p(x)\leqq Mp(x)$，故據前所論，必有

$$m\int_a^b p(x)dx\leqq\int_a^b f(x)p(x)dx\leqq M\int_a^b p(x)dx,$$

而欲證之理，可由是得之矣．

2.6.2. 中値定理之應用

既明前段所論，可從而推想一極淺顯之事實：苟 $f(x)$ 在其變程中之變化處處均甚微者，則其定積分因而產生之變化亦必甚微．精確言之，苟 $f(x)$ 及 $g(x)$ 相差之絕對值在 $a\leqq x\leqq b$ 全程之中不能超過一數 ε：

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,$$

則其定積分相差之絕對值必不能超過 $\varepsilon(b-a)$：

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

或以下式表之：

$$-\varepsilon(b-a)+\int_a^b g(x)dx<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon(b-a)$$

此理如繪圖顯示之,固無可致疑.蓋標繪 $f(x)$ 之後,復繪兩曲線,在在平行於 $f(x)$ 者,得 $f(x)+\varepsilon$ 及 $f(x)-\varepsilon$(見圖 2.20);此兩曲線相隔為一帶形,而 $g(x)$ 據假定實居於其中.試就兩方面積觀之,其一以 $f(x)$ 為界,其他以 $g(x)$ 為界者,兩者相差必小於帶形面積之半,而此帶形面積實為

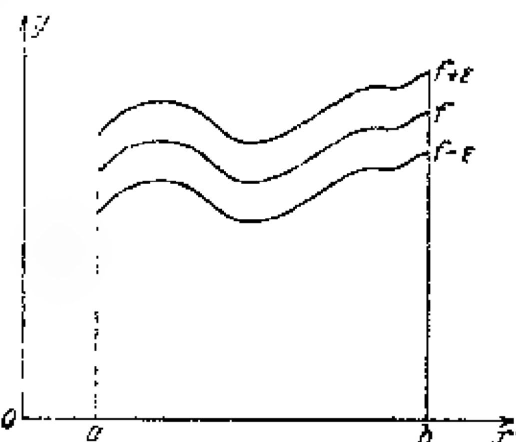


圖2.20

$$\int_a^b[f(x)+\varepsilon]dx-\int_a^b[f(x)-\varepsilon]dx=2\varepsilon(b-a),$$

於是其理之真確,至為顯而可見.欲證之,但由假定 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$

或
$$-\varepsilon+g(x)<f(x)<\varepsilon+g(x),$$

據前述之理,可以推知

$$\int_a^b[-\varepsilon+g(x)]dx<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b[g(x)+\varepsilon]dx,$$

由是得

$$-\varepsilon(b-a)+\int_a^b g(x)dx<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon(b-a),$$

是即欲證之理.

明乎上述之理,有一重要問題,將藉之而得解決.如 α 為一有理數不等於 -1 者,則 x^α 之一原函數為 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$,已如前所證矣.今假定 α 為一無理數,其結果當為何如.試令 $0<a<b$,而求 $\int_a^b x^\alpha dx$ 之值.α 既為一無理數,可視為一有理數序 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ 之極限:$\alpha=\lim\alpha_n$,其中 α_n 無一為 -1.如是所謂 x^α,乃
$$x^\alpha=\lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}$$
之意;換言之,不論 ε 為任何小之正數,但令 n 相當大即足致 $|x^\alpha-x^{\alpha_n}|<\varepsilon$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中處處成立.試名 $\alpha_n-\alpha=\delta_n$,則

$$|x^\alpha-x^{\alpha_n}|=|1-x^{\delta_n}|x^\alpha,$$

復因 x^α 之獨行性,故 x^α 之值在 a^α 與 b^α 之間,由是知 $x^\alpha\leqq a^\alpha+b^\alpha$.據同理,因 $1-x^{\delta_n}$ 之值介於 $1-a^{\delta_n}$ 及 $1-b^{\delta_n}$ 之間,遂有 $|1-x^{\delta_n}|\leqq(|1-a^{\delta_n}|+|1-b^{\delta_n}|)$.於是由上式得知
$$|x^\alpha-x^{\alpha_n}|=x^\alpha|1-x^{\delta_n}|\leqq(a^\alpha+b^\alpha)(|1-a^{\delta_n}|+|1-b^{\delta_n}|).$$

惟 $\lim_{n\to\infty}|a^{\delta_n}|=1$, $\lim_{n\to\infty}b^{\delta_n}=1$;換言之,

$$\lim_{n\to\infty}|1-a^{\delta_n}|=0,\ \lim_{n\to\infty}|1-b^{\delta_n}|=0,$$

故當 n 相當大時,不論 x 所處地位何如,皆足以致

$$|x^{\alpha}-x^{\alpha_n}|<\varepsilon$$

之成立。惟如是,遂謂 x^{α_n} 在 $a\leqq x\leqq b$ 中任何一處皆斂於 x^{α}。精確言之,不論 ε 爲任何小之正數且與 x 無關,必有一 N 可尋,凡大於 N 之 n 皆足以致上式之成立。因此之故,乃得根據本段所述之理推知

$$-\varepsilon(b-a)+\int_a^b x^{\alpha_n}dx<\int_a^b x^{\alpha}dx<\int_a^b x^{\alpha_n}dx+\varepsilon(b-a),$$

因 α_n 爲有理數,故此式左右兩方之定積分可依 § 2·3·5 獲得之,遂得

$$-\varepsilon(b-a)+\frac{1}{\alpha_n+1}(b^{\alpha_n+1}-a^{\alpha_n+1})<\int_a^b x^{\alpha}dx<\frac{1}{\alpha_n+1}(b^{\alpha_n+1}-a^{\alpha_n+1})+\varepsilon(b-a).$$

由是令 $n\to\infty$ 則 $\varepsilon\to 0$,且隨之而有 $\alpha_n\to\alpha$, $a^{\alpha_n}\to a^{\alpha}$, $b^{\alpha_n}\to b^{\alpha}$

而 $$\int_a^b x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}).$$

在 α 爲不等於 -1 之有理數時已得證者,在 α 爲無理數時亦依然有效。由此結果,可以知

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha+1}=(\alpha+1)x^{\alpha},$$

故此關係在 α 爲無理數時亦爲眞確,不僅 α 爲有理數時爲然也。

例　　題

1. 據積分之中值定理求下列各定積分之中值 ξ,並繪圖以明之:

(a) $\int_a^b 1\cdot dx$.　　(b) $\int_a^b x dx$.

(c) $\int_a^b x^n dx$.　　(d) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$.

2. 設 $f(x)$ 爲一連續函數,試據積分之中值定理證明 $f(x)$ 之不定積分之導數爲 $f(x)$.

3. (a) 試求 $I_n=\int_0^a x^{\frac{1}{n}}dx$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$,並繪圖明之.

(b) 試求 $I_n=\int_0^a x^n dx$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$,並繪圖明之.

4. *假定 $f(\xi)$ 於一切 ξ 均爲連續,又設 $F(x)$ 爲一函數如

$$F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)dt$$

其中 δ 爲任何正數.試證:

(a) 不論 x 之値爲何如, $F(x)$ 必有一連續導數.

(b) 令 δ 相當小,必能使 $|F(x)-f(x)|$ 在任何固定之變程如 $a\leqq x\leqq b$ 中小於任意指定之正數 ε.

5. *設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 爲連續函數,試證積分之 Schwarz 不等式,其式爲

$$\int_a^b\{f(x)\}^2dx\int_a^b\{g(x)\}^2dx\geqq\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2$$

第二章附錄

第一節　定積分之存在定理

據 §2.1.1 所論，一連續函數 $f(x)$ 在 a、b 間 $(a<b)$ 之定積分爲如下之極限：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\Delta x_\nu, = \lim_{n\to\infty} F_n$$

其中符號仍保持 §2.1.1 中各種意義，故不復贅．又據 F_n 之義，知無論如何，必有

$$\underline{F_n} = \sum_{\nu=1}^{n} f(v_\nu)\Delta x_\nu \leqq F_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n} f(u_\nu)\Delta x_\nu = \overline{F_n},$$

其中 $f(v_\nu)$ 及 $f(u_\nu)$ 乃分別表 $f(x)$ 在第 ν 分段內之最小及最大值．吾人所欲證者，苟 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，則不論其如何分段，又不論 ξ_ν 在各分段中所處地位爲何如，當 $n\to\infty$，即最長之分段趨於零時，F_n 必斂於一確定之極限．欲證此，當證 $\underline{F_n}$ 及 $\overline{F_n}$ 斂於同一極限而後可．

據 $f(x)$ 之均勻連續性，苟任擇一正數 ε，不論 ε 如何小，當分段相當微小時，其中 $|f(u_\nu)-f(v_\nu)|$ 之值，世常以 $f(x)$ 在第 ν 分段之涯距[(1)]稱之者，必能小於 ε；惟如是，遂有

$$0\leqq \overline{F_n} - \underline{F_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \Delta x_\nu[f(u_\nu)-f(v_\nu)] < \varepsilon(b-a),$$

由是知此兩者之差在 $n\to\infty$ 時必趨於 0．因此之故，如能證 $\overline{F_n}$ 之收斂，一切問題即得解矣．

欲證 $\overline{F_n}$ 之必有一極限，可應用 Cauchy 審斂法證 $|\overline{F_n}-\overline{F_m}|$ 在 n 及 m 相當大時爲任意小即可．在此自可假定 n 及 m 之大（不妨簡稱爲"n 分段"或"m 分段"）已足令 $f(x)$ 在每分段中之涯距小於 $\varepsilon(\varepsilon>0)$．然其分段可使之愈趨愈細，如合"$n$ 分段"及"m 分段"之分點，可更得一"l 分段"．既有一"l 分段"之後，即可從而組織 $\overline{F_l}$．考 $\overline{F_l}$ 之由來，不難推知如下之關係

(1) oscillation; oscillation; Schwankung oder [illegible].

$$\underline{F_l} \leqq \overline{F_l} \leqq \overline{F_n},$$
$$\underline{F_n} \leqq F_l \leqq \overline{F_m};$$

蓋就"n 分段"或"m 分段"而言，其中每一分段又含有若干分段，屬於"l 分段"者，例如"n 分段"中之第 ν 分段含有"l 分段"中之第 $\mu, \mu+1, \cdots \mu+p$ 分段；則據 $\overline{F_l}$ 之義：

$$\overline{F_l} = \sum_{\mu=1}^{l} f(\eta_\mu) \Delta x_\mu,$$

知 $f(v_\nu) \leqq f(\eta_{\mu+i}) \leqq f(u_\nu), i=0,1, \cdots p$，且 $\Delta x_\nu = \sum_{i=0}^{p} \Delta x_{\mu+i}$，故上舉二不等式之眞確，亦理有固然者．復次，據前所已證之 $\overline{F_n} - \underline{F_n} < \varepsilon(b-a)$ 及 $\overline{F_m} - \underline{F_m} < \varepsilon(b-a)$，更應用上述之不等式卽得

$$0 \leqq \overline{F_n} - \overline{F_l} < \varepsilon(b-a) \text{ 及 } 0 \leqq \overline{F_m} - \overline{F_l} < \varepsilon(b-a),$$

故 $$|\overline{F_n} - \overline{F_m}| = |(\overline{F_n} - \overline{F_l}) - (\overline{F_m} - \overline{F_l})| < 2\varepsilon(b-a).$$

由是據 Cauchy 審斂法可以決定 $\overline{F_n}$ 必有一極限；且其極限之存在，不受分段情形之影響，在此證明中亦可見之．一連續函數定積分之存在，於是得證．

細考上述證法所根據之思想，實有相當之普遍性，故其應用不限於如上問題．設 $f(x) = \phi(x)\psi(x)$，就

$$\Sigma \phi(\xi_\nu')\psi(\xi_\nu'')\Delta x_\nu$$

言之，其中 $a \leqq x \leqq b$ 之線段如由 x_ν 諸點分爲 n 段，ξ_ν' 及 ξ_ν'' 爲 Δx_ν 段中任何兩數，不必相等者，則應用前法，可以證 $n \to \infty$ 時必斂於

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx.$$

他如 $$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[\phi^2(\xi_\nu') + \psi^2(\xi_\nu'')]}\Delta x_\nu$$

之斂於 $$\int_a^b \sqrt{[\phi^2(x) + \psi^2(x)]}dx,$$

其證法亦同．

第二節　積分中值定理與導數中值定理之關係

微分學與積分學各有一中値定理，已如前所論矣．兩者之間，必有

關係存在，而其關係可由微積分學之基本定理推論得之．試先由特殊之積分中值定理出發：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi),$$

苟令 $\int f(x)dx=F(x)$，則 $F'(x)=f(x)$，於是此定理得寫如

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi)$$

或

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi),$$

在此 $F(x)$ 爲一如是之函數，其導數 $F'(x)=f(x)$ 爲連續者，故對於此種 $F(x)$，其導數中值定理已得證矣．

茲更就普遍之積分中值定理

$$\int_a^b f(x)p(x)dx=f(\xi)\int_a^b p(x)dx$$

論之，其中 $p(x)$ 在其變程中連續，而其值又爲正數，$f(x)$ 爲任何連續函數．由此定理，可以推得一普遍之導數中值定理如下．試令

$$\int f(x)p(x)dx=F(x),\quad 即\ f(x)p(x)=F'(x),$$

又

$$\int p(x)dx=G(x),\qquad 即\ p(x)=G'(x),$$

則上式自可寫如

$$F(b)-F(a)=[G(b)-G(a)]f(\xi),$$

復因 $f(x)=\frac{F'(x)}{G'(x)}$ 之故，得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

其中 $b\neq a$．是謂**普遍之導數中值定理**，必假定其中 $F(x),G(x)$ 及 $F'(x),G'(x)$ 均爲連續，又 $G'(x)$ 處處爲正（或處處爲負）．在此假定之下，倒施上述論據，由導數中值定理以推積分中值定理亦無不可．所當注意者，吾人在此不過欲闡明兩定理間之相互關係而已；按其實際，如欲證導數中值定理，其假定不必如是之多，讀者參閱 §2.2.6 所論而自得之可也．

例　題

1．若 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有一連續導數，則 $f(x)$ 得以兩升函數（或兩降函數）之差表而達之．試證之．

第三章　初等函數之微積分學

第一節　求導數之法

積分與導數之義及其相互關係既已闡明，當進而討論如何求之之法．求導數，有其必然法則可循，故本節中擬先論述簡法數種，復據之以求各種初等函數之導數，然後引用前章所論之基本定理以求其積分．

3.1.1　簡法四則

假定 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在其變程中有可導性，如是則據導數之定義及計算極限之定理可以推知下列諸理：

其一，設 c 為一常數，又 $\phi(x)=cf(x)$，則 $\phi(x)$ 有可導性，且其導數 ϕ' 為

$$\phi'(x)=cf'(x);$$

其證明已見 § 2.2.1．

其二，苟 $f(x)+g(x)=\phi(x)$，則 $\phi(x)$ 有可導性，其導數為

$$\phi'(x)=f'(x)+g'(x),$$

意謂兩函數相加後求其導數，與分別先求兩者之導數後相加，結果完全無異；其證亦已見 § 2.2.1．

此理自可推廣於 n 個函數之和，蓋如有

$$\phi(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x),$$

其中 $f_\nu(x)$ $(\nu=1,2,3,\cdots n)$ 均可導者，則 $\phi(x)$ 亦可導，其導數為

$$\phi'(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu'(x);$$

其證同前，故不復贅．

其三，苟 $\phi(x)=f(x)g(x)$，則 $\phi(x)$ 有可導性，其導數為：

$$\phi'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x);$$

蓋由 $\dfrac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

令 $h\to 0$ 可以證之.此關係如以 $\phi(x)=f(x)g(x)$ 除之(在此自必假定 $\phi(x)$ 在其變程中無處爲 0),得有如下之形式:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)},$$

較前自更覺簡潔矣.此理很可推廣於 $\phi(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$; 蓋將前法疊次應用,必有

$$\phi'(x)=\frac{d}{dx}[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)]=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$$

$$+f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots+f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu'(x)\frac{\phi(x)}{f_\nu(x)},$$

復在 $\phi(x)$無處爲零之假定下,以 $\phi(x)$除之,得化爲如下之形式:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}=\sum\frac{f_\nu'(x)}{f_\nu(x)}.$$

其四,設

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

則 $\phi(x)$ 在 $g(x)$ 不等於 0 之處有可導性,且

$$\phi'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

此關係在 $\phi(x)\neq 0$ 之假定下可寫如

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

苟吾人假定 $\phi(x)$之可導性,則應用前法於 $f(x)=\phi(x)g(x)$ 得

$$f'(x)=\phi(x)g'(x)+g(x)\phi'(x),$$

卽從而有欲證之關係.然 $\phi(x)$ 之可導性亦必同時證之,如是則其證如下:據定義旣有

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x)g(x+h)},$$

由是令 $h\to 0$，卽得欲證之理。

3.1.2. 有理函數之導數

應用前段所述之法，可知

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

其中 n 爲任何整數。蓋如 n 爲一正整數，則 $x^n = x\cdot x\cdots x$，而

$$\frac{d}{dx}x^n = 1\cdot x^{n-1} + \cdots + 1\cdot x^{n-1} = nx^{n-1},$$

由是壘次求導數，必有

$$\frac{d^2}{dx^2}x^n = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!.$$

故 x^n 之第 $n+1$ 重導數必爲 0 無疑。至於 n 爲一負整數時，設 $n=-m$，

則
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}},$$

故
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

之關係，不論 n 爲任何正整數或負整數，均有效也。

又任何多項式

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

之導數，應用前述之法求之，必爲

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1},$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

等等；而任何有理函數之導數，藉上段第四法之助，亦可迎刃而解矣。

3.1.3. 三角函數之導數

由 § 2.2.3. 例六，已知 $(\sin x)' = \cos x$ 及 $(\cos x)' = -\sin x$，

故得
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

據同理，復有

$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

第二節　不定積分之簡單求法

3.2.1. 與導數公式相對峙之積分公式.

根據積分與導數之相互關係，可以推知下列公式，與 § 3.1.1 所論者相對峙，其理甚明，無待贅述.

其一，苟 c 爲一常數，則

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$$

其二，

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

其三，由 § 3.1.1 所立之

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

可以推知

$$\int[f(x)g(x)]'dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx,$$

是卽

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx;$$

此公式常稱之爲**分部積分法**[1]公式，其用將於第四章中見之．吾人在此特立此三種公式，使與 § 3.1.1 所論者相對峙，藉以顯示其間之關係而已．

3.2.2. 最簡單函數之積分

據 § 3.1.2 所述，既知

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1},$$

則

$$\int x^{n-1}dx=\frac{x^n}{n},\quad n\neq 0$$

之眞確，亦勢所必然；試將其中 n 代以 $n+1$，此公式亦可寫如

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\qquad n\neq -1,$$

(1) integration by parts; intégration par parties; Partielle Integration (Produkt-integration).

此式在 n 爲任何不等於 -1 之整數時（若 $n<0$，自必假定 $x\neq 0$）均爲有效；至 $n=-1$ 時其情形如何，容後詳論．明乎此，可知

$$\int_a^b x^n dx=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}),\quad n\neq -1;$$

惟 n 爲負整數時，必假定其中 a、b 同爲正數或同爲負數而後可，否則 x^n 在其變程中有一間斷點（即 $x=0$），所據之理將失其效也．至於任何多項式之不定積分，亦可依此求之．

復次，據 §3.1.3 所述關於三角函數之結果，可知

$$\int\cos x\,dx=\sin x,\qquad \int\sin x\,dx=-\cos x,$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x,\qquad \int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x;$$

由此又可求得其定積分，如

$$\int_a^b\cos x\,dx=\sin x\Big|_a^b=\sin b-\sin a.$$

所當注意者，據基本定理所論導數與積分之相互關係，可見導數公式與積分公式在意義上完全相等；既立其一，則其他自明，其間固不必有先後輕重之分也．

例　題

1．求 x^5-x^4 在 $x=1$ 時各重導數之值．

2．求 $317x^9-202x^7+76$ 在 $x=13\frac{1}{2}$ 時之十一重導數．

3．求下列各函數之導數，並與之對峙之積分公式：

(a) $ax+b$.　　(b) $25cx^7$.　　(c) $a+2bx+cx^2$.

(d) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.　　(e) $\dfrac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$.　　(f) $\dfrac{1}{1-x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(g) $\dfrac{(x^8-\sqrt{8}x^4+4)(x^8+\sqrt{8}x^4+4)}{x^{16}+16}$.

4．設有 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，試由

(a) $F(x)-F'(x)=P(x)$ 之關係求多項式 $F(x)$．

(b)* $c_0F(x)+c_1F'(x)+c_2F''(x)=P(x)$ 之關係求得 $F(x)$．

5．求下列各函數之導數，並寫出與之對峙之積分公式：

(a) $2\sin x\cos x$.　　(b) $\dfrac{1}{1+\tan x}$.　　(c) $x\cdot\tan x$

(d) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.　　　　(e) $\dfrac{\sin x}{x}$.

6. 求

$$\frac{d^2}{dx^2}\sec x,\quad \frac{d^2}{dx^2}\sec x\tan x,\quad \frac{d^3}{dx^3}\operatorname{cosec}x,\quad \frac{d^4}{dx^4}\tan x\sin x.$$

［注意］ $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 及 $\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$ 之定義.

7. 設 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 求其 n 階導數在 $x=1$ 之絕對值當 $n\to\infty$ 時之極限.

8. 求下列各不定積分:

(a) $\int(ax+b)dx$.　　　　(e) $\int\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$.

(b) $\int(ax^2+2bx+c)dx$.　　　　(f) $\int\left(a\cos x-\dfrac{b}{\sin^2 x}\right)dx$.

(c) $\int(9x^8+7x^6+5x^4+3x^2+1)dx$.　　　　(g) $\int\operatorname{cosec}x\cot x\,dx$.

(d) $\int\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.　　　　(h) $\int\left(3x-7\sin x+\dfrac{5}{\sqrt{x}}-\dfrac{9}{\cos^2 x}\right)dx$.

第三節　逆函數及其導數

3.3.1. 逆函數之導數

一連續函數 $y=f(x)$ 在其變程中如有獨行性，則必有一連續之逆函數，在第一章中已證之矣. 精言之，**苟一連續函數 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有獨行性，又 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$，則必有一函數 $x=g(y)$，在 α,β 之間爲單値，而又有連續性及獨行性**. 自導數之義觀之，一函數之是否獨行，或其逆函數之是否存在，可以一言而決；蓋在 $f'(x)>0$ 之處，其函數 $f(x)$ 必獨升，在 $f'(x)<0$ 之處，$f(x)$ 必獨降也.

以上論逆函數本身之存在. 至其導數，則有如下之定理:

苟 $y=f(x)$ 在 $a<x<b$ 中有可導性，且其導數在同一變程中處處爲正: $f'(x)>0$，或處處爲負: $f'(x)<0$，則其逆函數 $x=\varphi(y)$ 亦處處可導，且 $f(x)$ 之導數與其逆函數 $x=\varphi(y)$ 之導數間必有 $f'(x)\cdot\varphi'(y)=1$ 之關係. 此關係亦可寫如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

其理可證之如下. 因

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

假定無處爲 0，復因 $y=f(x)$ 及 $x=\phi(y)$ 之連續性，知 $\lim \Delta y=0$ 與 $\lim \Delta x=0$ 兩者意義完全相同，故有

$$y'(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\phi'(y)}.$$

是即欲證之理.

此理可繪圖說明之.試標繪 $y=f(x)$ 之圖，名其任何一點 x 上之切線與正橫軸所成之角爲 α，與正縱軸所成之角爲 β，見圖 3.1，則據導數之幾何意義，知

$$f'(x)=\tan\alpha,\quad \phi'(y)=\tan\beta,$$

因 α 及 β 兩角之和爲 $\frac{\pi}{2}$，故 $\tan\alpha\tan\beta=1$，亦理有固然者.

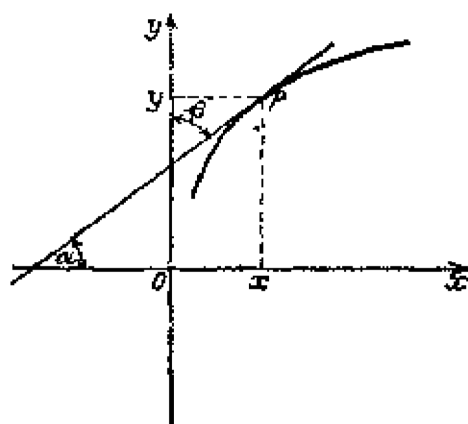


圖3.2

觀上所論，有一重要之假定，即 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，換言之，$f'(x)$ 無處爲 0. 苟此條件未能滿足，則有數種情形可以發生：其一，苟 $f'(x)$ 處處爲 0，則 $f(x)$ 爲一常數，於是 y 僅有唯一之値與其變程中一

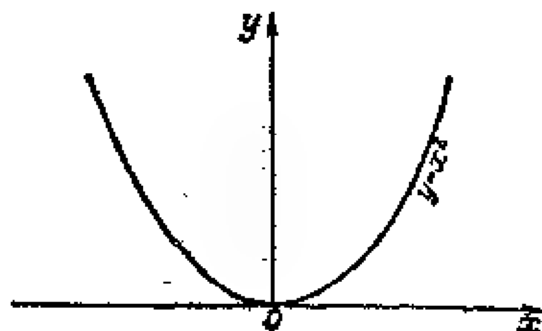


圖3.2

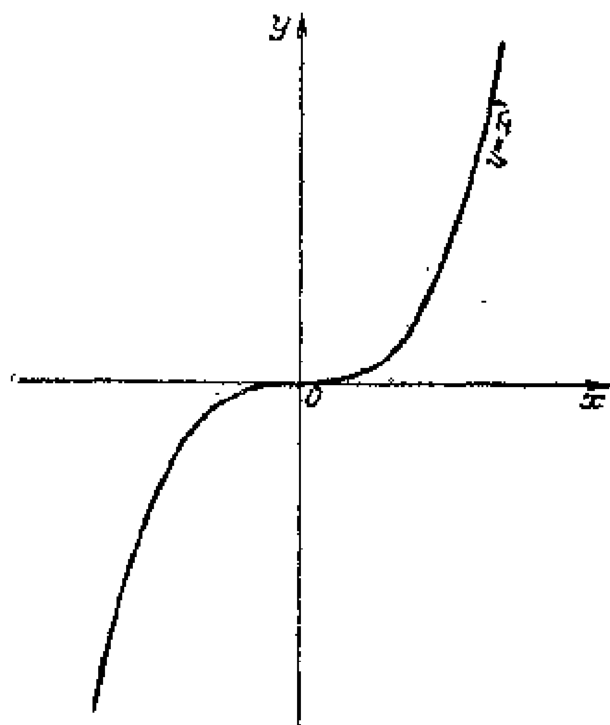


圖3.3

切 x 相應．如是則 $f(x)$ 之不可逆，尚何待論．其二，$f'(x)$ 在某某點上，如在 $x=a$ 時，為 0，惟 $f'(x)$ 為一連續函數．在此情形之下，當更考 $f'(x)$ 在 a 點左右之值是否同正同負，或一正一負．苟其一正一負（如 $f(x)$ 在 $x<a$ 時為負，在 $x>a$ 時為正，例如 $y=x^2$ 在原點附近之情形，見圖3.2）意即 $f(x)$ 之圖形本為獨升者，過此轉為獨降，獨降者過此轉為獨升，在此點之附近，顯無單值逆函數存在．苟其同正同負如 $y=x^3$（見圖 3.3），則其導數在原點之等於 0 毫不損其固有之獨行性，故仍有一單值之逆函數，惟其逆函數在此為不可導，是乃由於 $y=x^3$ 在 $x=0$ 之切線與縱軸平行之故耳．

3.3.2. 冪函數之逆函數

既明前段所述，即可從而討論 $y=x^n$ 之逆函數．假定其中 n 為一正整數，則 y' 在 $x>0$ 時為正，故在 $y>0$ 時必有一逆函數：

$$x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}},$$

至其導數據前段所證之理必為：

$$\frac{d(y^{\frac{1}{n}})}{dy}=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1},$$

或仍以 x 表自變數，得

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

此結果與§3.1.1所論者完全符合．惟 $x=0$ 時之情形，須特加注意．當 x 自右趨 0，則 $\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}$ 在 $n>1$ 時愈趨愈大；推原其故，實由於 $f(x)=x^n(n>1)$ 之導數在原點為 0 之故；由是可見 $y=x^{\frac{1}{n}}$ $(n>1)$ 之圖形在原點無不與縱軸相切．

最後尚欲申述者，如上所作 $x>0$ 之假定在 n 為奇數時殊無必要．蓋 n 如為一奇數，則 $y=x^n$ 無論如何為一獨行函數，因之必有一單值之逆函數 $x=y^{\frac{1}{n}}$．其導數之公式 $\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$ 在 y 為負數時依然有效，惟當 $x=0$ 時，因 $\frac{dx^n}{dx}=0$，其逆函數之圖形又與縱軸相切於此，讀

者就 $y=x^3$ 之例細察之可也.

3.3.3. 三角函數之逆函數

欲討論三角函數之逆函數，可先就 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ 及 $\cot x$ 之圖形細考之.試繪平行於橫軸之直線 $y=c$，苟其與三角函數之圖形相交，其交點之多，不可勝舉，因此之故，欲求其逆函數之單值，必限於適當之變程而後可.

請先論 $y=\sin x$. 其導數 $y'=\cos x$ 在變程 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 中為正，故在此必有其逆函數，以

$$x=\text{arc }\sin y$$

表之(意謂如是之角，其sin之值為 y 者). 在此必注意說明在何變程之中. $\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 之間所有之逆函數常稱之為 arc sin 之**主值**[1]. 在其他變程中，如在 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ 之間，因 $\sin x$ 獨行之故，又有一單值之逆函數，是謂 arc sin 之另一支.苟不明定其變程，則 arc sin 為一多值函數，其故由於 $y=\sin x$ 之值確定後，應之者除 x 外，復有 $2k\pi+x$ 及 $(2k+1)\pi-x$(k 為任何整數)，其多自為無限(見圖 3.4).

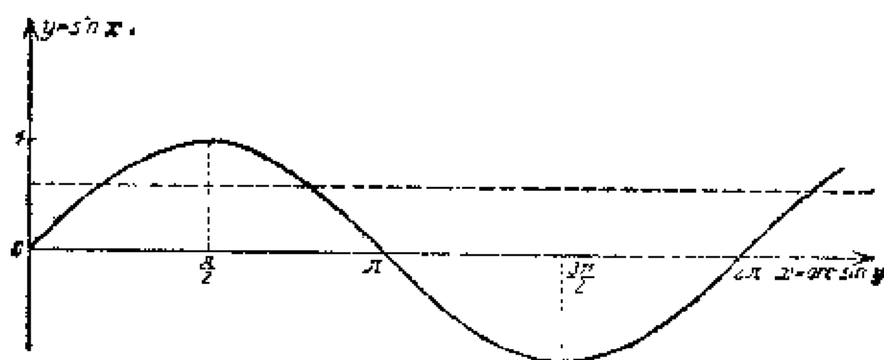


圖3.4

因此之故，須在一確定變程中求其逆函數，如在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 之間研究 $x=\text{arc }\sin y$ 之主值，主值既明，其他各單值支，可無容詳論矣.

既在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 之間變得 $y=\sin x$ 之逆函數 $x=\text{arc }\sin y$，即

(1) principal value; détermination principale; Hauptwert.

可應用§3.3.1所述以求其導數如下[①]：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

若仍以x表自變數，則有

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

據同理，可知 $y=\cos x$ 在 $0<x<\pi$ 之間有一逆函數 $x=\operatorname{arc}\cos y$，其導數亦可依法求之.如仍以 x 表自變數，則有

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中根號當 $\operatorname{arc}\cos x$ 在0及 π 之間變化時為正. 所可注意者，為 $x=-1$

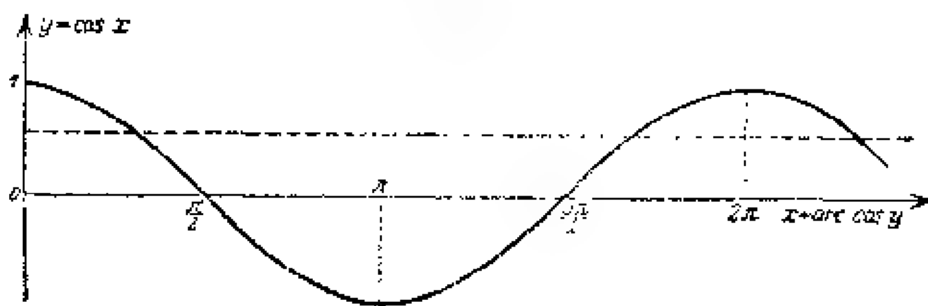


圖3.5

及 $x=1$ 兩點；考 $\operatorname{arc}\sin x$ 及 $\operatorname{arc}\cos x$ 之導數，當 x 趨近此兩點時，將無限制趨大，故其圖形在此與縱軸相切，換言之，在此各有一豎直之切線.

至於 $\tan x$ 及 $\cot x$ 之逆函數，亦可依法討論之. 考 $y=\tan x$ 之導數 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 除 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 諸點外，處處為正，故在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 之間有一單值逆函數，稱之謂 $x=\operatorname{arc}\tan y$ 之主值. 如對 x 之值無所限制，則arc tan固為多值，觀圖3.6，可以見之. 又 $y=\cot x$ 在 $0<x<\pi$ 之間亦有一單值逆函數，以 $x=\operatorname{arc}\cot y$ 表之，如對 x 無所限制，則其多值，與arc tan正復相同.復次，兩者之導數為

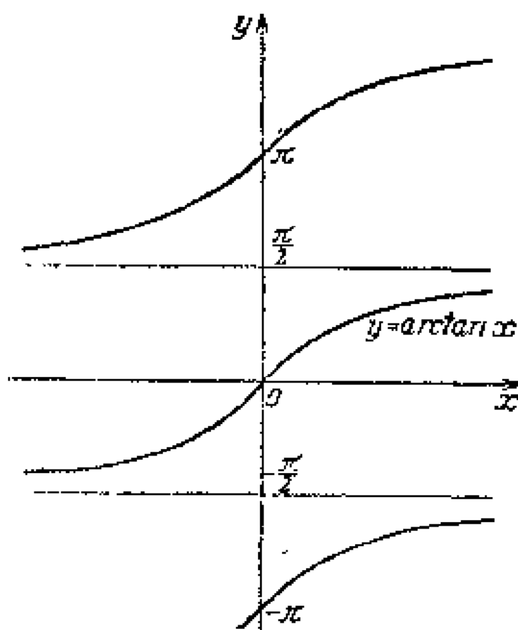


圖3.6

①在規定變程中，其根號為正.若其變程為 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，勢必將 x 代以 $x+\pi$，則其根號當為負，因 $\cos x$ 在此為負故也.

$$x=\text{arc tan} y, \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$x=\text{arc cot} y, \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\sin^2 x=\frac{-1}{1+\cot^2 x}=-\frac{1}{1+y^2};$$

如仍以 x 表自變數，則有 $\frac{d}{dx}\text{arc tan} x=\frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cot} x=-\frac{1}{1+x^2}.$$

綜上所得之結果，如以不定積分之形式表而出之，必有

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\text{arc sin} x,\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\text{arc cos} x;$$

又 $$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\text{arc tan} x,\quad \int\frac{1}{1+x^2}dx=-\text{arc cot} x.$$

觀此，同一函數之不定積分為兩不同函數，初視之似為矛盾，其實不然。在表達不定積分之時，有一附加之常數，可供吾人任意選擇。但一念及 $\frac{\pi}{2}-\text{arc cos} x=\text{arc sin} x$ 及 $\frac{\pi}{2}-\text{arc cot} x=\text{arc tan} x$ 之關係，上列公式即可瞭然。蓋所謂 $f(x)$ 之不定積分，乃指一切函數，其導數為 $f(x)$ 者，故非一確定函數，乃為一族函數，其中每兩者相差為一常數；因此之故，如以

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

代 $$\int f(x)dx=F(x)$$

似覺較為合理。惟為簡便之故，不妨仍用後者，特不可不透澈明瞭其意義耳。

由上列不定積分之公式，自可推知其定積分。例如

$$\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx=\text{arc tan} x\Big|_a^b=\text{arc tan} b-\text{arc tan} a.$$

若令 $a=0, b=1$，則因 $\tan 0=0$，$\tan\frac{\pi}{4}=1$ 之故，得

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx.$$

由是可見 π 之一數，雖起於圓之研究，然與一有理函數 $\frac{1}{1+x^2}$ 亦有密切之關係，蓋即由其所圍之一面積表而達之。觀圖 3.7，可以見矣。

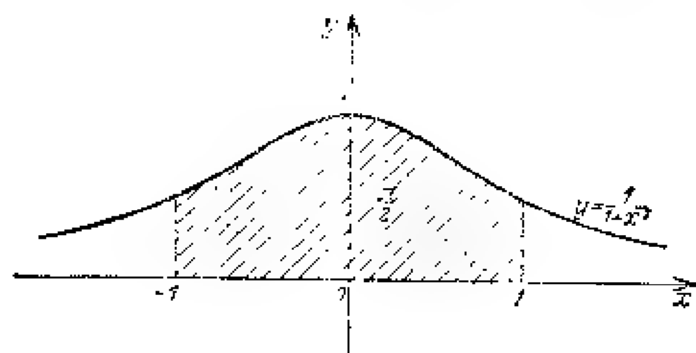


圖3.9

例　題

1. 設有 $y=\frac{x^2}{4}$，其中 $x=8$ 時，$y=16$. 試求 $\frac{dy}{dx}$ 在 $x=8$ 時之值. 復由 $y=\frac{x^2}{4}$ 求 x，更求 $\frac{dx}{dy}$ 在 $y=16$ 時之值. 其結果是否與 §3.3.1 所論者相符?

2. 試證

(a) $\text{arc}\sin\alpha+\text{arc}\sin\beta=\text{arc}\sin(\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2})$;

(b) $\text{arc}\sin\alpha+\text{arc}\sin\beta=\text{arc}\cos(\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta)$;

(c) $\text{arc}\tan\alpha+\text{arc}\tan\beta=\text{arc}\tan\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$.

3. 求下列各函數之導數，並寫出與之對峙之不定積分式:

(a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}$.　(d) $\frac{\sqrt[3]{x}}{1-\tan x}$.　(g) $\frac{\text{arc}\sin x}{\text{arc}\tan x}$.

(b) $\sqrt{x}\cos^2 x$　(e) $\text{arc}\sin x\cdot\text{arc}\cos x$.　(h) $5\,\text{arc}\cot x+\frac{1}{\text{arc}\cos x}$.

(c) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.　(f) $\frac{1+\text{arc}\tan x}{1-\text{arc}\tan x}$.

4. 用方格紙標繪 $y=\frac{1}{1+x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ 之放大圖形，然後估計平方之個數以求 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ 之值，並藉此獲得 $\frac{\pi}{4}$ 之近似值.(參照 89 頁之題 1(c)).

第四節　疊函數之導數

3.4.1.　鏈導法(1)

考函數之內容，其繁簡有相差甚遠者. 函數之繁複者常由其較簡者組合而成；組合之法甚多，有理算法(加減乘除)即為其一. 如由種種函數，以有理算法而組成其他函數，就其內容言之，後者常較前者為繁複，就其導數言之，後者自較前者為難求；然吾人如獲知前者之各導數，則後

(1)chain rule; Kettenregel.

者之導數，即可據 §3.1.1 之方法求之．循是以論，如欲求一函數之導數，莫要於先剖析其內容，以明其如何由較簡函數聯合而成．§3.3.1 論逆函數之導數，即本此意．此外，復有所謂疊函數(1)者，亦可同法處理之．

試先舉例言之．在變程 $0\leqq x\leqq 1$ 中設有一函數 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$，可視爲由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 兩者所疊成．當 x 在其規定之變程中變化時，必有一合於 $0\leqq u\leqq 1$ 之 u 以應之，隨此復有一確定之 y．故 $y=\sqrt{u}=\sqrt{1-x^2}$ 即稱爲變程 $0\leqq x\leqq 1$ 中之一疊函數．在此必注意說明其變程，由上例可知，蓋其變程至多擴展至 $-1\leqq x\leqq 1$，在此變程之外如 $1<x\leqq 2$ 中即未能存在也．又可見 y 隨 x 而定之關係，因 u 居間之故，竟由直接而易爲間接．y 之隨 u，與 u 之隨 x，其關係較簡，由是以疊成 $y=f(x)$，則其中層累曲折即因之而明矣．

他如
$$f(x)=\sqrt{1+\operatorname{arc}\tan x^2}$$
可視爲由　$\phi(x)=x^2$，　$\psi(\phi)=1+\operatorname{arc}\tan\phi$，　$g(\psi)=\sqrt{\psi(\phi)}=f(x)$

疊合而成．如是之例，言之甚多，讀者可自求之，藉以明疊函數之結構也．

既明疊函數爲由其他較簡之函數疊合而成，則不特其中關係可以益顯，而求索導數之問題，亦將隨之而得一解決．欲明其說，當證下列定理：**苟 $\phi(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中有可導性，其值在 $\alpha\leqq\phi\leqq\beta$ 中變化，又 $g(\phi)$ 在變程 $\alpha\leqq\phi\leqq\beta$ 中亦有可導性，則疊函數 $f(x)=g(\phi(x))$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中爲一可導函數，其導數爲**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dx}$$

或
$$f'(x)=g'(\phi)\cdot\phi'(x).$$

其理可由導數之定義證之．根據 $g'(\phi)$ 及 $\phi'(x)$ 之存在，可知必有 ε 及 η 兩數①，隨 $\Delta x\to 0$ 而趨 0 者，如

$$\Delta g=g'(\phi)\Delta\phi+\varepsilon\Delta\phi,\ 及\ \Delta\phi=\phi'(x)\Delta x+\eta\Delta x;$$

由是得
$$\Delta g=g'(\phi)\phi'(x)\Delta x+[\eta g'(\phi)+\varepsilon\phi'(x)+\varepsilon\eta]\Delta x$$

或
$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=g'(\phi)\phi'(x)+[\eta g'(\phi)+\varepsilon\phi'(x)+\varepsilon\eta];$$

---

(1) compound function(function of a function); fonction de fonction; zusammengesetzte Funktion.

① 蓋 Δx 可假定爲任何不等於 0 之數，故 η 遂由第二式規定之．又 ε 在 $\Delta\phi\neq 0$ 之假定下由第一式決定之，如 $\Delta\phi=0$，則令 $\varepsilon=0$，故 η 及 ε 兩數之存在，可無疑義．

然後令$\Delta x\to 0$，即得欲證之理。

此定理自可推廣於其他普遍情形；例如

$$y=f(u),\quad u=g(v),\quad v=h(w),\quad w=\phi(x),$$

各有可導性，則 $y=F(x)$ 亦爲可導，且有

$$\frac{dy}{dx}=y'=f'(u)g'(v)h'(w)\phi'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx},$$

其證同前，可不復贅。

3.4.2. 舉例

茲舉淺例於後，以明上述方法之用。

［例一］ 設有 $y=x^{\alpha}$，其中 x 之變程爲一切正實數所成，又 $\alpha=\frac{p}{q}$，q 爲正整數，p 爲正整數或負整數；故 α 爲任何有理數。試令

$$y=\phi^{p},\quad \phi=x^{\frac{1}{q}},$$

據前段所論，得

$$y'=p\phi^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1},$$

故不論 α 爲任何有理數，必有

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1},$$

與前已得之結果相符。

［例二］ 設 $y=\sqrt{1-x^2}$，設 $y=\sqrt{\phi}$，其中 $\phi=1-x^2$，又 x 之變程爲 $-1<x<1$，則

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\phi}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

［例三］ 若 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

［例四］ 若 $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{dx}=\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

尙有一言須申述者，前段所論求導數之法，必有一積分法與之對峙，蓋據前所論，由每一導數式可推得一積分式，由每一積分式亦可得一導數式也。此積分式擬於第四章中詳論之。

3.4.3. 再論 x^{α} 之積分及導數.

據冪函數 x^{α} 之最初定義,吾人有

$$x^{\alpha}=\lim x^{r_n},$$

其中 r_n 爲一有理數序,斂於 α 者. 觀此,或以爲其導數可由

$$\frac{d}{dx}x^{r_n}=r_n x^{r_n-1},$$

求其在 $n\to\infty$ 時之極限而得之. 此事之可能與否,與如下一事有關. 倘由 $x^{r_n}\to x^{\alpha}$ 可以作 $\frac{d}{dx}x^{r_n}\to\frac{d}{dx}x^{\alpha}$ 之推斷,則其事始爲可能. 然鑒於一曲線可由其他曲線任意接近,而其方向在任何點上仍彼此相差甚遠(如一直線可由一波形曲線趨近之,而彼此方向之差可達 45° 之多,卽其一例,見圖 3.8),可知此推論不能成立. 循是以論,苟兩函數之差甚微時,其導數之差正不必隨之而幾乎相等. 故上列之極限,苟無其他根據,爲不可能之事. 然則專就此方面立論,以觀積分與導數,其性質可謂完全不同. 蓋據§2.6.2所述,苟兩函數在其變程 $a\leqq x\leqq b$ 中之差卻小於 ε,則其定積分之差不能大於 $\varepsilon(b-a)$;惟如是,遂得據§2.6.2之結果以推知

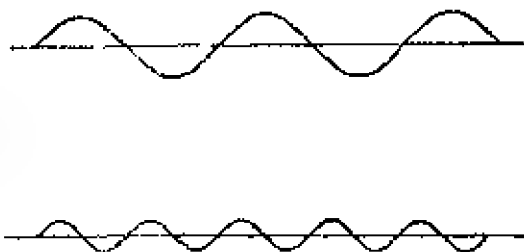


圖 3.8

$$\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{d}{dx}x^{\alpha+1}=x^{\alpha}$$

之成立,復以 α 代 $\alpha+1$,得

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

故 $\frac{d}{dx}x^{r_n}\to\frac{d}{dx}x^{\alpha}$ 之根據,實在彼而不在此也.

觀此一例,可見微積分學相互關係之重要. 惟吾人在本章第五節中當爲冪函數 x^{α} 另立一定義,形式較簡而結果相同者,讀者當先從參閱,深思而自得之.

例　題

求下列各函數之導數:

1. $(x+1)^3$.
2. $(3x+5)^3$.
3. $(x^9-3x^6-x^3)^5$.
4. $\frac{1}{1+x}$.
5. $\frac{1}{1-x^2}$.
6. $(ax+b)^n$ (n 爲整數).
7. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.
8. $\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}}$.

9. $\left[\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\right]^5$.
10. $\sin^2 x$.
11. $\sin(x^2)$.
12. $\sqrt{1+\sin^2 x}$.
13. $x^2\sin\frac{1}{x^2}$.
14. $\tan\frac{1+x}{1-x}$.
15. $\sin(x^2+3x+2)$.
16. $\arcsin(3-t^5)$.
17. $\arcsin(\cos x)$.
18. $\sin(\arccos\sqrt{1-x^2})$.
19. $x^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{x}}$.
20. $[\sin(x+7)]^{\sqrt[3]{5}}$.
21. $[\arcsin(a\cos x+b)]^4$.

第五節　對數函數及其逆函數

綜上所論，求導數之問題，已得相當之結果；凡代數函數、三角函數，及由是聯合而成之函數均可依必然之法則而求得其導數．繼此欲更求微分學理論之發展，當另創初等函數而研討之；而前兩章中所建設之理論，如逆函數之理，積分與導數之關係，皆為創造新函數之便利捷徑．請先論對數函數．

3.5.1. 對數函數之定義及其特性

苟 n 為任何無理數，或有理數之不等於 -1 者，則冪函數 x^n 之不定積分又為一冪函數（即 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$），前已詳論之矣．惟 n 如為 -1，其積分為何如，至今未有所論及：且求之於代數函數中，無論如何，不能獲得一函數，其導數為 $\frac{1}{x}$ 者．雖然，如假定 $x>0$，則

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi}=f(x)$$

之存在，似無疑義．蓋此實表達一面積，其上由等軸雙曲線 $y=\frac{1}{\xi}$，其下由 ξ 軸，左右由 $\xi=1$ 及 $\xi=x$ 兩直線所圍成者，觀圖 3.9 可以見之．不寧惟是，吾人在第二章第四節且已繪圖以求其近似值如圖 2.18．故此雖未能為一代數函數，其必為一隨 x 而定之函數，則可斷言．惟如是，吾人姑稱此為**對數函數**，以 $\log x$ 或 $\text{nat}\log x$ 之符號表之：

$$\log x=\int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

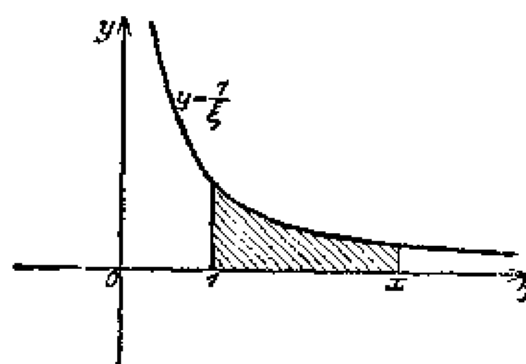


圖3.9

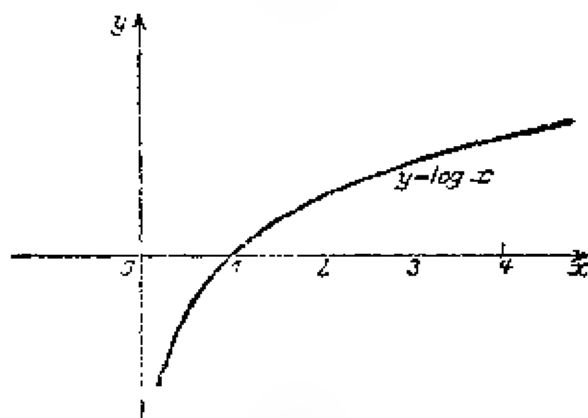


圖3.10

且從而研討其特性之爲何如.據此定義可以推斷者，$\log x$ 在 $x>1$ 時爲正，$x<1$ 時爲負，$x=1$ 時爲 0，卽 $\log 1=0$；又其導數爲

$$\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}.$$

所當注意者，在此必假定 x 之變程爲正數；苟 x 爲 0 或爲負數，則因 $\frac{1}{\xi}$ 在 $\xi=0$ 點之不連續，$\log x$ 之値卽不能定.然吾人苟擇一負數如 -1 作爲下界，則 x 卽爲負數亦無不可，蓋

$$\int_{-1}^{x}\frac{d\xi}{\xi}\quad(x<0)$$

自必存在無疑.試將其中 ξ 易以 $-\eta$，則 $d\xi=-d\eta$.於是在 $x<0$ 之假定下，必有

$$\int_{-1}^{x}\frac{d\xi}{\xi}=\int_{1}^{-x}\frac{d\eta}{\eta}=\int_{1}^{|x|}\frac{d\eta}{\eta}=\log|x|,$$

因此遂得

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|.$$

根據上述定義，可知對數函數必滿足：

$$\log(ab)=\log a+\log b,$$

是謂對數函數之加法定理[1]，其證如下.由

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x},$$

可知
$$\frac{d\log(ax)}{dx}=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x},$$

由是知 $\log ax$ 與 $\log x$ 有同一導數，故兩者之差爲一常數：

(1)addition theorem; théorème d'addition; Additionstheorem.

$$\log ax = \log x + c.$$

此關係在 x 爲任何正數時均能成立．若令其中 $x=1$，則因 $\log 1=0$之故，知 $\log a=c$，故得

$$\log ax = \log x + \log a;$$

復令其中 $x=b$，卽有　$\log ab = \log b + \log a$，

是卽欲證之理．明乎此，可從而推論如下各種結果．設 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 爲任何正數，則將上理疊次應用，卽得

$$\log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n.$$

苟此 n 個正數彼此相等，且等於 a，則有

$$\log a^n = n\log a.$$

據同理，復有　$\log a + \log \frac{1}{a} = \log 1 = 0$，

故　$\log a = -\log \frac{1}{a}$．

復次，若令 $\sqrt[n]{a} = \alpha$ 或 $a = \alpha^n$，則 $\log a = n\log \alpha$，或

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log a.$$

由是復疊次應用加法定理，則當 m 爲任何正整數時，必有

$$\frac{m}{n}\log a = \log \sqrt[n]{a^m} = \log a^{\frac{m}{n}}.$$

由是知　$\log a^r = r\log a$

之關係，當其中 r 爲任何正有理數時，必能成立，若其中 $r=0$，則其眞確，更不待言．至 r 爲負有理數時，因

$$\log a^r = \log \frac{1}{a^{-r}} = -\log a^{-r} = r\log a$$

之故，亦依然有效．

復次，據對數函數之定義，知其値隨 x 之升而升，隨 x 之降而降，故爲一獨升函數，可無疑義．又 $\log x$ 當 x 趨大時無極限可歛．何則，據加法定理旣知 $\log 2^n = n\log 2$，若令 $x=2^n$，卽可見 $\log x$ 當 n 趨大時將無限制趨大，因 $\log 2$ 爲一正數故也．更有進者，據$\log \frac{1}{2^n} = -n\log 2$，又可見 $\log x$ 當 x 由正數趨向 0 時（卽令式中 $n\to\infty$），將在負向無限制趨

大.循是以觀,當 x 在 $0<x<\infty$ 之間變化時,$\log x$ 為一獨升函數,其值在 $-\infty<\log x<\infty$ 之間,可以識矣.

3.5.2. 對數函數之逆函數、指數函數

考對數函數 $y=\log x(x>0)$ 在其變程中既為一獨升函數,其值在 $-\infty<y<\infty$ 之間變化,則在此 $-\infty<y<\infty$ 變程中必有一逆函數,且此逆函數必為單值,又有獨行性及可導性,試暫以 $x=E(y)$ 表之.如仍以 y 表因變數,x 表自變數,則 $E(x)$ 之其他特性可由對數函數之特性一一推論而得之.其一,當 x 在 $-\infty<x<\infty$ 之間變化,$E(x)$ 始終為正,又其值在 $x=0$ 時必為 1:

$$E(0)=1,$$

蓋由於 $\log 1=0$ 之故,是乃顯而可見者.其二,由對數函數之加法定理可以推斷其逆函數之乘法定理[1]:

$$E(\alpha)E(\beta)=E(\alpha+\beta);$$

欲證之,但注意　$E(\alpha)=a$,$E(\beta)=b$,$E(\alpha+\beta)=c$

與　$\alpha=\log a$,$\beta=\log b$,$\alpha+\beta=\log c$

之意義相同,又據前證之 $\alpha+\beta=\log ab$(即對數函數之加法定理)可知 $c=ab$,而欲證之理,即在於是矣.

明乎上述之理,可進而推論 $y=E(x)$ 之一重要特性;據此特性,此函數乃可稱之為指數函數,並以

$$y=E(x)=e^x$$

之符號表而達之.無論如何,必有一數 e,其對數為 1 者:

$$\log e=1,$$

是即　$E(1)=e$

之意,故 e 實為 $E(x)$ 當 $x=1$ 時之值,而必有一如是之正實數 e,亦為無可懷疑之事.惟如是,遂得據 $E(x)$ 之乘法定理以知

$$E(n)=e^n;$$

(1) multiplication theorem; théorème de multiplication; Multiplikationstheorem.

據同理，若 m 及 n 為任何正整數，必有

$$E\left(\frac{m}{n}\right)=e^{\frac{m}{n}}.$$

故

$$E(r)=e^{r}$$

在 r 為任何正有理數時已得證矣．至 r 為負有理數時，因

$$E(r)E(-r)=E(0)=1$$

之故，此關係亦必眞確無疑．

由是言之，$E(x)$ 既為一獨行連續函數之逆函數，故必為一連續函數；復因 x 為有理數時，$E(x)$ 與 e^{x} 完全相同，於是 x 為無理數時，得以 $E(x)=e^{x}$ 規定之．如是規定之 $E(x)=e^{x}$ 與第一章所立 a^{x} 之定義，自必殊途同歸，惟 $E(x)$ 之連續性，在此為其定義之必然結果，在彼則非證不可耳．據第一章所論，e^{x} 當 x 為無理數時為 e^{x_n} 之極限，其中 x_n 為一有理數序，斂於 x 者．今既知 $E(x_n)=e^{x_n}$，而 $E(x)$ 又為一連續函數，故必有 $E(x)=\lim E(x_n)$，由是可見兩定義之完全一致，而今之勝於前，則為無容諱言者．

既明 e^{x} 為對數函數之逆函數，則其圖形可由圖 3.10 獲得之，其法如 § 1.2.3 所述(見圖 3.11)，可不贅．又 e^{x} 必在在有一導數，亦無待論．因其逆函數 $x=\log y$ 之導數為 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$，故 $y=e^{x}$ 之導數為

$$\frac{dy}{dx}=\frac{de^{x}}{dx}=y=e^{x}.$$

由是知**指數函數之導數與其本身相同**，是為其獨有之特性，而為其他函數所未有者．

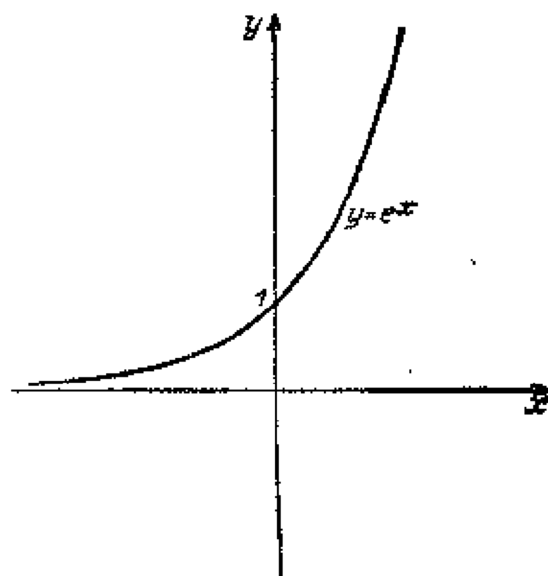


圖3.11

3.5.3. 普通指數函數 a^{x} 及冪函數 x^{a}

苟 a 為任何正數，則 a^{x} 稱之為普遍指數函數，而因 $e^{\log a}=a$ 之故，可歸併於前段所述之指數函數

$$y = a^x = e^{x\log a},$$

由是卽可明其特性之爲何如．至其導數，可求之如下：

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\log a} = e^{x\log a}\cdot\log a = a^x \log a.$$

a^x 之逆函數爲對數函數之以 a 爲底者，寫如

$$x = \log_a y,$$

而 § 3.5.1 所論，以 e 爲底之對數函數常稱之爲自然對數．欲求 $x=\log_a y$ 之導數，則有

$$\frac{d}{dy}\log_a y = \frac{1}{a^x\log a} = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{y},$$

或以 x 表自變數，得

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}.$$

以 a 作底與以 e 作底之兩種對數，其間自有密切之關係．蓋由

$$y = a^x,$$

可知 $$\log y = x\log a,$$

復因 $$x = \log_a y,$$

遂得 $$\log y = \log a\cdot\log_a y,$$

或 $$\log_a y = \frac{1}{\log a}\log y.$$

由是以觀，假定 $a\neq 1$，則 $\log_a y$ 與 $\log y$ 之相異爲一常數因數；旣知 y 之 log，卽可由是以知其 $\log_a y$．在初等數學中所用之對數，乃以 10 爲底者．

最後尙欲申述者，爲冪函數 $x^\alpha (x>0)$ 與指數函數之關係．吾人可應用後者爲前者立一定義如下：

$$x^\alpha = e^{\alpha\log x};$$

由是以求 x^α 之導數，得

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = e^{\alpha\log x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

與 § 3.4.2 所得之結果完全相符．

3.5.4. 指數函數之另一形式

自然對數之底 e，據上所論爲一如是之數，其 log 爲 1 者：$\log e = 1$；

此 e 卽為§1.4.7 所論之無理數,亦不難證明之.考 $f(x)=\log x$ 之導數為:

$$\frac{1}{x}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

令其中 $\frac{1}{x}=z$,得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+zh)=z;$$

惟 e^x 既為一連續函數,其意卽謂

$$e^z=\lim_{h\to 0}e^{\frac{1}{h}\log(1+zh)}=\lim_{h\to 0}(1+zh)^{\frac{1}{h}},$$

試令其中 h 依次取 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$,則有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z,$$

是為指數函數之另一形式.由是知 $z=1$ 時必有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

故此 e 與§1.4.7 所論者為同一之數,已得證矣.

更由 a^x 之導數

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\log a$$

觀之,可見 $x=0$ 時此導數為

$$\log a=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h},$$

由是知 a 之對數得直接由一極限表達之.旣明此極限,吾人擬對

$$\int_a^b x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})$$

之關係有所補述.此關係之證明已詳於前,惟其中 α 必假定不等於 -1.在 $\alpha=-1$ 時,此關係自無成立之可能.但既達此地步,可一考 α 趨於 -1 時果有無意義可言.設取 $a=1$,則式之左方在 $\alpha\to -1$ 時趨於 $\log b$(在積分符號之下,實施 $\alpha\to -1$,其可能條件,自須詳加研討;參閱§2.6.2 所論),而 $\log b$ 據上所述為

$$\log b=\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}.$$

適與式之右方

$$\lim_{\alpha\to-1}\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-1)$$

相符．故在昔爲一特殊情形，非除外不可，在今日視之，固爲一極限公式，自有其意義及地位也．

綜觀以上所論，先以一積分作爲 $y=\log x$ 在變程 $x>0$ 中之定義，從而推知其種種特性，更從而研討其逆函數 $y=e^x$，然後將 $y=x^a=e^{a\log x}$ 及 $y=a^x=e^{x\log a}$ 兩函數歸併於此，使從前證明連續性之困難一掃而空，其法可謂精美極矣．

例 題

1．用方格紙描繪 $y=\frac{1}{x}$ $(1\leqq x\leqq 2)$ 之放大圖形，然後估計平方之個數以求 $\log_e 2$ 之值．

2．求下列各函數之導數：

(a) $x(\log x-1)$． (c) $\log[x+\sqrt{1+x^2}]$．

(b) $\log(\log x)$． (d) $\log[\sqrt{1+\log x}-\sin x]$．

3．求 $\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2+x}}$ 之導數；先直接求之，復用 log 之特性簡化後求之．

4． (a) 求 $y=\frac{\sqrt[3]{7x^2+1}}{\sqrt[4]{x-2}\sqrt{x^4+1}}$ 之導數．

(b) 先取上列 y 之對數，簡化後求其導數．

5．*若 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\frac{x}{n}\right)^n=1$．

6．試證 $y=e^{-ax}(a\cos x+b\sin x)$，不論 a 及 b 之值爲何如，必滿足下列方程式：

$$y''+2ay'+(a^2+1)y=0.$$

7．*試證 $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$，假定 $x\neq 0$，又 $P_n(x)$ 爲一 $2n-2$ 次之多項式．

8．求下列函數之導數：

(a) $a^{(a^x)}$ $(a>0)$；

(b) $a^{\sin x(\log x)^2}$．

3.5.5. 指數函數之應用

指數函數有一重要特性，可由下列定理說明之：苟一函數 $y=f(x)$

滿足一方程式如 $y'=\alpha y$,

其中 α 為任何不等於 0 之常數,則 y 必有如下之形式:

$$y=f(x)=ce^{\alpha x}$$

其中 c 為一任意常數.倒言之,凡函數之有 $ce^{\alpha x}$ 形式者必滿足 $y'=\alpha y$.此方程式既表達 y 及其導數間之關係,常稱之為**微分方程式**(1).

此理在 $\alpha=1$ 時之真確,顯而易見;蓋 $y=e^x$ 之滿足 $y'=y$ 已述於前,若 c 為一任意常數,則 $y=ce^x$ 亦必滿足 $y'=y$.倒論之,凡滿足此方程式者別無其他.試以 y 表一如是之函數,而研討 $u=ye^{-x}$ 之性質.考 u 之導數為

$$u'=y'e^{-x}-ye^{-x}=e^{-x}(y'-y)=0,$$

故 u 為一常數,$u=ye^{-x}=c$,由是得 $y=ce^x$.故滿足此方程式之函數,已盡在於是,是即欲證之理.若 α 為任何不等於 0 之數,則其證與 $\alpha=1$ 時同.但令 $u=ye^{-\alpha x}$,則 $u'=y'e^{-\alpha x}-\alpha ye^{-\alpha x}$;因 $y'=\alpha y$ 之成立,遂得 $u'=0$ 或 $u=c$.故 y 之滿足 $y'=\alpha y$ 者必為 $y=ce^{\alpha x}$,至其逆定理之真確,固不待證而自明也.

緣此特性,指數函數在應用上乃佔一重要地位,舉例言之如下:

〔例一〕 連續之利上加利;鐳之蛻變現象.

假定原有資本為 1,利率百分數為 100α,每年年終將所得利息加入,則歷 x 年後必得

$$(1+\alpha)^x;$$

苟不待年終,但歷 n 分之一年後即計息,則其結果為

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nx}.$$

為求簡之故,不妨令 $x=1$.換言之,每歷 n 分之一年後計息,則一年後連本帶利共有

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}.$$

試設想資本生利為一連續之事,其利不因計之而始生,而係隨時生長,無片刻之停,如是必使 $n\to\infty$,而其結果將使原有資本在一年後變為 e^{α} 倍,x 年後為 $e^{\alpha x}$ 倍矣.

自然界中各種質量之變化,均有其必然之定律.設以 y 表一物之質量,x 表時間,則其變化

(1)differential equation; équation différentielle, Differentialgleichung.

之速度 y' 與其總量 y 有成比例之關係者：$y'=\alpha y$.（若 y 隨時而增，則 α 為一正數，若隨時而減，則 α 為一負數.）惟如是，y 之隨 x，必依

$$y=ce^{\alpha x}.$$

可以斷言，其中 c 為 $x=0$ 時 y 所有之值，故得以 $c=y_0=y(0)$ 表之.因此遂有

$$y=y_0e^{\alpha x}.$$

自然現象依此定律而變者甚多，如鐳之蛻變(1)，即為其中之一.若鐳之分裂或消散，其在每一時刻之速度，視其時所存之總量而定，故有 $y'=-ky$ $(k>0)$. 因此之故，其量必依 $y=y_0e^{-kx}$ 而減少，其中 y_0 為 $x=0$ 時(開始觀察時)所存之鐳量.明乎是，可知原有鐳量如消散一半，所需時間 τ 必合於

$$\frac{1}{2}y_0=y_0e^{-k\tau},$$

由是 $\tau=\frac{\log 2}{k}$.

［例二］ Newton 傳熱定律.

設有鐵片一小塊，燒至某一溫度（如假定為攝氏表 100°）後，投入一極大之水盆中，其溫度始終維持於攝氏 20°，不因鐵片之投入而生變動.據經驗所示，若兩者之溫度相差甚遠，則鐵片投入水盆後，其溫度下降甚速，否則甚緩.惟如是，若以 $y(x)$ 表兩溫度之差，x 表時間，遂得立一假設，謂 y 隨 x 而減之速度，隨其時之 y 而定：

$$y'=-ky,$$

其中 k 為一正數，與鐵片之性質有關.由是可知

$$y=ce^{-kx},$$

其中 c 為鐵片初入水時兩溫度之差，據假定為攝氏 80°，而 y 隨 x 而變之情形，乃昭然若揭，是即 Newton 之傳熱定律.

［例三］ 大氣壓力隨高度而變之定律.

吾人所居之地面上有一確定大氣壓，以 p_0 表之.離地愈遠，則氣壓愈低，其間自有相倚為變之關係.設以 $\sigma(\lambda)$ 表空氣密度，以 p 表氣壓，則 p 在離地面 h 之處必為

$$p=f(h)=p_0-\int_0^h\sigma(\lambda)d\lambda,$$

是乃由於氣壓之定義而知之.由此公式，可知氣壓 $p=f(h)$ 與 $\sigma(h)$ 間必有

---

(1)radioactive disintegration; désintégration radioactive; radioaktiver Zerfall.

$$p'(h) = -\rho(h)$$

之關係.惟據 Boyle 定律,當溫度不變時,氣壓與密度成正比: $p=a\rho$,其中 a 爲一恆量,與空氣之成分有關.因此遂得

$$p'(h) = -\frac{1}{a}p,$$

式中僅含一個未知函數.據上所論,得由是而推斷

$$p = f(h) = ce^{-\frac{h}{a}},$$

其中 c 爲 p 在 $h=0$ 時之值,即爲地面上之氣壓,故若 $c=p_0$,於是得

$$p = f(h) = p_0 e^{-\frac{h}{a}}$$

或

$$h = a\log\frac{p_0}{p}.$$

據此公式,如假定 a 爲已知,即可由 p 以知 h.如在高山之頂觀氣壓計所指之 p 可知其山之高,或由兩地不同之氣壓即可測知兩地之高下.又如已知 p 及 h,可由是以定 a,蓋 a 在氣體理論中爲一重要恆量.諸如此類,不一而足.

［例四］　化學作用之進行.

設將某一物質,例如蔗糖,溶化於大量之水中;以 $u(x)$ 表在 x 時所尚未溶化之糖質,則其溶解速度爲 $-\frac{du}{dx}$,據質量作用定律,其間當有

$$\frac{du}{dx} = -ku$$

之關係($k>0$).由是可知

$$u(x) = ce^{-kx},$$

其中 c 表 $x=0$ 時所未化之糖質.據此關係,可見此化學作用永向 $u=0$ 之情形(即完全溶化)進行.

［例五］　電路之接通與截斷.

最後請一論電路(1)接通後,電流(2)之如何增強(或電路截斷後,其如何減弱).設以 R 表電路之電阻(3)以 E 表電動勢(4)(伏特數),則其電流 I 必自 0 逐漸增強至 $\frac{E}{R}$ 而止.故 I

(1)circuit; circuit; Stromkreis.　(2)current; courant; Stromstärke.
(3)resistance; résistance; Widerstand.　(4)electromotive force; force électromotrice; äussere Spannung.

實爲時間 t 之函數．惟其强弱隨電路之自感應[1]現象而異，因之有所謂自感[2] L 者，當電流增强時，即發生一强度爲 $L\frac{dI}{dx}$ 之電動勢，與外電動勢相對抗．然據 Ohm 定律，無論何時，I 與 R 相乘，必等於其時作用於 R 上之電勢差[3]，故有

$$IR=E-L\frac{dI}{dx}.$$

試令

$$f(x)=I(x)-\frac{E}{R},$$

即得

$$f'(x)=-\frac{R}{L}f(x).$$

由是即可決定 $f(x)$ 果爲何種函數，蓋據前所論 $f(x)$ 必爲

$$f(x)=f(0)e^{-\frac{R}{L}x}.$$

惟最初既無電流 $I(0)=0$，則 $f(0)=-\frac{E}{R}$；因此遂得

$$I(x)=f(x)+\frac{E}{R}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}x}\right),$$

而 $I(x)$ 隨時間而變之情形，可於此見之．由此關係，可知電路通後，其電流之强度永向 $\frac{E}{R}$ 趨近．

例　題

1．假定 $f(x)$ 滿足　$f(x+y)=f(x)f(y)$

之關係，試證：　(a) 若 $f(x)$ 有可導性，則 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=e^{ax}$；

(b)* 若 $f(x)$ 有連續性，則 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=e^{ax}$．

2．若有一可導函數 $f(x)$ 滿足

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

則 $f(x)=a\log x$．

3．設有鐳質，在 $t=0$ 時重 1 克，在 $t=10$（如十年後）時，其重量減至0.997 克，問再歷若干時將減至 0.5 克？

4．解下列各微分方程式：

(a) $y'=a(y-\beta)$．　　(c) $y'-ay=\beta e^{ax}$．

(b) $y'-ay=\beta$　　(d) $y'-ay=\beta e^{\gamma x}$．

---

(1) self-induction; self-induction; Selbstinduktion.　(2) coefficient of selfinducton; coefficient de self-induction; Selbstinduktions-Koeffizient.　(3) difference of potential; différence de potential; Potentialdifferenz.

第六節 雙曲函數及其逆函數

3.6.1. 雙曲函數之定義及其特性

將前節所述之指數函數以有理算法聯合之，即有所謂**雙曲函數**(1)產生。因其性質與三角函數頗多相似，遂以 sinh, cosh, tanh 及 coth 表之，其定義如下：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

由此定義，可以推知其特性，茲舉其重要者於後。

(一)此四種函數獨 $\coth x$ 須將 $x=0$ 一點除外，餘皆隨一切 x 而定。試先標繪 $\frac{1}{2}e^x$ 及 $\frac{1}{2}e^{-x}$，即可從而得其圖形如圖 3.12, 3.13, 3.14.

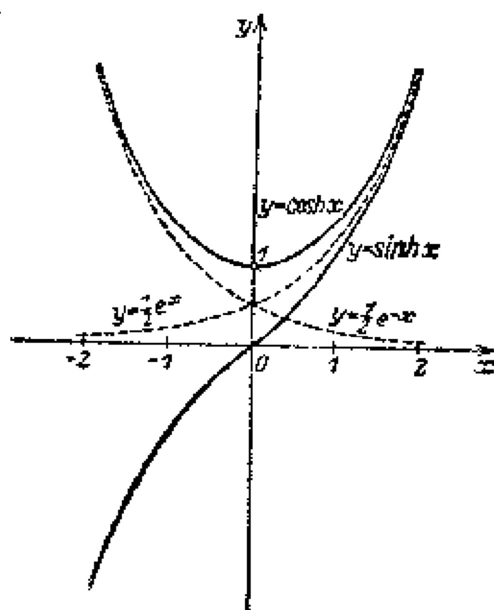


圖3.12

(二) $\cosh x$ 不論 x 如何變化，始終為正數；當 $x=0$ 時取得其最小值，其時之值為 1，即 $\cosh 0=1$。至於 $\sinh x$，其值在 $x=0$ 時為 0。又 $\cosh x$ 為一偶函數，$\sinh x$

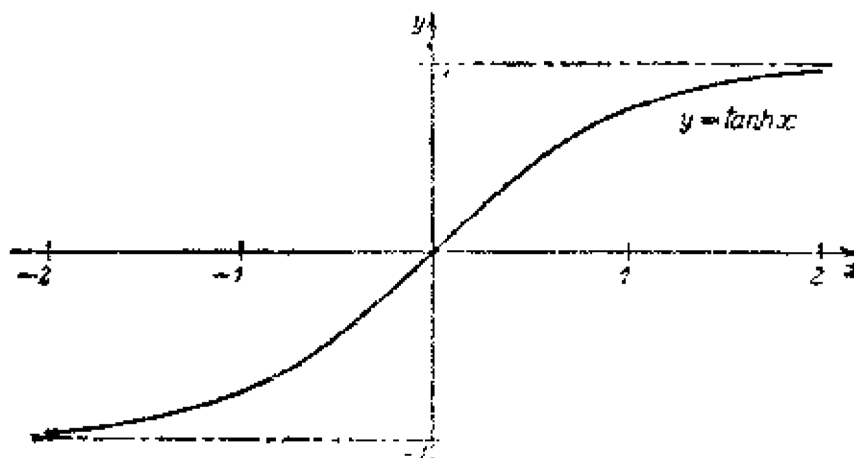


圖 3.13

(1) hyperbolic function; fonction hyperbolique; Hyperbelfunktion.

爲一奇函數，換言之，

$$\cosh x=\cosh(-x),$$

$$\sinh x=-\sinh(-x),$$

此與三角函數相同者.

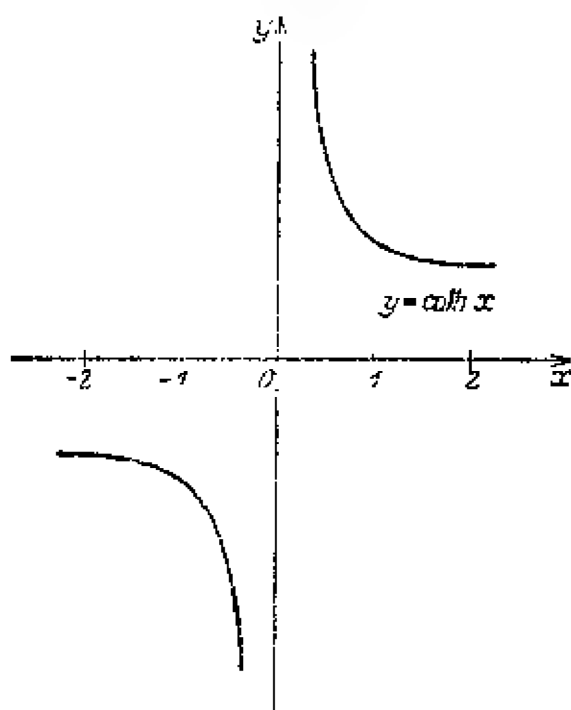


圖 3.14

(三) $\cosh x$ 與 $\sinh x$ 之間，有

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

一項關係存在，可由其定義證之. 如以 t 表自變數，令

$$x=\cosh t,\qquad y=\sinh t,$$

則此關係可寫如 $\quad x^2-y^2=1,$

是爲一雙曲線方程式，以 $y=\pm x$ 爲其漸近線者. 循是以論，當 t 任意在 $-\infty$ 至 ∞ 之間變化時，$x=\cosh t$, $y=\sinh t$ 卽從而繪成一雙曲線. 惟 x 旣受 $x=\cosh t\geqq 1$ 條件之限制，僅得雙曲線之一分支，卽居於右方之一分支.

(四)由雙曲函數之定義可知

$$\cosh(a+b)=\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b,$$

$$\sinh(a+b)=\sinh a\cosh b+\cosh a\sinh b$$

之成立. 欲證之，但注意

$$\cosh(a+b)=\frac{e^a e^b+e^{-a}e^{-b}}{2},$$

$$\sinh(a+b)=\frac{e^a e^b-e^{-a}e^{-b}}{2},$$

復將 $\quad e^a=\cosh a+\sinh a,\qquad e^{-a}=\cosh a-\sinh a,$

$$e^b=\cosh b+\sinh b,\qquad e^{-b}=\cosh b-\sinh b$$

代入其中可矣. 此卽雙曲函數之加法定理，與三角函數又極相似者.

(五)試求雙曲函數之導數，則有如下之結果：

$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\qquad \frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{\cosh^2 x},\qquad \frac{h}{dx}\coth x=-\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

3.6.2. 雙曲函數之逆函數

試以　$t=\operatorname{ar}\cosh x$，　$t=\operatorname{ar}\sinh y$

分別表 $x=\cosh t$ 及 $y=\sinh t$ 之逆函數．考 $y=\sinh t$ 在 $-\infty<x<\infty$ 之變化全程中有獨升性，故其逆函數爲單值．然一觀圖 3.12，即可知 $t=\operatorname{ar}\cosh x$ 非單值，因每一 x，有 t 及 $-t$ 兩數與之相應故．復因 $x=\cosh t$ 無論如何不能小於1，即 $x=\cosh t\geqq 1$，故其逆函數 $\operatorname{ar}\cosh x$ 必受 $x\geqq 1$ 之限制，在變程 $x\geqq 1$ 中，$\operatorname{ar}\cosh x$ 始有確定之值．

如上兩種逆函數可由對數函數表而達之．據

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

令其中 $e^t=u$，可見 u 實滿足一二次方程式，從而獲得其根如下：

$$u=x\pm\sqrt{x^2-1},$$

$$u=y+\sqrt{y^2+1},$$

因 $u=e^t$ 必爲正數之故，此第二式中之平方根非正不可，而第一式中可正可負．由是據 $t=\log u$ 得

$$t=\operatorname{ar}\cosh x=\log(x\pm\sqrt{x^2-1}),$$

$$t=\operatorname{ar}\sinh y=\log(y+\sqrt{y^2+1}),$$

於是 $\operatorname{ar}\cosh x$ 及 $\operatorname{ar}\sinh y$ 竟由對數函數表而出之矣．就前者而論，其中 x 必限於變程 $x\geqq 1$ 之中，復因其中平方根可正可負，故每一 x 有 $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ 及 $\log(x-\sqrt{x^2-1})$ 兩值應之，與 $\operatorname{ar}\cosh x$ 有兩單值支之事適相符合．更就後者言之，則不論 y 如何變化，$\operatorname{ar}\sinh y$ 必有唯一確定之值．

至於 $\tanh t$ 及 $\coth t$ 之逆函數，亦可應用上法討論之．試分別表以 $\operatorname{ar}\tanh x$ 及 $\operatorname{ar}\coth x$，復處處以 x 表自變數，根據前法，令 $e^t=u$，得各由對數函數表達如下：

$$\operatorname{ar}\tanh x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\quad \text{在變程 } -1<x<1 \text{ 中},$$

$$\operatorname{ar}\coth x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},\quad \text{在變程 } x<-1,\ x>1 \text{ 中},$$

讀者可自證之，無待贅也.

最後可根據普遍理論以研討此四種函數之可導性. 考 ar cosh x 及 ar sinh x 之導數必爲

$$\frac{d}{dx}\text{ar cosh }x=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{d}{dx}\text{ar sinh }x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

其中(ar cosh x)$'$ 之兩值與其原函數 $y=\text{ar cosh }x=\log(x\pm\sqrt{x^2-1})$ 之兩單值支相應. 復次，更求 ar tanh x 及 ar coth x 之導數，則有

$$\frac{d}{dx}\text{ar tanh }x=\frac{1}{1-x^2},\qquad \frac{d}{dx}\text{ar coth }x=\frac{1}{1-x^2}.$$

此兩式未可視爲矛盾，因前者之 x 在變程 $-1<x<1$ 中，後者之 x 在 $-1<\frac{1}{x}<1$ 中變化故也. 明乎是，即可從而推知下列諸式：

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\text{ar cosh }x=\log(x\pm\sqrt{x^2-1}),\quad x>1,$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\text{ar sinh }x=\log(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\qquad -1<x<1,$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},\qquad -1<\frac{1}{x}<1.$$

3.6.3. 論雙曲函數與三角函數之相似

雙曲函數與三角函數之相似，前已略及之. 考 $x=\cosh t$ 及 $y=\sinh t$ 滿足

$$x^2-y^2=1$$

之關係，是爲一雙曲線，而 $x=\cos t, y=\sin t$ 則爲點之居於 $x^2+y^2=1$

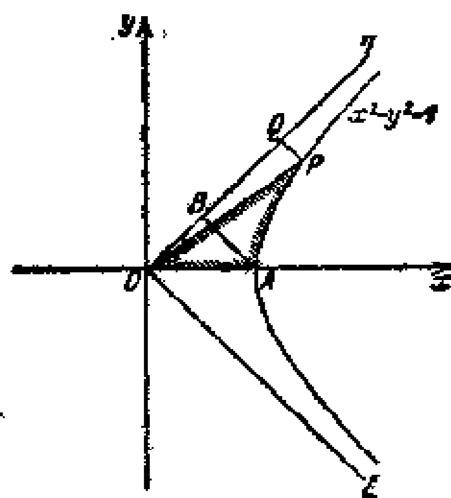


圖3.15

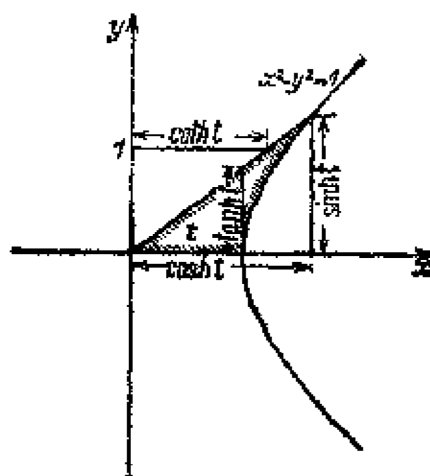


圖3.16

之上者，故三角函數亦常稱之爲圓函數．觀此圓之方程式，其中 t 自有其簡單幾何意義可言；吾人無不知 t 所表示者爲圓之中心角，或此角在圓周上所張之弧，其實卽爲此弧所圍圓扇形[1]面積之二倍；至其面積之爲正爲負，視其角之正負而定．此 t 之意義，自覺顯而易見．現所欲講明者，乃 t 在雙曲函數之意義，與此完全相似，換言之，t 實爲一"雙曲扇形[2]"面積之①二倍，卽圖 3.15 中 OAP 之二倍是矣．此事之證明，殊覺不難．試先將坐標軸轉換如下：

$$x-y=\sqrt{2}\,\xi,$$

$$x+y=\sqrt{2}\,\eta,$$

或

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta),$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta-\xi),$$

則 $x^2-y^2=1$ 將一變而爲 $\xi\eta=\frac{1}{2}$，是卽以其漸近線爲坐標軸，故其形式如是．既作此轉換之後，由圖 3.15 卽可見 OAP 必等於 $ABQP$，其故由於 OAB 與 OPQ 兩三角形之相等．復考 A 點之坐標爲

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \eta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

P 點之坐標爲 $$\xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\qquad \eta=\frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

而 $ABQP$ 面積之兩倍必爲

$$2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)}\frac{1}{2\eta}\,d\eta=\log(x+y)=\log(x\pm\sqrt{x^2-1}),$$

然據 § 3.6.2 所述 t 之意義，所欲證之理已在於是．

明乎以上所述，則雙曲函數之意義，可在一雙曲線上表明之，與三

(1) circular sector; secteur circulaire; Kreissektor. (2) hyperbolic sector; secteur hyperbolique; Hyperbelsektor.

①條是雙曲函數用 $t=\operatorname{ar}\cosh x$ 等符號，ar 卽英文 area 之縮寫也；正與逆三角函數 $t=\operatorname{arc}\cos x$ 等以示 t 爲圓弧，同其用意．

角函數可由一圓表明之理正同，觀圖 3.15，自可瞭然，無待縷述矣．

例　題

1．試證

$$\sinh a+\sinh b=2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

並爲 $\sinh a-\sinh b$，$\cosh a+\cosh b$ 及 $\cosh a-\cosh b$ 推得相似之式．

2．試將 $\tanh(a\pm b)$ 由 $\tanh a$ 及 $\tanh b$ 表達之．

試將 $\coth(a\pm b)$ 由 $\coth a$ 及 $\coth b$ 表達之．

試將 $\sinh\frac{1}{2}a$ 及 $\cosh\frac{1}{2}a$ 由 $\cosh a$ 表達之．

3．求下列各函數之導數：

(a) $\cosh x+\sinh x$；　　(b) $\tanh x-\coth x$；

(c) $\log\sinh(x+\cosh^2 x)$；　　(d) $\operatorname{ar}\cosh x+\operatorname{ar}\sinh x$；

(e) $\operatorname{ar}\sinh(a\cosh x)$；　　(f) $\operatorname{ar}\tanh\frac{2x}{1+x^2}$．

4．試計算一區域之面積，其上由 $y=\cosh x$，其下由 x 軸，左右由 $x=a$ 及 $x=b$ 所圍成者．

第七節　函數之數量級

3.7.1.　何謂數量級

前所論述之各種函數，如 x^a，$\log x$，e^x，$e^{ax}(a>0)$，當其中自變數無限制趨大時，皆隨之而無限制變大．惟同一變大，其間情形殊有不同者．例如 x^3 之趨大，甚於 x^2，其意乃謂 $\frac{x^3}{x^2}$ 亦無限制趨大，而 $\frac{x^2}{x^3}$ 則趨於零．因此之故，若 $\alpha>\beta>0$，吾人常謂 x^α 趨大之等級高於 x^β．

設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 爲兩函數，其絕對值隨 x 而無限制趨大．於是就其趨大情形，並著而比較之，可有等級之分．苟 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ 隨 x 而無限制趨大，則謂 $f(x)$ 之數量級[1]大於 $g(x)$；苟因 $x\to\infty$ 而趨於 0，則謂 $f(x)$ 之數量級小於 $g(x)$．若 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ 在 $x\to\infty$ 時斂於一不等於 0 之極限，或無極限可趨時，至少自限於兩個固定正數之間，則 $f(x)$ 及 $g(x)$ 謂有同一

(1) order of magnitude; ordre de grandeur; Grössenordnung.

數量級．例如 $f(x)=ax^3+bx^2+c$ ($a\neq 0$) 及 $g(x)=x^3$ 兩函數之數量級相同，因 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\frac{ax^3+bx^2+c}{x^3}\right|$ 在 $x\to\infty$ 時斂於 $|a|$．又 x^3+x+1 之數量級大於 x^2+x+1．復次，若 $f(x)$ 之數量級大於 $\phi(x)$，則 $f(x)+\phi(x)$ 之數量級仍與 $f(x)$ 相同，蓋由 $\left|\frac{f(x)+\phi(x)}{f(x)}\right|=\left|1+\frac{\phi(x)}{f(x)}\right|$ 之斂於 1 可以見之．

函數趨大情形，既可彼此比較而有等級之分，吾人似不妨任意立一標準，定 x 之數量級為 1，x^α ($\alpha>0$) 之數量級為 α，於是一 n 次多項式之數量級為 n；更就有理函數言之，其分子高出分母之次數若為 h，則 h 即為其數量級．

如是規定之標準，惜不能普遍適用，蓋函數趨大情形，錯綜複雜，非此簡單數字所能概括而盡．蓋無論 α 如何大，函數之數量級有大於 x^α 者，又無論 α 如何小，函數之數量級有小於 x^α 者；惟如是，此種函數之數量級不能以此法表而出之．

3.7.2. 指數及對數函數之數量級

試一考指數函數趨大之情形，則有如下定理：**設 a 為任何大於 1 之數，則 $\frac{a^x}{x}$ 當 x 趨大時必無限制趨大．**欲證此理，但證下列函數

$$\phi(x)=\log\frac{a^x}{x}=x\log a-\log x$$

在 $x\to+\infty$ 時無限趨大即可．惟觀其導數

$$\phi'(x)=\log a-\frac{1}{x},$$

可知其在 $x\geqq c=\frac{2}{\log a}$ 時必不小於 $\frac{1}{2}\log a$；由是知 $x\geqq c$ 時必有

$$\phi(x)-\phi(c)=\int_c^x\phi'(t)\,dt\geqq\int_c^x\frac{1}{2}\log a\,dt=\frac{1}{2}(x-c)\log a,$$

或
$$\phi(x)\geqq\phi(c)+\frac{1}{2}(x-c)\log a,$$

因此式之右方隨 x 而趨大，故欲證之理已在於是．

此重要定理可用另一方法證明之．試命 $\sqrt{a}=b=1+h$，則 b 自大於 1，h 自非正數不可，換言之，$b>1$，$h>0$；又設 n 為一整數如 $n\leqq x<n+1$，自可假定 x 大於 1，故 $n\geqq 1$．然後據 Bernoulli 不等式

可以推知

$$\sqrt{\frac{a^x}{x}}=\frac{b^x}{\sqrt{x}}=\frac{(1+h)^x}{\sqrt{x}}>\frac{(1+h)^n}{\sqrt{n+1}}>\frac{1+nh}{\sqrt{n+1}}>\frac{nh}{\sqrt{2n}}$$
$$=\frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{n};$$

由是得
$$\frac{a^x}{x}>\frac{h^2}{2}n,$$
故$\frac{a^x}{x}$隨n(即隨x)而無限制變大，可於此見之.

明乎是，得從而推斷下列定理：**苟a爲任何大於1之數，α爲任何正數，則$\frac{a^x}{x^\alpha}$必隨x而趨於無限大**；換言之，**指數函數之趨大必甚於任何冪函數**.欲明其理，但證

$$\frac{a^{\frac{x}{\alpha}}}{x}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{a^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{a^y}{y},\quad\left(y=\frac{x}{\alpha}\right),$$

趨於無限大已足，然此爲前證定理之必然結果，僅令其中x代以$y=\frac{x}{\alpha}$可矣.

復次，據類似之法又可證$\frac{\log x}{x^\alpha}$在$x\to\infty$時必趨於0，換言之，**對數函數之趨大，遠不逮x^α，其中α爲任何小之正數**.欲證此，可令$\log x=y$，於是$\frac{\log x}{x^\alpha}=\frac{y}{e^{\alpha y}}$，然後令$e^\alpha=a$，可見$a$爲大於1之數，由是知$\frac{y}{a^y}$當$y$趨大時必趨於0，惟$y$既與$x$同趨於無限大，則欲證之理，已於此得之矣.此理又可證之如下：若$x>1$，$\varepsilon>0$，則

$$\log x=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi}<\int_1^x\xi^{\varepsilon-1}d\xi=\frac{1}{\varepsilon}(x^\varepsilon-1)$$

之真確，至爲顯然.試令ε小於α，復將此式以x^α除之，則當$x\to\infty$時，必有$\frac{\log x}{x^\alpha}\to 0$，從可識矣.

既明上述結果，吾人不難覓得種種函數，其趨大遠過於指數函數者，如e^{e^x}；或不逮對數函數者，如$\log\log x$.吾人有鑒於此，欲將函數之數量級，以明確之數表出之，其事有所不能.何則，如謂x之數量級爲1，$x^{1+\varepsilon}$之數量級爲$1+\varepsilon$，則無論ε如何小，$x\log x$之數量級當爲介於1及$1+\varepsilon$間之一數，欲求一如是之數，自不可得.不甯唯是，觀函數之

性質，其數量級有無法確定者．例如 $\frac{x^2(\sin x)^2+x+1}{x^2(\cos x)^2+x}$ 在 $x\to\infty$ 時無極限可趨，惟在 $x=n\pi$（n 為一整數）時，其值為 $\frac{1}{n\pi}$，在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 時，其值為 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+1+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，其中分子分母雖同趨於無限大，而兩者之商既不自限於兩正數之間，復不斂於 0，又不趨於無限大，如是而欲比較其數量級之大小，自不可能．其故由於此種函數據上述定義無確定數量級可言也．

3.7.3. 函數在任何一點鄰近之數量級

以上就 $x\to\infty$ 時函數趨大之情形而研討之，若 x 趨於一固定點 ξ 時，函數有隨之而趨於無限大者，其時亦有數量級可言．如 $f(x)=\frac{1}{|x-\xi|}$ 在 $x=\xi$ 點趨大之數量級為 1，$\frac{1}{|x-\xi|^\alpha}$ 在 $x=\xi$ 點趨大之數量級為 α，假定 α 為一正數．

復次，就 $e^{\frac{1}{|x-\xi|}}$ 及 $\log|x-\xi|$ 在 $x\to\xi$ 時之情形論之，前者遠過於 $\frac{1}{|x-\xi|^\alpha}$，後者則不及．欲明其說，當證

$$\lim_{x\to\xi}|x-\xi|^\alpha\, e^{\frac{1}{|x-\xi|}}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\xi}|x-\xi|^\alpha\cdot\log|x-\xi|=0$$

之關係．試令 $\frac{1}{|x-\xi|}=y$，則 $|x-\xi|^\alpha e^{\frac{1}{|x-\xi|}}=\frac{e^y}{y^\alpha}$，又 $|x-\xi|^\alpha\log|x-\xi|=-\frac{\log y}{y^\alpha}$．復注意 $x\to\xi$ 即 $y\to\infty$ 之謂，可知此關係即為前段所已證之理．故本段所論，無新義可言，惟將"無限遠"由 $\frac{1}{|x-\xi|}=y$ 轉移於 ξ 點，在研究方法上或較便利耳．

3.7.4. 函數趨零之數量級

函數趨大情形，可由數量級之概念闡明之，已如上所述矣．據同理，函數趨零，亦有其數量級可言．例如 $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{x^\alpha}$（$\alpha>0$）在 $x\to\infty$ 時同趨於零，惟吾人稱前者趨零之數量級為 1，後者趨零之數量級為 α．復就

$\frac{1}{\log x}$ 及 $x^{-\alpha}$ 趨 0 之情形而並觀之，則因

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha}\cdot\log x=0$$

之故，可知前者之數量級必較後者爲小。

復次，吾人常稱 $x=\xi$ 時 $x-\xi$ 趨 0 之數量級爲 1，$|x-\xi|^{\alpha}$ 趨 0 之數量級爲 α。又據前段所證之理，不難概見下列關係

$$\lim_{x\to 0}(|x|^{\alpha}\log|x|)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(|x|^{-\alpha}e^{-\frac{1}{|x|}}\right)=0$$

之眞確；試尋繹其意，無異謂 $\frac{1}{\log|x|}$ 在 $x\to 0$ 時之趨 0，不及冪函數之速，而 $e^{-\frac{1}{|x|}}$ 則遠過之也。

例　　題

1. 試將下列各函數與 x 之冪比較其在 $x\to\infty$ 時之數量級：

(a) $e^{x^{\beta}}-1$，

(b) $(\log x)^{\beta}$，

(c) $\sin x$.

(d) $\sinh x$.

(e) $x^{\frac{1}{2}}\sin x\cdot\arctan x$.

(f) $x^{\frac{1}{2}}\sin x+\frac{x^2\cos^2 x}{x^2+1}$，

(g) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}$，

(h) $x^{x}-1$，

(i) $\log(x\log x)$.

2. 將題 1 中各函數與 $e^{\alpha x}$，$e^{x^{\alpha}}$，$(\log x)^{\alpha}$ 比較之.

3. 將題 1 中各函數與 x 之冪比較其在 $x\to 0$ 時之數量級.

4. 問 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^{n}}e^{(-e^{x})}$ 是否存在？

5. 求 $e^{(-e^{x})}$ 及 $e^{(e^{-x})}$ 在 $x\to\infty$ 時之極限.

6. 設 $f(x)$ 及其導數在 $x=0$ 點同趨於 0. 試證 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 時趨 0 之數量級大於 x.

7. 試證 $f(x)=\frac{a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^{m}+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，$a_0$，$b_0\neq 0$，當 $x\to\infty$ 時趨大之數量級與 x^{n-m} 相同.

8. 試證 e^{x} 非一有理函數.

9. 試證 e^{x} 不能滿足一代數方程式，其係數爲 x 之多項式者.

第三章附錄

第一節　特殊函數舉例

考函數之定義，其所包羅可謂異常廣泛．其間錯綜複雜之情形，有非最初想像所及者，試略舉數例於後：

［例一］ $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

此函數之值除 $x=0$ 一點外均為確定．當 $x\to 0$，顯有極限 0 存在，何則，令 $\frac{1}{x^2}=\xi$，則其

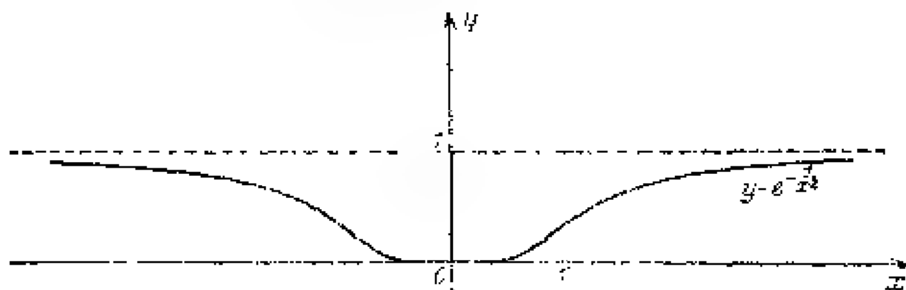


圖 3.17

形式為 $y=e^{-\xi}$，由是可知 $\lim_{\xi\to\infty}e^{-\xi}=0$．因此之故，如補充上述定義，謂其在 $x=0$ 點之值應為 0，則此函數在 $x=0$ 亦有連續性．試標繪其圖，則有圖 3.17．復次，其導數 y' 在 $x\neq 0$ 時為 $y'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，此導數當 $x\to 0$ 時必趨於 0 由 §3.7.3 所論可以見之．更觀 $y'(x)$ 在 $x=0$ 之值：

$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{y(h)-y(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

亦為 0，於此可見 $y'(x)$ 在 $x=0$ 亦有連續性．

若更進而求其在 $x\neq 0$ 時之高重導數，其結果必為 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 乘 $\frac{1}{x}$ 之一多項式，惟如是，若令其中 $x\to 0$，其極限無一非 0．由是以論，$y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不特處處有連續性及可導性，且無論如何高之高重導數均能存在，惟在 $x=0$ 與 y' 同為 0 耳．

［例二］ $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

此函數在 $x>0$ 時與例一完全無異．當 x 自右趨 0 時，則 y 連同其一切導數（初重及高重導數）皆趨於 0．若補充上述定義，謂 y 在 $x=0$ 時之值為 0，則不特 y 在 $x=0$ 有連續性，其導數亦無不連續．此就 x 自右趨 0 言之；設令 x 自左趨 0，則其情形大異．蓋假定 x 為負數而漸趨於 0，則 y 及其導數將無限制趨大．故 $x=0$ 為此函數之一間斷點（見圖 3.18）．其間斷狀態與

有理函數之間斷點頗有不同者。

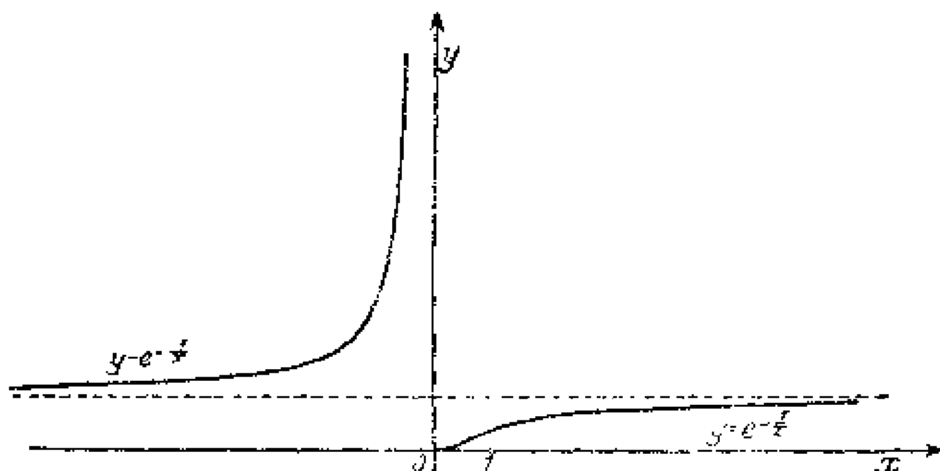


圖3.18

〔例三〕 $y=\tanh\frac{1}{x}=\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

此函數在 $x=0$ 之值未能確定。當 x 由正值趨0時，y 之極限爲1，由負值趨0時，其極限爲 -1，故 $x=0$ 爲此函數之一間斷點，在此呈跳躍之象(見圖3.19)。至其導數：

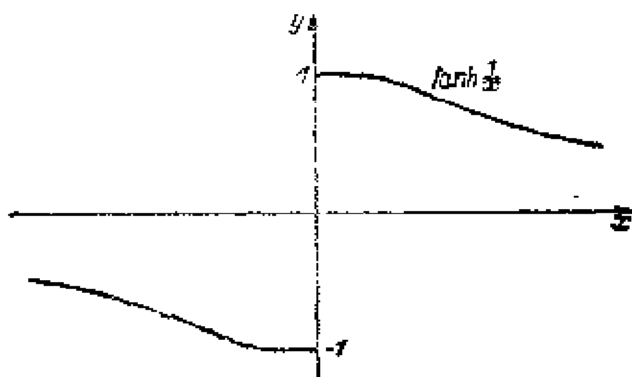


圖 3.19

$$y'=-\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{4}{\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)^2},$$

不論 x 之趨0，自左或自右，必同趨於0，可由§3.7.4所論而識之。

他如 $y=\text{arc}\tan\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 點亦作一跳躍，頗與此相似，茲不贅。

〔例四〕 $y=x\cdot\tanh\frac{1}{x}=x\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

此函數與例三比較，多一因子 x。緣此差異，例三中之間斷點在此竟不復見。不論 x 之趨0，自左或自右，此函數必同趨於0；因此若以0爲其在 $x=0$ 時之值，則在 $x=0$ 亦有連續性。然就其導數

$$y'=\tanh\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

而論，則 $x=0$ 爲其間斷點，與例三正同；蓋 y' 當 x 自右趨0時趨於 $+1$，自左趨0時趨於 -1。試更標繪 $y=x\tanh\frac{1}{x}$ 如圖3.20，可見其圖形在原點呈現一角，其導數在此固未能存在也。

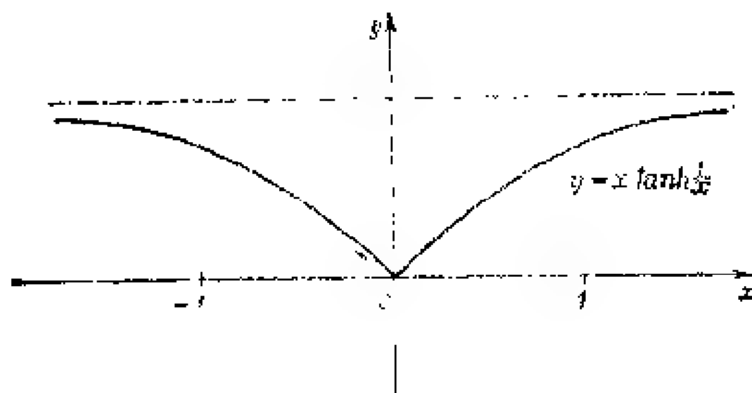


圖3.20

［例五］ $y=x\sin\frac{1}{x}$， $y(0)=0$．

此函數之連續性，前在§1.6.2中已詳論之．而其導數

$$y'=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},\quad (x\neq 0),$$

當 $x\to 0$ 時顯無一極限可趨．若 $x=0$ 時之差商為

$$\frac{y(h)-y(0)}{h}=\sin\frac{1}{h},$$

其值在 $h\to 0$ 時起伏於 $+1$ 及 -1 之間，無極限可言．

第二節　再論函數之可導性

函數之有連續性及可導性者，其導數不必因之而亦有連續性．

［例］ $y=f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，

其值在 $x=0$ 初未確定．若以0為其在 $x=0$ 之值，即 $f(0)=0$，則將因之而處處連續．惟其導數在 $x\neq 0$ 時為

$$f'(x)=-x^2\cos\frac{1}{x}\cdot -\frac{1}{x^2}+2x\sin\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

由是知其在 $x\to 0$ 時無極限可趨．然一觀其差商

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{h}\left(h^2\sin\frac{1}{h}\right)=h\sin\frac{1}{h}$$

當 $h\to 0$ 時實斂於0，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 固能存在，且其值為0．此情形可繪圖以明之．觀圖3.21，可見 $y=x^2\sin\frac{1}{x}$ 上下於 $y=x^2$ 及 $y=-x^2$ 兩圖形間，其斜度既為 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，故其波峯雖隨 $x\to 0$ 而愈趨愈低，但因 $\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=\frac{1}{2n\pi}$ 之值為1，$f'(x)$ 在此將為 -1，又因 $\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ 之值為 -1，故 $f'(x)$ 在此為1．如是而欲為 $f'(x)$ 求一確定極限，自不可得．觀此可見導數之存在為一事，導數之有無連續性又為一事．

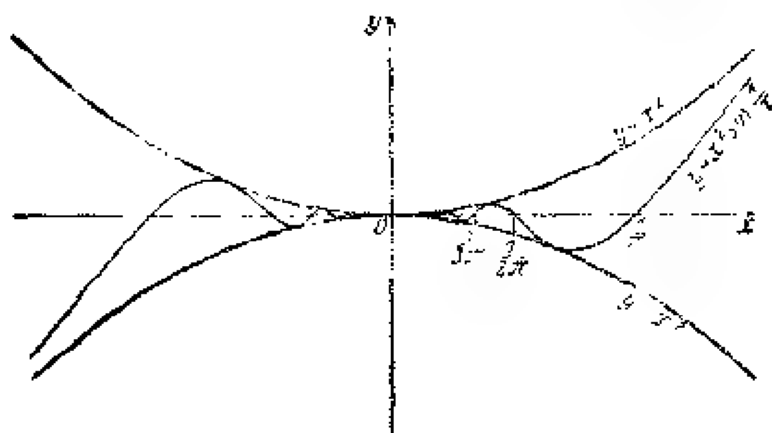


圖3.21

雖然，吾人不難證明下列定理，藉此而上述各例均得有一圓滿之解釋，其言曰：苟 $f(x)$ 在 $x=a$ 點之鄰近有連續性，且其導數 $f'(x)$ 除 $x=a$ 一點尚未明悉外，在其鄰近各點無不存在，又 $\lim_{x\to a} f'(x)=b$，則 $f'(x)$ 在 $x=a$ 點上亦必存在，且其值為 b，即 $f'(a)=b$．其理可由中值定理直接證之．蓋據 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(\xi)$，令 $h\to 0$，其中 ξ 為介於 a 及 $a+h$ 間之一數，因假定 $f'(\xi)$ 斂於 b 之故，即得欲證之理．

繼此又可見下列定理之真確：苟 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，在變程 $a<x<b$ 中有可導性，惟 $x\to a$ 時其導數無限制趨大，則 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 在 $h\to 0$ 時必無限制趨大，如是則其導數當 x 自右趨 a 時亦趨無限大，換言之，$f(x)$ 之圖形在此必有一豎直切線．其理甚明，無待證矣．

第三節　求導數法雜論

A3.3.1．二項式定理之證明

吾人可應用求導數之法，為二項式定理得一簡單證明．若 n 為一正整數，則將 $(1+x)^n$ 展開，必為一 n 次之多項式：

$$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

可以斷言．此為一恆等式，故在 $x=0$ 時亦必真確．由是知 $a_0=1$．復將式之左右壘次求導數，即有

$$n(1+x)^{n-1}=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1},$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此諸式在 x 為任何數時皆能成立. 令其中 $x=0$, 即從而得確定 $a_1, a_2, \cdots$ 之值如下:

$$a_1=n,\quad a_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad a_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\cdots$$

$$a_k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}.$$

於是

$$(1+x)^n=1+nx+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+x^n$$

遂得證矣.

A3.3.2. 高重導數之公式

假定 $f(x)$ 及 $g(x)$ 為兩函數, 其高重導數存在至 n 重. 試屢次求 $f(x)\cdot g(x)$ 之導數,其結果必為:

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)=\frac{d^nf}{dx^n}\cdot g+\binom{n}{1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dg}{dx}+\binom{n}{2}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\cdot\frac{d^2g}{dx^2}+\cdots$$
$$+\binom{n}{1}\frac{df}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}+f\cdot\frac{d^ng}{dx^n},$$

是謂 Leibniz 公式, 其形式可謂簡潔極矣. 若屢次應用鏈導法於 $y=f[\phi(x)]$:

$$\frac{dy}{dx}=f'\phi',$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''\phi'^2+f'\phi'',$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=f'''\phi'^3+3f''\phi'\phi''+f'\phi'''.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其結果遠不如前之簡明,此亦事之無可如何者.

A3.3.3. 再論鏈導法之應用

如欲求 x^x 之導數,可先化為 $x^x=e^{x\log x}$,從而用鏈導法以知

$$\frac{d}{dx}x^x=x^x(\log x+1).$$

據同理，$f(x)^{f(x)}$ 可寫如 $f(x)^{f(x)}=e^{f(x)\log f(x)}$，然後求其導數如下：

$$\frac{d}{dx}f(x)^{f(x)}=f(x)^{f(x)}f'(x)(\log f(x)+1).$$

復次，吾人可用鏈導法將第二章附錄中（97 頁）所已證之普遍中值定理，在較寬之假定下證明之．設 $u=G(x)$ 及 $F(x)$ 在閉程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續性，在開程 $a<x<b$ 中有可導性；又假定 $u=G(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中之獨行性及 $G'(x)$ 無處爲 0，則必有 $u=G(x)$ 之一逆函數 $x=\phi(u)$ 存在，代入於 $F(x)$，即有 $f(u)=F(\phi(u))$，於是據鏈導法得知

$$f'(u)=F'(x)\phi'(u)=\frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

然應用普通中值定理於 $f(u)$，並以 u_1，u_2 分別表 $G(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 時之值（即 $u_1=G(a)$，$u_2=G(b)$）以 ω 表其間之中値，則有

$$\frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}=f'(\omega).$$

或

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

其中 $\xi=\phi(\omega)$ 爲介於 a 及 b 間之中値．是即中値定理之普遍形式，於是又得證矣

例　題

1．求 $f[g\{h(x)\}]$ 之二重導數．

2．求下列各函數之導數：

(a) $e^{\sin x}$　　(b) $(\cos x)^{\tan x}$.

(c) $\log_{v(x)}u(x)$（即 $u(x)$ 之對數，其底爲 $v(x)$ 者，$v(x)>0$）．

3．試證上述 Leibniz 公式．

4．求下列各函數之 n 重導數：

(a) x^3e^{ax}.　　(d) $\cos mx\sin kx$,

(b) $(\log x)^2$.　　(e) $e^x\cos 2x$.

(c) $\sin x\sin 2x$　　(f) $(1+x)^3e^x$.

5. 求 arc $\sin x$ 在 $x=0$ 之 n 重導數，從求 $(\arcsin x)^2$ 在 $x=0$ 之 n 重導數.

6. 試證 $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$.

第四章　積分學理之研討

綜觀前章所論，求導數問題，可謂已得相當圓滿之解決．蓋就其所用方法言之，各有其理想中之普遍性與必然性；就其所得結果言之，凡初等函數之導數復爲初等函數，而函數之由初等函數組成者①，其導數亦得由初等函數表達之．故討論至此，其理論已完成一階段．惟一考與此對峙之問題，其成績遠不逮此．求積分，可根據求導數之結果，逆而得之．如是獲得之積分雖不在少，然欲覓一普遍方法以求初等函數之不定積分，竟不可得．設 $f(x)$ 爲由初等函數所組成者，欲求其不定積分 $F(x)=\int f(x)dx$ 以初等函數表出之，其事無普遍解決之可能，蓋初等函數之積分未必盡爲初等故也．雖然，可求者必設法求之；所惜無普遍方法可施，又無必然定律可循，故各種不同方法之應用，必須注意訓練，務使運用自如，左右逢源而後已．

第一節　最初淺之積分

求積分之法，前在§3.2.1已略述數種．初等函數中之性質特別簡單者，其積分固可直接知之，或逆其導數式而求得之．據是以求得之積分固已不少，茲列舉其最初淺者於後，藉備考覽：

$F'(x)=f(x)$	$F(x)=\int f(x)dx$
1. x^{α}　$(\alpha\neq-1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
2. $\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$
3. e^{x}	e^{x}
4. a^{x}　$(a\neq1)$	$\frac{a^{x}}{\log a}$
5. $\sin x$	$-\cos x$

①初等函數雖無精確之界說，大抵指有理函數、三角函數、對數函數而言．所謂由初等函數組成之函數，即指其逆函數、函函數以及累次應用有理算法所得之函數．

6. $\cos x$	$\sin x$
7. $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(\equiv \operatorname{cosec}^2 x)$	$-\cot x$
8. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\equiv \sec^2 x)$	$\tan x$
9. $\sinh x$	$\cosh x$
10. $\cosh x$	$\sinh x$
11. $\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ $(\equiv \operatorname{cosech}^2 x)$	$-\coth x$
12. $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $(\equiv \operatorname{sech}^2 x)$	$\tanh x$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$	$\begin{cases}\arcsin x\\ -\arccos x\end{cases}$
14. $\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases}\arctan x\\ -\operatorname{arccot} x\end{cases}$
15. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x \equiv \log(x+\sqrt{1+x^2})$
16. $\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$ $(\lvert x\rvert>1)$	$\operatorname{arcosh} x \equiv \log(x\pm\sqrt{x^2-1})$
17. $\dfrac{1}{1-x^2}$ $\begin{cases}\lvert x\rvert<1\\ \lvert x\rvert>1\end{cases}$	$\begin{cases}\operatorname{artanh} x \equiv \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\\ \operatorname{arcoth} x \equiv \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}\end{cases}$

觀表中左右對峙之函數，其右列者為左列之不定積分．左列各函數之積分既已求得，其他積分可輾轉設法歸併於此．所謂求積分之法，其用意要不外輾轉化簡，最後歸於此表中之基本式而已．

第二節　變數交替法之討論及其應用

4.2.1.　交替公式

試令自變數 x 與另一變數 u 發生函數關係 $x=\phi(u)$，代入於一函數 $F(x)$之中，則 $F(x)$ 將從而為 u 之函數：

$$F(x)=F[\phi(u)]=G(u).$$

由是應用微分學中之鏈導法，可知

$$\frac{dG(u)}{du}=\frac{dF}{dx}\phi'(u).$$

苟令　　$F'(x)=f(x)$ 及 $G'(u)=g(u)$,

其意即謂　　$F(x)=\int f(x)dx$ 及 $G(u)=\int g(u)du$;

如是則鏈導法結果可簡寫如

$$g(u)=f(x)\phi'(u),$$

復據定義既有　$G(u)=F(x)$，換言之，

$$\int g(u)du=\int f(x)dx,$$

即可從而推斷　$\int f[\phi(u)]\phi'(u)du=\int f(x)dx \quad (x=\phi(u))$

之成立，考其意義，固與鏈導法完全無異．是謂積分變數之交替公式，與微分學中之鏈導公式相對峙者．有此公式，如欲求得一函數 $g(u)$ 之不定積分，而 $g(u)$ 適有 $f[\phi(u)]\phi'(u)$ 之形式者，可先求 $f(x)$ 之不定積分，然後憑 $x=\phi(u)$ 關係，將 x 以 u 代之，回復於原有變數 u 可矣．

例如　$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}du=\int \frac{dx}{x}=\log|x|=\log|\phi(u)|$

之眞確，即可由前式推斷之．茲更舉具體例題數則於後，以明其用．

欲求 $\int \frac{du}{u\log u}$，但將其中 $\log u$ 視作 $\log u=\phi(u)=x$，即歸於上述形式，故得

$$\int \frac{du}{u\log u}=\log|\log u|,$$

或仍以 x 表積分變數，得

$$\int \frac{dx}{x\log x}=\log|\log x|.$$

他如　$\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|,$

及　$\int \cot x\,dx=\log|\sin x|,$

亦可依此法求得之．復次，苟 $f(\phi(u))=\phi(u)=x$，則上述公式將因而化簡如

$$\int \phi(u)\phi'(u)du=\int xdx=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}[\phi(u)]^2,$$

由是可知　$\int \frac{\log u}{u}du=\frac{1}{2}(\log u)^2.$

最後可試求　$\int \sin^n u\cos u\,du,$

若令其中　$\sin u=\phi(u)=x,$

則　$\int \sin^n u\cos u\,du=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{\sin^{n+1}u}{n+1}.$

以上各例中所得結果，復可求其導數而徵實之．

細考交替式

$$\int f[\phi(u)]\phi'(u)du=\int f(x)dx, \quad (x=\phi(u))$$

之意，不過表示兩積分間之一種形式變換：苟欲求之積分適有

$\int f[\phi(u)]\phi'(u)du$ 之形式，而 $\int f(x)dx$ 之求索較易，則問題即因之而化簡；既得 $\int f(x)dx$，即得復依 $x=\phi(u)$ 之關係令 x 以 u 代之；觀前舉各例，可見其用途之一斑．然欲求索 $\int f(x)dx$，在 $f(x)$ 相當繁複時或不甚易，如是可將此交替式倒轉應用，其法無他．輸入一新變數 u，其新舊交替關係 $x=\phi(u)$，必望其代替之後，足以致 $\int f[\phi(u)]\phi'(u)du$ 之形式較為簡單易求，苟其事能成功，則將其中 u 代以 x，復歸於當初之變數 x 可矣．如是將益見交替式之效用；惟欲求最後一步之成功，必假定 $x=\phi(u)$ 之逆函數存在而後可．故吾人在此當詳述其應用條件．吾人所欲求者，既為 $\int f(x)dx$，自以 x 為最初出發時之變數；在 x 之規定變程中，試創一獨行可導函數 $u=\psi(x)$，其導數 $\psi'(x)$ 無處為零者，則其逆函數自確定而單值，試以 $x=\phi(u)$ 表之，於是其導數必為 $\phi'(u)=\dfrac{1}{\psi'(x)}$．故欲輸入一新變數，其所據公式為

$$\int f(x)dx=\int f[\phi(u)]\phi'(u)du,\quad (u=\psi(x)),$$

要而言之，欲求 $\int f(x)dx$，可先求 $\int f[\phi(u)]\phi'(u)du$，然後依 $u=\psi(x)$ 將其中 u 代以 x 即得． 明乎是，乃知定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 之值必為

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\phi(u)]\phi'(u)du,$$

蓋其上下界 a,b 必同被 $\phi(u)=x$ 或 $u=\psi(x)$ 轉換而為 $\psi(a)$ 及 $\psi(b)$ 故也．

在實際應用時，常見 $f(x)$ 最初即有疊函數之形式如 $f(x)=h(u),u=\psi(x)$．如是即可以 $h(u)$ 作為 $f[\phi(u)]$，並作 $u=\psi(x)$ 或 $x=\phi(u)$ 之轉換，上述交替式得有如下形式：

$$\int h[\psi(x)]dx=\int h(u)\frac{dx}{du}du.$$

例如 $f(x)=\sin 2x$．試令 $u=\psi(x)=2x$，$h(u)=\sin u$，則 $\dfrac{du}{dx}=\psi'(x)=2$．故以 $u=2x$ 作為新變數而輸入 $\int\sin 2x\,dx$，即得

$$\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u=-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

其真確可復求所得結果之導數而徵實之．明乎是，乃有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

復次，欲求 $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$，可創一函數 $u=\psi(x)=\sqrt{x}$，其逆函數為 $x=\phi(u)=u^2$，從而輸入一新變數 u. 因 $\phi'(u)=2u$ 之故，遂得

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_1^2 \frac{u\,du}{u}=2\int_1^2 du=2.$$

4.2.2. 交替公式之另一證明

試將上述交替公式寫成定積分形式如

$$\int_a^b h[\psi(x)]\,dx=\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} h(u)\frac{dx}{du}\,du,$$

自可根據定積分之定義而闡明之. 欲求 $\int_a^b h(\psi(x))dx$，假定其中 a 小於 b，其意乃先將變程 $a\leqq x\leqq b$ 分段，且愈分愈細，求其最長分段趨 0 時之極限而已. 至分段之如何實現，絕無何種條件限制. 苟假定 $u=\psi(x)$ 為一獨升函數，則 x 軸上 $a\leqq u\leqq b$ 之一線段必與 $u=\psi(x)$ 居於 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 之間者一一相應，其中 α 及 β 必為 $\alpha=\psi(a)$ 及 $\beta=\psi(b)$. 試將變程 $\alpha\leqq u\leqq\beta$ 等分① 為 n 段，每段之長各為 Δu，則 $a\leqq x\leqq b$ 之一線段必從而分為 n 段，每段之長不必相等，分別以 Δx_1、Δx_2、$\cdots$，Δx_n 表之，其分點並以 $x_0=a$，x_1，x_2，$\cdots$，$x_n=b$ 表之，如是則

$$\int_a^b h[\psi(x)]dx \text{ 必為 } \sum_{\nu=1}^{n} h[\psi(\xi_\nu)]\Delta x_\nu$$

在 $n\to\infty$ 時之極限②，其中 ξ_ν 乃任何一點，居於 ν 個 x 分段之中者. 此數亦可寫如

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(u_\nu)\frac{\Delta x_\nu}{\Delta u}\Delta u.$$

其中 u_ν 之意，自為 $u_\nu=\psi(\xi_\nu)$. 惟據中值定理，復有

$$\frac{\Delta x_\nu}{\Delta u}=\phi'(\eta_\nu)$$

一項關係之成立，其中 η_ν 表一中值，居於第 ν 個 u 分段之中者，而 $x=\phi(u)$ 則為 $u=\psi(x)$ 之逆函數. 因 ξ_ν 之選擇，絕無條件限制，故可令其與 η_ν 相同，換言之，令 $\xi_\nu=\phi(\eta_\nu)$，$\eta_\nu=\psi(\xi_\nu)$，則上述之數將有

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(\eta_\nu)\phi'(\eta_\nu)\Delta u$$

---

①等分之條件，在此殊非必要.　②此極限之必能存在，可無疑義，蓋據 $x=\phi(u)$ 之均勻連續性，最長之 Δx 必隨 $\Delta u\to 0$ 而趨於 0.

之形式.然後求其 $n\to\infty$ 時之極限,即得

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(u)\frac{dx}{du}du.$$

由是言之,吾人已證明如下之定理:設 $h(u)$ **在變程** $\alpha\leqq u\leqq\beta$ **中爲一連續函數.苟** $u=\psi(x)$ **在變程** $a\leqq x\leqq b$ **中有連續性及獨行性,其導數** $\dfrac{du}{dx}$ **無處爲0,又** $\psi(a)=\alpha,\psi(b)=\beta$**,則**

$$\int_a^b h[\psi(x)]dx=\int_a^b h(u)dx=\int_{\alpha}^{\beta} h(u)\frac{dx}{du}du;$$

淺言之,欲實施 $u=\psi(x)$ 之變換,但將 dx 代以 $\dfrac{dx}{du}du$,並將原有上下界 a,b 分別代以 $\psi(a)$ 及 $\psi(b)$ 可矣.

據此定理,遂得一求積分之法.如欲求 $\int f(x)dx$,可先創一代換 $x=\phi(u)$,從而輸入一新變數 u,使 $\int f(x)dx$ 變爲一已知積分,列於§4.1之表中者,或其形式因而化簡,求之較易者.惟此種替代 $x=\phi(u)$ 是否存在及如何得之,殊無普遍理論可循,初學者宜多事觀摩練習,以求運用之純熟耳.茲舉例於後.

如欲求 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,假定 $|x|<|a|$,可作一轉換如 $x=\phi(u)=au$,由是得①

$u=\psi(x)=\dfrac{x}{a}$,$dx=adu$,於是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{adu}{a\sqrt{1-u^2}}=\text{arc sin}\,u=\text{arc sin}\frac{x}{a},\ |x|<|a|.$$

用同一轉換,又可得

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{adu}{a^2(1+u^2)}=\frac{1}{a}\text{arc tan}\,u=\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{x}{a},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\text{ar sinh}\frac{x}{a},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\text{ar cosh}\frac{x}{a},\ |x|>|a|,$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\text{ar tanh}\dfrac{x}{a}, & |x|<|a|,\\ \dfrac{1}{a}\text{ar coth}\dfrac{x}{a}, & |x|>|a|.\end{cases}$$

其眞確可復求所得結果之導數而證實之.

①吾人常將 $\dfrac{dx}{du}=\phi'(u)$ 寫如 $dx=\phi'(u)du$,以求便利.

惟應用交替公式時所當注意之條件，吾人不惜再三言之．其條件無他，$\psi'(x)$ 在其變程中無處爲 0．即 $\psi'(x)\neq 0$ 處處成立，由是必有一單值之 $x=\phi(u)$ 存在是已．苟此條件未能滿足，則應用結果常流於錯誤．故 $\psi'(x)$ 若在有限個孤點上爲 0 時，當設法將其變程分作若干段，使其僅在分段之端點上爲 0，然後將交替式應用於各分段．由是以論，如 $\psi'(x)$ 僅在有限個點上爲零，而 $\psi(x)$ 仍不失其獨行性，則上述之交替式依然有效也．

4.2.3. 舉例

茲收集各種例題於後，以明變數交替法之用．

［例一］ 應用 $u=1\pm x^2$, $du=\pm 2x\,dx$ 之轉換，得

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1\pm x^2}}=\pm\sqrt{1\pm x^2},$$

$$\int\frac{x\,dx}{1\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\log|1\pm x^2|.$$

［例二］ 利用 $u=ax+b$, $du=a\,dx\,(a\neq 0)$，則有

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\log|ax+b|,$$

$$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1},\ (\alpha\neq -1),$$

$$\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b).$$

［例三］ 應用 $u=\cos x$, $du=-\sin x\,dx$，得

$$\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|,$$

又用 $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$，得

$$\int\cot x\,dx=\log|\sin x|.$$

據類似之轉換 $u=\cosh dx$, $du=\sinh x\,dx$ 及 $u=\sinh x$, $du=\cosh x\,dx$，得

$$\int\tanh x\,dx=\log|\cosh x|,$$

$$\int\coth x\,dx=\log|\sinh x|.$$

［例四］ 如應用 $u=\frac{a}{b}\tan x$, $du=\frac{a}{b}\sec^2 x\,dx$，即可求得下列兩積分

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right),$$

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}=\begin{cases}-\frac{1}{ab}\operatorname{ar\,tanh}\left(\frac{a}{b}\tan x\right);\\ -\frac{1}{ab}\operatorname{ar\,coth}\left(\frac{a}{b}\tan x\right).\end{cases}$$

［例五］ 如欲求 $\int\frac{dx}{\sin x}$，

可先將 $\sin x$ 化爲 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$，然後應用 $u=\tan\frac{x}{2}$，$du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$，於是得

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{du}{u}=\log\tan\frac{x}{2};$$

將其中 x 代以 $x+\frac{\pi}{2}$，復有

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

［例六］ 根據 $2\cos^2x=1+\cos 2x$ 及 $2\sin^2x=1-\cos 2x$ 之關係，復應用 $u=2x$ 之轉換，得

$$\int\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x),$$

$$\int\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x).$$

既得此兩積分，其他積分如

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx \text{ 及 } \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

可分別用 $x=\cos u$，$u=\operatorname{arc}\cos x$ 或 $x=a\cos u(a\neq 0)$歸併於此，如

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{a^2}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

據類似之轉換 $x=a\cosh u$ 或 $x=a\sinh u$，又得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=-\frac{a^2}{2}\operatorname{ar\,cosh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2},$$

及
$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{ar\,sinh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}.$$

復次，如利用 $u=\frac{a}{x}$，$dx=-\frac{a}{u^2}du$，可知

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arc}\sin\frac{a}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{ar\,sinh}\frac{a}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{ar\,cosh}\frac{a}{x}.$$

［例七］ 最後擬試求下列三積分

$$\int\sin mx\sin nx\,dx,\quad\int\sin mx\cos nx\,dx,\quad\int\cos mx\cos nx\,dx,$$

其中 m 及 n 假定爲正整數。根據

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

之關係,復作 $u=(m+n)x$ 及 $u=(m-n)x$ 之變換,即得

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n} - \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right], & m \neq n, \\ \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2mx}{2m}\right), & m = n; \end{cases}$$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\right], & m \neq n, \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 2mx}{2m}\right), & m = n; \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}\right], & m \neq n, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2mx}{2m} + x\right), & m = n. \end{cases}$$

據此又得下列三定積分,在理論及應用上均甚重要者:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

是謂三角函數之垂直關係,在下章中將再論及之。

例 題

求下列各積分,並求其結果之導數以徵實之:

1. $\int x e^{x^2} dx.$
2. $\int x^3 e^{-x^4} dx.$
3. $\int x^2 \sqrt{1+x^3}\, dx.$
4. $\int \frac{\log x}{x} dx.$
5. $\int \frac{dx}{x(\log x)^n}.$
6. $\int \frac{3dx}{9x^2-6x+2}.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$
8. $\int \frac{6x}{2+3x} dx.$
9. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$
12. $\int \frac{x dx}{x^2-x+1}.$
13. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$
14. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2+2x-3x^2}}.$

15. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

16. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$.

17. $\int \frac{dx}{x^2+2ax+b}$.

18. $\int \frac{x^4 dx}{1-x}$.

19. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$.

20. $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$.

21. $\int x^3(\sqrt{1-x^2})^5 dx$.

22. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

23. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$.

24. $\int$ [illegible] $x \sin x\, dx$.

25. $\int$ [illegible].

26. $\int$ [illegible] dx.

27. $\int$ [illegible] $dx \quad (1<a<b)$

28. $\int$ [illegible] $2x^2 dx$.

29. 用變數交替法求

$\int_0^1 (1$ [illegible] $x)^n dx$，其中 n 爲一正整數.

第三節　分部積分法

4.3.1.　分部積分法公式

求積分法之要旨，在乎化簡積分之固有形式；上述之變數交替法，誠爲化簡良法，惟如何得一適當之交替關係，不可以一概論，是其困難所在耳．此外尙有一化簡積分之要道，並常以**分部積分法**稱之．據§3.2.1所述，由導數公式：

$$(fg)' = f'g + fg',$$

必有一積分公式與之對峙：

$$f(x)g(x) = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx,$$

此式亦可寫如

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx,$$

是卽所謂分部積分法公式，其意乃使一積分之求索歸併於另一積分．設有 $\int \omega(x)dx$，其中 $\omega(x)$ 可分裂爲兩函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 相乘之結果，如 $\omega(x) = f(x)\phi(x)$，而其一之積分較爲易得，如假定

$$g(x) = \int \phi(x)dx$$

爲已知，則 $g'(x) = \phi(x)$，於是欲求 $\int \omega(x)dx = \int f(x)\phi(x)dx = \int f(x)g'(x)dx$,

但求另一積分 $\int g(x)f'(x)dx$ 即可，而後者之求索或較易，則問題即因之而化簡．復因 $\omega(x)$ 之視作 $\omega(x)=f(x)\phi(x)=f(x)g'(x)$，其道甚多，故此法得以種種不同形式應用之，觀下段諸例，自能概見．

上述之分部積分式，若以定積分之形式表出之，則有

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$$
$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

4.3.2. 舉例

茲略舉數例於後，藉以明分部積分法之用：

〔例一〕 欲求 $\int \log x\,dx$，可將 $\log x$ 視作 $\log x=1\cdot\log x$，以 $f(x)=\log x$，$g'(x)=1$，於是 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=x$，根據分部積分法，遂有

$$\int \log x\,dx=x\cdot\log x-\int\frac{x}{x}dx=x\log x-x;$$

若更求右方之導數，必重歸於 $\log x$．

〔例二〕 若令 $f(x)=x$，$g'(x)=e^x$，可知

$$\int xe^x dx=e^x(x-1);$$

據同理，又得 $$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x$$

及 $$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x.$$

〔例三〕 若以 $f(x)=\log x$，$g'(x)=x^\alpha$，則有

$$\int x^\alpha\log x\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x-\frac{1}{\alpha+1}\right),$$

在此自必假定 $\alpha\neq-1$．若 $\alpha=-1$，則

$$\int\frac{1}{x}\log x\,dx=(\log x)^2-\int\log x\cdot\frac{dx}{x},$$

將右方之積分移於左方，即得

$$\int\frac{1}{x}\log x\,dx=\frac{1}{2}(\log x)^2.$$

〔例四〕 欲求 $\int \arcsin x\,dx$，可令 $f(x)=\arcsin x$，$g'(x)=1$，於是得

$$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

復用交替法求右方之積分，即得

$$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$$

據同理，可求得 $$\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

［例五］ 有必要時,當將分部積分法累次應用.如下之例即是用二次後所得:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

由是即知

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx).$$

據同理,又得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx).$$

4.3.3. 遞演公式

吾人所欲求之積分,其中常含有一整數,如

$$\int\cos^n x\,dx,\quad\int\sin^n x\,dx,\quad\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

(n,m 表整數)其淺顯者也.若應用分部積分法以求之,得歸於另一積分,其中整數較小於前;

如
$$\int\cos^n x\,dx=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx,$$

將式之右方寫如

$$\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\cos^n x\,dx$$

得
$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$$

據此公式,$\int\cos^n x\,dx$ 將依 $\int\cos^{n-2}x\,dx$ 而定,而後者復可用分部積分法以化簡之.如是逐步進行,直至最後將有

$$\int\cos x\,dx=\sin x\quad 或\quad\int dx=x,$$

視 n 爲奇數或爲偶數而異.據同理,又得

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx,$$

及
$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx;$$

諸如此類,皆稱之爲遞演公式(1).由此公式,自可推知 $n=2$ 時必有

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x),$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x),$$

其結果前於§4.2.3用另一方法早已求得之矣.

最後備舉例題數則於後,至其詳證,讀者可自求之:

(1) recurrence formula; formule récurrente. Rekursionsformel.

$$\int (\log x)^m dx = x(\log x)^m - m\int (\log x)^{m-1} dx,$$

$$\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx,$$

$$\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\, dx,$$

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\, dx,$$

$$\int x^a (\log x)^m dx = \frac{x^{a+1}(\log x)^m}{a+1} - \frac{m}{a+1}\int x^a (\log x)^{m-1} dx, (a \neq -1).$$

63. 關於π之 Wallis 公式

π之性質,前已略述之.茲欲講明者,為π與整數間之一種關係.此關係可由 $\int \sin^n x\, dx$ 之遞演式推論得之,故本段所論,作為前段之一種應用可也.

假定 $n>1$,據前所述,既有

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx;$$

試取0及 $\frac{\pi}{2}$ 為界,求其定積分,則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx, \quad n>1,$$

復用遞演式於式之右方,則 n 為偶數 $n=2m$ 時,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

當 n 為奇數 $n=2m+1$ 時,必有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx;$$

由是得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}.$$

應用除法,可由是以知

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdots\frac{2m\cdot2m}{(2m-1)(2m+1)}\cdot\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx}.$$

列於此式右方兩積分之商當 $m\to\infty$ 時必斂於1.何則,在變程 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 中,必有

$$0<\sin^{2m+1}x \leqq \sin^{2m}x \leqq \sin^{2m-1}x,$$

故 $$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx$$

之真確，顯而可見．將此式兩方各以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx$ 除之，復根據適所證明之關係，知

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx}=\frac{2m+1}{2m}=1+\frac{1}{2m}.$$

遂得 $$1\leqq\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx}\leqq1+\frac{1}{2m}.$$

由是令 $m\to\infty$ 卽爲欲證之理．此理旣證，遂得如下推斷

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1},$$

是常稱之爲 Wallis 公式，由是可見 π 與整數之關係．苟注意

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{2m+1}=1,$$

卽有 $$\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m-2)^2}{3^2\cdot5^2\cdots(2m-1)^2}\cdot2m=\frac{\pi}{2};$$

由上式取平方根，同時將分子分母以 $2\cdot4\cdots(2m-2)$ 乘之，則

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2m-2)}{3\cdot5\cdots(2m-1)}\sqrt{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m-2)^2}{(2m-1)!}\sqrt{2m}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m)^2}{2m!}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2m},$$

由是得 $$\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\,2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}=\sqrt{\pi},$$

是爲 Wallis 公式之另一形式，後將利用及之（參閱第七章附錄）．

例　題

求下列各積分(例題 1－14)：

1. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2x}\,dx.$　2. $\int\frac{x^7}{(1-x^2)^{[illegible]}}\,dx.$　3. $\int x^2\cos x\,dx.$

4. $\int x^3e^{-x^2}\,dx.$　5. $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx.$（$n$ 爲正整數）．

6. $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx.$（$n$ 爲正整數）　7. $\int x^3\cos x^2\,dx.$

8. $\int\sin x^4\,dx.$　9. $\int\cos^6x\,dx.$　10. $\int x^4\sqrt{1-x^2}\,dx.$

11. $\int x^2e^x\,dx.$　12. $\int\frac{\log x}{x^n}\,dx.$（[illegible]）

13. $\int x^m \log x\, dx.$　　$(m \neq 1)$　　14. $\int x^2 (\log x)^2 dx.$

15. 試證下列公式：　$\int e^x p(x) dx = e^x [p(x) - p'(x) + p''(x) - + \cdots]$，

其中 $p(x)$ 爲任何多項式.

16. 證 $\int e^{-x^2} x^n\, dx$ 當其中 n 爲任何正奇數時可由初等函數表達之.

17. 證 $\int e^{-x^2} x^n\, dx$ 當其中 n 爲任何偶數時可由初等函數及積分 $\int e^{-x^2} dx$ 表達之.
($\int e^{-x^2} dx$ 之值現已立表.)

18. 試證　$\int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x f(u)(x-u) du.$

19. 上題所示爲二疊積分之公式. 試證 $f(x)$ 之 n 疊積分爲

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(u)(x-u)^{n-1} du.$$

第四節　有理函數之積分

初等函數中之最簡者，首推多項式(亦稱整有理函數). 其次，則爲有理函數：

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

其中 $f(x)$ 及 $g(x)$ 爲兩整有理函數如

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0,$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0,$$

並假定 $n > 0$，又 $m < n$. 所以假定 $n > 0$ 者，意謂 $g(x)$ 爲一多項式而非一常數；苟爲一常數，則 $R(x)$ 爲一整有理函數，其積分又爲一整有理函數，自無待討論矣. 所以假定 $m < n$ 者，蓋 m 若大於 n，可將 $f(x)$ 以 $g(x)$ 除之，得一剩餘，爲一多項式之次數小於 n 者，換言之，在 $m > n$ 時，$f(x)$ 可寫如 $f(x) = q(x) g(x) + r(x)$，其中 $q(x)$ 及 $r(x)$ 爲兩多項式，而 $r(x)$ 之次數小於 n. 惟如是，欲求 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 之積分，但求 $q(x)$ 及 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 之積分已足，而前者不成問題，故現所欲討論者，如何求 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 之積分，其中分子之次數 m 小於分母之次數 n，即通俗所謂真分數者是已. 考 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 之形式，可簡化之，使其成爲 $\frac{a_\nu x^\nu}{g(x)}$ 諸函數之和，故最先決之問題，爲如何求 $\frac{x^\nu}{g(x)}$ 之積分.

4.4.1. 有理函數之基本式

試先討論$\frac{x^\nu}{g(x)}$，其中 $g(x)$ 特別簡單者如

$$g(x)=x,\qquad g(x)=1+x^2,$$

或

$$g(x)=x^n,\qquad g(x)=(1+x^2)^n,\qquad (n\text{ 為正整數}).$$

是為最重要之形式，蓋其他分數 $\frac{f(x)}{g(x)}$，其分母$g(x)$為直線性函數之冪如$g(x)=(\alpha x+\beta)^n(\alpha\neq 0)$，或定號二次式①之冪如$g(x)=(ax^2+2bx+c)^\nu$皆可由變數交替法歸併於此。就前者言之，令 $\xi=\alpha x+\beta$，則$\frac{d\xi}{dx}=\alpha$ 及 $x=\frac{1}{\alpha}(\xi-\beta)$ 皆為 ξ 之一次函數，而 $f(x)$ 變為 ξ 之函數 $\varphi(\xi)$ 後仍不變其原有次數，故得

$$\int\frac{f(x)}{(\alpha x+\beta)^n}dx=\frac{1}{\alpha}\int\frac{\varphi(\xi)}{\xi^n}d\xi.$$

就後者言之，因

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(ax+b)^2+\frac{d^2}{a}\ (d^2=ac-b^2,d>0,a\neq 0.)$$

之故，試令

$$\xi=\frac{ax+b}{d},$$

則其分母將變為$\left[\frac{d^2}{a}(1+\xi^2)\right]^\nu$. 由是以論，有理函數之分母為一次函數之冪，或定號二次式之冪者，皆得歸併於下列諸式

$$\frac{1}{x^n},\quad\frac{x^{2\nu}}{(x^2+1)^n},\quad\frac{x^{2\nu+1}}{(x^2+1)^n};$$

其中 ν 即假定為 0 亦可，蓋任何有理函數之積分均可輾轉歸併於下列三種基本式也：

$$\frac{1}{x^n},\quad\frac{1}{(x^2+1)^n},\quad\frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

4.4.2. 基本式之積分

前段所述第一式$\frac{1}{x^n}$之積分，在 $n=1$時為 $\log|x|$，$n>1$ 時為$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$，故無論如何，為一初等函數。至於第三式$\frac{x}{(x^2+1)^n}$，可用交替法令 $\xi=x^2+1$，$2xdx=d\xi$ 而求其積分如下：

---

①二次式 $q(x)=ax^2+2bx+c$ 當其中 x 為任何實數時始終為正或負者，換言之，$q(x)=0$ 之無實數根者，謂之定號二次式。欲求二次式定號，其必要與充分條件自為 $ac-b^2>0$。

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+1), & 若\ n=1, \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}, & 若\ n>1. \end{cases}$$

更就第二式論之，欲求
$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},$$
其中 n 大於 1 者，可用遞演法，蓋由

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n},$$

可知
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n}.$$

而列於最右之一積分可用分部積分法以得之；試令

$$f(x)=x,\quad g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n},$$

則據前已求得之

$$g(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}},$$

即有

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

由是將求 I_n 之問題歸併於求 I_{n-1} 之問題．苟 $n-1>1$，則當再用此法以化簡之，如是遞推，最後必得

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tan} x.$$

循是以觀，可見 I_n 得由有理函數及 arc tan x 表而達之①.

復次，吾人亦可用 $x=\tan t$ 之交替法以求 $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ 之積分，蓋如是則 $dx=\sec^2 t dt$，$\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 t$，從而得，

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \cos^{2n-2} t\, dt,$$

前在§4.3.3 已論及之.

4.4.3. 有理函數之分解

既明上述之理，則有理函數之最普遍者，亦可設法求其積分矣．茲欲討論之有理函數 $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，可假定其中分子之次數小於分母，即所謂真分數者是．此真分數可析為其他真分數之和，其中分母為一次

①據同理，又可求 $\frac{1}{(x^2-1)^n}$ 之積分，蓋應用遞演法，最後必歸於 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar\,tanh} x$（或 ar coth x）.

函數之冪而分子為常數者，或分母為定號二次式之冪而分子為一次函數者．此種分數無一不可歸併於前段所論之三種基本式．故欲求 $R(x)$ 之積分，其先決問題，乃如何將其分裂為此種真分數之和，換言之，如何將其分解而已．

據代數學所論，任何多項式 $g(x)$ 可化為

$$g(x)=a(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x^2+2b_1x+c_1)^{r_1}(x^2+2b_2x+c_2)^{r_2}\cdots$$

之形式，其中 α_1 為 $g(x)=0$ 之 l_1 重根，α_2 為其 l_2 重根，而 $x^2+2b_\nu x+c_\nu$ 則表示定號二次式，有 $r_1, r_2, \cdots$ 重共軛複根者．所謂 $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ 之分解，其意無他，必能為每一 $(x-\alpha)^l$ 求得一式如

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(x-\alpha)^l},$$

且為每一 $Q^r(x)=(x^2+2bx+c)^r$ 求得一式如

$$\frac{B_1+C_1x}{Q}+\frac{B_2+C_2x}{Q^2}+\cdots+\frac{B_r+C_rx}{Q^r},$$

使 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 為此諸式之總和．惟如是，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 遂得析為種種真分數之和，而就此種分數之形式言之，不外前段所論之三種基本式而已。

在特殊情形之下，此種分解可以一望而知．如 $g(x)=x^2-1$，則

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right),$$

至為顯明．因此遂得

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

又如 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，則

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{x-\beta},$$

故
$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|.$$

要而論之，無論何種有理函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$，苟其 $g(x)$ 之形式為 $g(x)=(x-\alpha)^kh(x)$，其中 $h(\alpha)\neq0$，則因

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)(x-\alpha)^k}=\frac{1}{h(\alpha)}\cdot\frac{f(x)h(\alpha)-f(\alpha)h(x)}{(x-\alpha)^kh(x)}$$

之故，可見右方之分子在 $x=\alpha$ 時必等於 0；因此，據代數學定理，必可被 $(x-\alpha)^m$ 除盡 $(m\geqq 1)$，換言之，其形式必為 $h(\alpha)(x-\alpha)^m f_1(x)$，其中 $f_1(x)$ 為一多項式，在 $x=\alpha$ 時不等於 0 者. 如以 β 表 $\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}$，則上式將為

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\beta}{(x-\alpha)^k}=\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{k-m}h(x)},$$

循是以推，可將 $(x-\alpha)$ 出現於分母之次數逐步減少. 若 $g(x)=0$ 尚有其他實根或複根；換言之，$g(x)$ 所含之其他因子，亦可依法處理之. 故 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 如何分解之道，於此可以概見.

苟 $g(x)=0$ 之根均為實數且彼此不同者，即 $g(x)$ 之形式為 $g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，其中 $\alpha_i\neq\alpha_k\,(i\neq k)$ 者；則

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-\alpha_n},$$

其分解自特別簡易；如欲知 a_1，但將式之左右各乘 $(x-\alpha_1)$，約去左方分子分母所公有之 $(x-\alpha_1)$，復令 $x=\alpha_1$，即得

$$a_1=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}=\frac{1}{g'(\alpha_1)},$$

其他 $a_2, a_3, \cdots a_n$ 等亦可依此求得之，故此可謂為最簡單之情形. 茲更舉例於後：

［例一］ 設有 $\frac{1}{x^2(x-1)}$，據上述之理可分解如

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2},$$

欲規定其中之 a, b, c，可將式之兩方各乘 $x^2(x-1)$，得一二次式

$$1=(a+b)x^2-(b-c)x-c;$$

或
$$(a+b)x^2-(b-c)x-c-1=0;$$

此式如能成立，其中係數必一一為 0 而後可：

$a+b=b-c=c-1=0$，從而知 $c=-1, b=-1, a=1$. 故

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2},$$

由是得
$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\log|x-1|-\log|x|+\frac{1}{x}.$$

［例二］ 設有 $\frac{1}{x(x^2+1)}$，其中 $f(x)=x(x^2+1)$ 有兩複根者，可分解如

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1};$$

但其中 a,b,c 可由 $a+b=c=a-1=0$ 規定之，於是

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

從而知 $$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

［例三］ 設有兩種試劑溶解而起二分子反應[1]，假定在每單位體積中，其一之濃度原爲 a 克分子，其他原爲 b 克分子，$(a<b)$，又在時間 t 之後，每單位體積中有 x 克分子之化合物出現，如是根據化學中之質量作用定律，x 隨 t 而增之速度當爲 $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$，其中 k 爲一常數。欲據是以求 $x(t)$，不如求其逆函數 $t(x)$ 之爲易。蓋由是關係，可知

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{k(a-x)(b-x)}=\frac{1}{k(b-a)}\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}\right);$$

據此以求其積分，卽有

$$kt=\frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x}+c,\qquad x<a<b.$$

惟 $t=0$ 時，尙無化合物出現，卽 $x=0$，因之

$$\frac{1}{a-b}\log\frac{a}{b}+c=0,$$

於是 c 之值乃隨之而定，故 $$kt=\frac{1}{a-b}\log\frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}},$$

或再求其逆函數，卽得 $$x=\frac{ab(1-e^{(a-b)kt})}{b-ae^{(a-b)kt}}.$$

［例四］ $\frac{1}{x^4+1}$ 之積分，昔 Leibniz 曾感覺其難。現擬將其分母寫如：

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x),$$

於是 $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

其中 a,b,c,d 當由

$$(a+c)x^3+(b+d-a\sqrt{2}+c\sqrt{2})x^2+(a+c-b\sqrt{2}+d\sqrt{2})x+(b+d-1)=0$$

規定之，得 $$a=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad d=\frac{1}{2},$$

故 $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

---

(1) bimolecular reaction; réaction bimoléculaire; bimolekulare Reaktion.

由是知

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|x^2+\sqrt{2}x+1|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|x^2-\sqrt{2}x+1|$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tan}(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tan}(\sqrt{2}x-1).$$

例　　題

求下列各積分:

1. $\int\frac{dx}{2x-3x^2}$.
2. $\int\frac{dx}{x^2-x}$.
3. $\int\frac{3dx}{x(x+1)^3}$.
4. $\int\frac{x^2+x+1}{3x^2-2x+5}dx$,
5. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
6. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
7. $\int\frac{dx}{1-x^3}$.
8. $\int\frac{dx}{1+x^3}$.
9. $\int\frac{(x-3)}{(x^2+1)(x-2)}dx$.
10. $\int\frac{x+x}{(x^2-1)(x+2)}dx$.
11. $\int\frac{x^6}{1-x^4}dx$.
12.* $\int\frac{dx}{x^6+1}$.
13. $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}$.
14. $\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

第五節　函數之有理化

4.5.1. 三角及雙曲函數之有理化

欲求有理函數之積分,其法已如上述.其他函數,如三角及雙曲函數,得藉變數交替法化爲有理函數.如吾人既知

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

之關係,苟令 $t=\tan\frac{x}{2}$,則 $\sin x$ 及 $\cos x$ 均爲 t 之有理函數

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.復因 $x=2\text{arc tan}\,t$ 之故,可知

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2},$$

故 $\frac{dx}{dt}$ 亦爲 t 之有理函數.

此種變數交替法,有其極簡單之幾何意義,故可繪圖以闡明之.試作一圓 $u^2+v^2=1$ 如圖

4.1. 荷其中 POT 角以 x 替之，則 $u=\cos x, v=\sin x$. 於是 OSP 角，其頂在 $u=-1, v=0$ 點者，必等 $\frac{x}{2}$ 無疑，於是 t 之意義即可見之，若 $t=\tan\frac{x}{2}$ [illegible] 由 [illegible] 言，若 P 由 S 點起，依正向沿圓一周，換言之，當 x 由 $-\pi$ 變至 $+\pi$，t 之變程為 $-\infty<t<+\infty$.

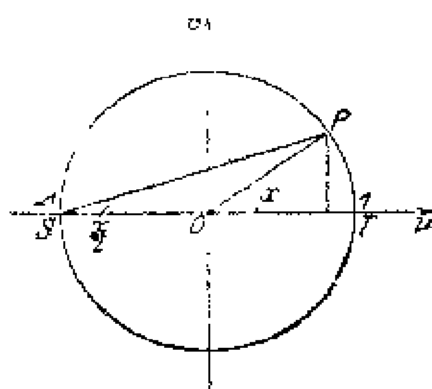


圖4.1

更考雙曲函數 $\cosh x$ 及 $\sinh x$ 之定義：

$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 及 $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，

可知 $e^x=\tau$ 之轉換必可使其化為 τ 之有理函數：

$$\cosh x=\tfrac{1}{2}\left(\tau+\tfrac{1}{\tau}\right),\quad \sinh x=\tfrac{1}{2}\left(\tau-\tfrac{1}{\tau}\right),$$

而 $\frac{dx}{d\tau}=\frac{1}{\tau}$ 亦為 τ 之有理函數．惟欲表示其與三角函數極相類似，亦可創一變數交替 $t=\tanh\frac{x}{2}$，使 $\cosh x$，$\sinh x$ 及 $\frac{dx}{dt}$ 皆得有理化：

$$\sinh x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1-t^2}.$$

至 t 在此亦有其幾何意義，與前相似者，觀圖 4.2 自明，可不贅述．惟 t 在討論三角函數時，必在 $-\infty<t<\infty$ 間變化，庶可獲得 $\sin x$ 及 $\cos x$ 一切可能之值，在討論雙曲函數時，t 之變程僅限於 $-1<t<1$，不可不注意及之．

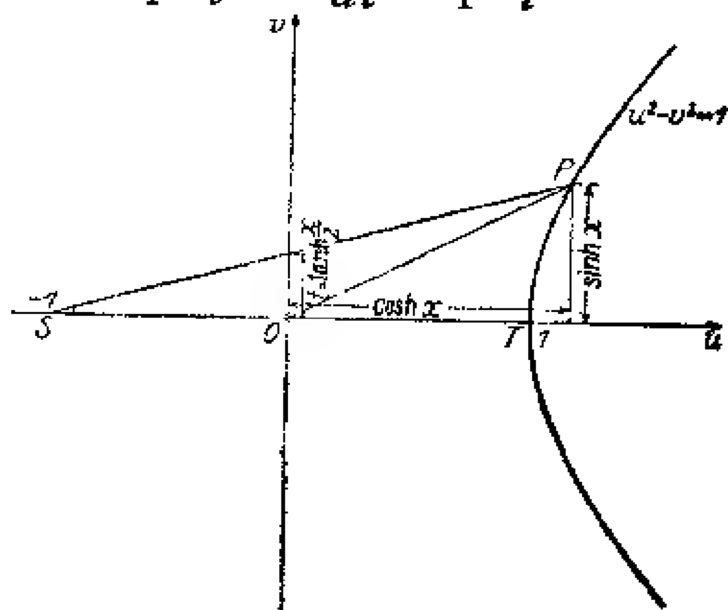


圖4.2

既明有理化之義，乃可分別討論下列各種情形：

(一) $R(\cos x, \sin x)$．　設有一函數，為 $\cos x$ 及 $\sin x$ 用有理算法組合而成，如

$$\frac{3\sin^2 x+\cos x}{3\cos^2 x+\sin x},$$

謂之 $\cos x$ 及 $\sin x$ 之有理式，以 $R(\cos x, \sin x)$ 表之．試令 $t=\tan\frac{x}{2}$，則

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

將化爲 $$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}.$$

於是得一有理函數之積分，可應用前節所述之法以求之。

(二) $R(\cosh x, \sinh x)$ 此爲 $\cosh x$ 及 $\sinh x$ 之有理式．若輸入一新變數 t 如 $t=\tanh\frac{x}{2}$，則

$$\int R(\cosh x, \sinh x)\,dx=\int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1-t^2},$$

式之右方爲一有理函數之積分矣．在此，如令 $e^x=\tau$，則 $\int R(\cosh x, \sinh x)\,dx$ 之有理化，亦可實現．

(三) $R(x, \sqrt{1-x^2})$． 欲求 $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$，其中 $R(x, \sqrt{1-x^2})$ 爲 x 及 $\sqrt{1-x^2}$ 以有理算法組合而成者，可令

$$x=\cos u,\ \sqrt{1-x^2}=\sin u,\ dx=-\sin u\,du,$$

使歸於上述之(一)，然後復用 $t=\tan\frac{u}{2}$ 以求其有理化．此先後兩次變替可合併爲一而實施之：

$$\sqrt{1-x^2}=\sin u=\frac{2t}{1+t^2},$$

故僅求 $$\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2},$$

即可使有理化實現．至 x 與 t 之直接關係，可由是而知其爲

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(四) $R(x, \sqrt{x^2-1})$． 如欲求 $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$ 之有理化，可用類似之法，以 $x=\cosh u$ 代入，使歸於上述之(二)；或直接用

$$t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\tanh\frac{u}{2}$$

亦可．

(五) $R(x, \sqrt{x^2+1})$． 欲求 $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$，可先輸入 u 如 $x=\sinh u$，$\sqrt{x^2+1}=\cosh u$，$dx=\cosh u\,du$，使歸於上述之(二)；然後令 $e^u=\tau$ 或 $\tanh\frac{u}{2}=t$ 以求其有理化．此先後兩次變替可合併爲一而實施之，但求 τ 與 x，及 t 與 x 發生如下關係可矣：

$$\tau = x + \sqrt{x^2+1},$$

$$t = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

(六)$R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$． 若 $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})dx$，其中 $ax^2+2bx+c$ 爲任何二次式，得由一適當之變數交替，歸於上述情形之一．蓋

$$ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{ac-b^2}{a}$$

在 $ac-b^2>0$ 時可替入一新變數 ξ，如 $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$，使 $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ 化爲 $\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\sqrt{\xi^2+1}$，又 $\frac{dx}{d\xi} = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}$，於是即得一積分之屬於(五)者，惟必假定 a 爲正數，庶 $\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}$ 不致爲虛數耳．苟 $ac-b^2=0, a>0$，則因

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

之故，其有理化固早已實現．復次，若 $ac-b^2<0$，則當輸入一新變數 ξ，如 $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$，於是

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\frac{b^2-ac}{a}}\sqrt{\xi^2-1};$$

由是以論，若 $a>0$，則 $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$ 爲一積分之屬於(四)者；若 $a<0$，則可將上列之根號寫如 $\sqrt{\frac{b^2-ac}{-a}}\sqrt{1-\xi^2}$，從而得一積分之屬於(三)者．

(七) $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$． 試用一新變數 ξ，如

$$\xi = \sqrt{\alpha x+\beta},$$

則 $$\alpha x+\beta = \xi^2, \quad x = \frac{\xi^2-\beta}{\alpha}, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{\alpha},$$

於是即得

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx$$

$$= \int R\left(\frac{\xi^2-\beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{1}{\alpha}[a\xi^2-(a\beta-b\alpha)]}, \xi\right)\frac{2\xi}{\alpha}d\xi,$$

是已歸於上述之(六)矣.

(八)$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$. 苟用一新變數 ξ, 如

$$\xi^n=\frac{ax+b}{\alpha x+\beta},$$

則
$$x=\frac{-\beta\xi^n+b}{\alpha\xi^n-a},\quad \frac{dx}{d\xi}=\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha\xi^n-a)^2}\cdot n\xi^{n-1},$$

於是

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx=\int R\left(\frac{-\beta\xi^n+b}{\alpha\xi^n-a},\xi\right)\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha\xi^n-a)^2}\cdot n\xi^{n-1}d\xi,$$

是爲一有理函數之積分.

4.5.2. 再論交替法

綜觀上論,乃應用變數交替法以求三角或雙曲函數積分之有理化,庶前節所述之法又得實用,不可謂非學理上之成功.惟有理函數之積分,未必較其他積分爲簡,故應用之際,萬不可拘泥於一端,轉忽其主旨之所在.如

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx,$$

若用 $t=\tan x$, 則因 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x=1+t^2$ 之故, 即可使之有理化,不必定用 $\tan\dfrac{x}{2}=t$. 推而至於 $\sin^2x,\cos^2x$ 及 $\sin x\cos x$ 之有理函數均以應用 $t=\tan x$ 爲便;又如

$$\int x^n(\sqrt{1-x^2})^m dx,$$

其中 n,m 爲任何正整數者,若依前法以求其積分,結果必甚繁複,不如令 $x=\sin u$, 使歸於

$$\int\sin^n u\cos^{m+1}u\,du$$

之爲妙.復次,如欲求 $\displaystyle\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x},(a^2+b^2>0)$,

與其應用 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 不如設法規定兩數 A 及 θ 如

$$a=A\sin\theta,\quad b=A\cos\theta,$$

即
$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\theta=\frac{a}{A},\cos\theta=\frac{b}{A},$$

使其歸於

$$\frac{1}{A}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}$$

之為直捷.由是以 $x+\theta$ 為變數可知其為

$$\frac{1}{A}\log\left|\tan\frac{x+\theta}{2}\right|.$$

諸如此類,不能縷述.本節所論,僅舉其要者大者,學者但明其意可矣.蓋事實之呈現於前者,錯綜繁複,不可究詰,如何利用其特性而謀應付之道,自在學者善自體會得之耳.

例　題

求下列各積分:

1. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.
2. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.
3. $\int\frac{dx}{2+\sin x}$.
4. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.
5. $\int\frac{dx}{\cos x}$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+\cos x}$.
7. $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.
8. $\int\frac{dx}{4+\sin^2 x}$.
9. $\int\tan^3 x\,dx$.
10. $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.
11. $\int\frac{\sin^2 x+\cos^3 x}{3\cos^2 x-\sin^4 x}\sin x\,dx$.
12. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$.
13. $\int\sqrt{4+9x^2}\,dx$.
14. $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.
15. $\int x\sqrt{x^2-4x}\,dx$.
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.
17. $\int\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}dx$.
18. $\int\frac{\sqrt{x-a}}{1+\sqrt{x-a+1}}dx$.
19. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}$.

第六節　不能用初等函數表達之積分

4.6.1. 以積分作函數之定義

求積分之法,層累曲折,不可以一端論,初學每以為難.觀於前節所論,凡積分之可以有理化者,皆得以初等函數表達之.他如

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad 或\quad \int\frac{e^x}{x}dx$$

等,試求之於吾人所已知之函數中,決無如是之物.要之,欲將任何積分由初等函數表達之,其事有所不能.此求積分之難於求導數,乃事之無可如何者.

雖然，求積分之問題，固未嘗有何條件之限制，謂其積分必由初等函數表達之而後可．據第二章中所論，苟一函數 $f(x)$ 在其變程中處處連續，則其積分必然存在，且為其上（或下）界之一函數，其導數為 $f(x)$ 者．故積分之存在為一事，其能否由初等函數表達之又為一事．初等函數淺顯易明，其值便於計算，是其所長，若因此之故而必欲以初等函數組成任何積分，可謂無理之要求．

然則積分之不能由初等函數表之者，苟其存在已無疑義，即可以此作為一種新函數之定義，從而研討其特性．此原則吾人前已知之；如吾人僅知有理函數而不知有所謂對數函數，則欲求一函數以表達 $\int_1^{|x|}\frac{1}{t}dt$ 為不可能之事．然既為一可導函數，即可由是而創一新函數，所謂指數函數即因之而生．據同理，可以建設三角函數之理論．蓋以

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc}\tan x \quad 或 \quad \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\operatorname{arc}\sin x$$

作為 arc tan$x$ 及 arc sin$x$ 之定義，求其逆函數，更從而推斷其性質，即可建立一離幾何而獨立之三角函數理論①．推此原則以創造新函數，復有所謂橢圓積分(1)者：

$$u(s)=\int_0^s\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

為最先發見不能由初等函數表達之積分，其逆函數 $s(u)$ 謂之橢圓函數(2)，在理論及應用上均佔一重要地位；考其命名之由來，實緣此積分曾在計算橢圓之弧長時遇見之．當 $k=0$，此 $u(s)$ 即為 arc sin$x$，故 $s(u)=\sin u$；在 $k\neq0$ 時，其性質如何，自有專門理論，在本書中不能詳述，因已超出初等函數之範圍故也．

茲欲附述者，若干種積分經適當之變數交替可以歸併於橢圓積分．例如

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos\alpha-\cos x}}$$

①其重要步驟在乎證明 sin 及 tan 之加法定理，在此不能詳論．

(1)elliptic integral; intégrale elliptique; elliptisches Integral.

(2)elliptic function; fonction elliptique; elliptische Funktion.

初觀之似與橢圓積分無涉.然令 $u=\cos\frac{[illegible]}{2}$ 此積分可變為

$$-k\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,[illegible]}},\quad k=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

又

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[illegible]\,2x}}$$

經 $u=\sin x$ 之替換將為

$$\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}},$$

而

$$\int\frac{[illegible]}{\sqrt{[illegible]\sin^2 x\,[illegible]}}$$

經同一交替 $u=\sin x$ 轉為

$$\int\frac{du}{\sqrt{[illegible]}}.$$

要而論之,積分之得由初等函數表達之者則表達之,苟其不能,自有其所以不能之理由,於是根據其存在定理以創造新函數,從而為數學闢一新領土,亦未始非學術發展之一要道也.

4.6.2. 總論求積分與求導數

明乎以上所論,可知求積分之先決問題為其存在之確立.數學中無論何種問題,必知其有解答可能,然後可以從事解答之法;苟前者無圓滿結果,則後者之努力,失其所據,或且勞而無功.苟 $\int f(x)dx$ 果有其物,則其物之為何,能歸於一顯明之形式固佳,否則得用近似法以明之.所可引以為慰者,吾人已有一普遍之存在定理,據此定理,凡函數之連續者無不可求其積分.反觀微分學中,欲求一類似之普遍定理以保障函數之可導性而不可得.蓋自 Weierstrass 以後,常見有函數之處處連續者,竟無處有一導數①.故就此而論,謂求導數問題較難於求積分,亦不為過,兩者之孰難孰易,誠未可以一言定也.

不甯惟是,積分之存在,不特有其充分條件如第二章中所述,且其條件尚有減輕可能,即連續函數之間有間斷點者,亦依然有積分可求,其詳當於下節中論之.

①參閱 F. Klein. Elementare Mathematik vom hoheren Standpunkt, aus, III S. 39 ff (Berlin, Julius Springer, 1928) 及 Tischmarsh, The Theory of Functions, §§ 11.21−11.23, pp. 350−354 (Oxford, 1932).

第七節 積分概念之旁推

4.7.1. 函數之有間斷點者

苟一函數 $f(x)$ 在其變程 $a\leqq x\leqq b$ 中作有限次之跳躍如圖 4.3 所示，則積分概念之應用，於此絕無困難，蓋在此情形之下，可將變程 $a\leqq x\leqq b$ 分為若干分段，使 $f(x)$ 在每段中均有連續性，然後求其在各段之積分而加之可矣．至其在圖形上之意義，仍為一種面積，觀圖 4.3 自明，可不贅．

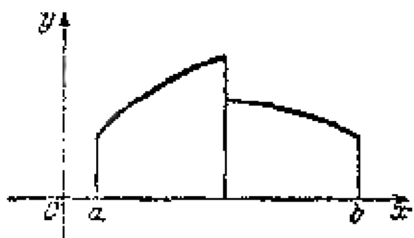


圖4.3

其次，苟 $f(x)$ 在其變程中，或在其變程兩端所有間斷點之發生由於 $\lim_{x\to a} f(x)$ 之不存在，如 $x\to a$ 時，$f(x)$ 無限制趨大，則其積分之存在，是否將受影響？此為一極費研討之問題，請先舉例言之．

試假定 α 為一正整數，一考

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

之存在問題．因 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 當 $x\to 0$ 時無限制趨大，故求積分時當將 $x=0$ 一點設法避去．故吾人特擇一任何小之正數 ε，先求

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx,$$

然後令 $\varepsilon\to 0$，以考其有無極限．在 $\alpha\neq 1$ 時，吾人既知

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}),$$

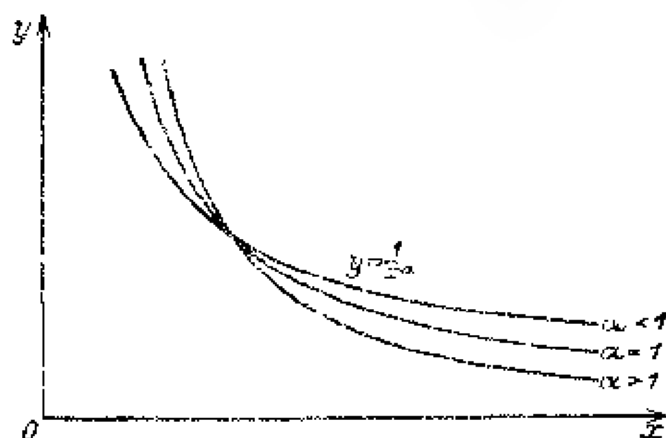
由是可見其值在 $\alpha>1$ 時將隨 $\varepsilon\to 0$ 而無限制趨大，在 $\alpha<1$ 時則隨 $\varepsilon\to 0$ 而斂於 $\frac{1}{1-\alpha}$．由前者言之，此積分當 $\varepsilon\to 0$ 時無極限可趨．由後者言之，則有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$$

存在；於是此極限即稱之為 $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$．至於 $\alpha=1$ 時，

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=-\log\varepsilon$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時亦無極限．由是以觀，$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ 之存否，當視 α 而定；如 $\alpha<1$，則存，否則不存．此事由幾何觀點說明之，殊覺顯而可見．試觀圖 4.4 中三條曲線，復徵諸定積分之幾何意義，可見 $\alpha\geqq 1$ 時，表 $\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ 之面積將隨 $\varepsilon\to 0$ 而無限制變大，在 $\alpha<1$ 時顯有一極限可歛．



圖

他如 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，在 $x\to1$ 時趨向 ∞，故欲求其自 0 至 1 之定積分，當先求

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\varepsilon)$$

惟 arc sin(1−ε) 在 ε→0 時趨於 $\frac{\pi}{2}$，故吾人定謂 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 之值為 $\frac{\pi}{2}$。

明乎以上各例，吾人擬立一定義如下：設 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中除其上端 $x=b$ 一點外處處連續，惟 $x\to b$ 時，$f(x)$ 無限制趨大，苟

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

果能存在，則 $\int_a^b f(x)dx$ 即此極限之謂．如是之積分為**旁義積分**(1)之一種．因 ε 假定為一正數，故 $b-\varepsilon$ 為變程中之一點；使 $\varepsilon\to0$，意即由變程內側趨 b 之謂，苟 $\varepsilon\to0$ 時此極限果能存在，則 $\int_a^b f(x)dx$ 謂有收斂性，否則謂有發散性．據同理，若 $f(x)$ 在 $x\to a$ 時無限制趨大，此外處處連續，則所謂 $\int_a^b f(x)dx$，當以 $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 規定之．復次，設 ξ 居於變程之中，當 $x\to\xi$ 時，$f(x)$ 趨於無限大，除此以外，無往而不連續，則宜將變程以 $x=\xi$ 一點分為兩段，然後應用上述定義．誠如是，所謂 $\int_a^b f(x)dx$，乃

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{\xi-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\xi+\varepsilon}^b f(x)dx$$

之謂．

定義既明，乃可從事研討此種積分果在何種條件下方能收斂之問題．吾人可引用下列定理以解決之：設 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中為正，

(1)improper integral, intégrale impro..., uneigentliches Integral.

又 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$，惟其趨大之數量級小於 1．換言之，有一小於 1 之正數 μ，及一固定數 M，與 x 之變化無關者，使 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x<b$ 中處處滿足 $f(x)\leqq\dfrac{M}{(b-x)^{\mu}}$，則 $\int_a^b f(x)dx$ 必有收斂性．何則，據假定既知 $0<\varepsilon<b-a$ 時必有

$$0\leqq\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\leqq\int_a^{b-\varepsilon}\frac{M}{(b-x)^{\mu}}dx,$$

而右方之積分據上述之例必有極限，故 $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 顯有一上涯，又隨 $\varepsilon\to0$ 而獨升，其收斂必矣．反之，$f(x)$ 在 $x\to b$ 時趨大之數量級大於1，換言之，苟有大於 1 之一正數 ν，及一與 x 無關之固定數 N，使 $f(x)$ 在 $a\leqq x<b$ 之間在在滿足 $f(x)\geqq\dfrac{N}{(b-x)^{\nu}}$，則 $\int_a^b f(x)dx$ 之發散，亦可斷言．以上專指 $f(x)$ 在其變程上端趨大言之，若在其下端或在變程之中無限趨大，其情形亦同．

據此定理，可知 §4.6.1 所論之橢圓積分

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad(k^2<1)$$

必能存在無疑，蓋因 $(1-x^2)=(1-x)(1+x)$ 之故，在 $x\to1$ 時，其趨大之數量級僅為 $\frac{1}{2}$ 而已．

4.7.2. 積分變程為無限者

前論定積分時，曾假定其上下界相隔有限．今試假定

$$\int_a^A f(x)dx$$

之下界為固定，而令其上界無限制趨大，則此積分或有一極限可趨．苟其果有一極限，即稱之為

$$\int_a^{\infty} f(x)dx,$$

是乃旁義積分之另一種．惟其存在與否，或其能否收斂，當視 $f(x)$ 性質而定，請先舉例言之．

試假定 $\alpha\neq1$，則 $\qquad\displaystyle\int_1^A\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha}-1),$

由是令 $A\to\infty$，可知其在 $\alpha>1$ 時有一極限，在 $\alpha<1$ 時無極限可言．若 $\alpha=1$，則因 $\log A\to\infty$，亦無極限．因此，吾人遂謂 $\alpha>1$ 時

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$$

必能存在，且斂於$\frac{1}{a-1}$．此事亦得由幾何觀察說明之．試觀圖 4.4 可見$\frac{1}{x^a}$之圖形，其中 a 大於 1 者，當 x 趨大時其趨近橫軸甚速，故 $\int_1^A \frac{dx}{x^a}$ $(a>1)$ 隨 $A\to\infty$ 而有一極限可趨，自顯而易見．

然則積分之上界或下界無限制趨大時，果在何種條件下方能存在？此問題自須視 $f(x)$ 而定．觀於上例，可以推測 $f(x)$ **必隨 x 之趨大而趨 0，且其趨 0 之數量級必大於 1** 而後可；換言之，**苟有大於 1 之一數** ν，**不論 x 如何趨大，$f(x)$ 必滿足** $0<f(x)\leqq\frac{M}{x^\nu}$，**其中 M 為一與 x 無關之數，則**

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

必能收斂．苟 $f(x)$ 趨 0 之數量級未能大於 1 者，則其積分之不能存在，亦理所必至．此事之正確，可依前段所用之法證之，茲不復贅．

例如$\frac{1}{x^2}$在 $x\to\infty$ 時趨 0 之數量級為 2，故由 $\int_a^A \frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{A}$ 可以推知

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{a}.$$

又
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to\infty}(\text{arc tan } A-\text{arc tan } 0)=\frac{\pi}{2}.$$

4.7.3. Γ 函數

據前段所論，可以推斷

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \qquad (n>0)$$

之存在，蓋 e^{-x} 在 $x\to\infty$ 時趨 0 之數量級高於$\frac{1}{x}$之任何冪$\frac{1}{x^m}(m>0)$故也．此積分之值自隨 n 而異（n 不必定為一整數），世常稱之為**Γ 函數**：

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

試用分部積分法化簡之，則有

$$\int e^{-x}x^{n-1}dx=-e^{-x}x^{n-1}+(n-1)\int e^{-x}x^{n-2}dx,$$

由是令其下界為 0，上界為 A，復令 $A\to\infty$，則

$$\Gamma(n)=(n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx=(n-1)\Gamma(n-1);$$

然後逐次化簡，可知 μ 如爲小於 n 之一正整數 $0<\mu<n$，必有

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots(n-\mu)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-\mu-1}dx.$$

苟 n 爲一正整數，則更有

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot1\cdot\int_0^\infty e^{-x}dx,$$

復因
$$\int_0^\infty e^{-x}dx=1,$$
故得
$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots 2.1=(n-1)!$$

此爲 Γ 函數重要特性之一，不可不注意及之.

據同理，又可知如下兩旁義積分之收斂:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \quad 及 \quad \int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx.$$

所當附述者，即變數交替法，吾人常用之以計算積分者，若用以變更收斂之旁義積分，亦依然有效.如用 $u=x^2$，可將

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

變更如下:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}du=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-A})=\frac{1}{2}.$$

又如
$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

當 $x\to1$ 時，其函數有一間斷點，得藉 $x=\sin u$ 之交替化爲

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}du=\frac{\pi}{2},$$

其中不復有間斷點.然連續函數之積分，苟所選擇之交替式 $u=\phi(x)$ 在某點之導數適爲 0，則 $\frac{dx}{du}$ 在此無限趨大，其積分將因是而轉爲一旁義積分，是又不可不注意者.

4.7.4. Dirichlet 與 Fresnel 積分

吾人在應用時常遇見下列積分

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx,$$

世稱 **Dirichlet 積分**，其收斂性可證之如下.試將

$$D_{AB}=\int_A^B\frac{\sin x}{x}dx$$

寫如　$$D_{AB}=\int_A^{A+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_B^{B+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{A+\pi}^{B+\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

復在最右一積分除入新變數 t 如 $x=t-\pi$，$\sin t=-\sin x$，由是得

$$D_{AB}=\int_A^{A+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_B^{B+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_A^{B}\frac{\sin x}{x+\pi}\,dx,$$

加 $D_{AB}=\int_A^B\frac{\sin x}{x}\,dx$ 於此式之兩方，則有

$$2D_{AB}=\int_A^{A+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_B^{B+\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+\pi\int_A^B\frac{\sin x}{x(x+\pi)}\,dx.$$

由是可以推斷，在 $B>A>0$ 時必有

$$|2D_{AB}|<\frac{2\pi}{A}+\pi\int_A^B\frac{dx}{x^2}$$

之成立，蓋因 $-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$

及　$$-\frac{1}{x^2}\leqq\frac{\sin x}{x(x+\pi)}\leqq\frac{1}{x^2}$$

之故，應用 § 2.6.1 之法可以知之．考此式中列於最右之積分既有收斂性，從而知 $|D_{AB}|$在 $A\to\infty$，$B\to\infty$，時必斂於 0．復因

$$|D_{0B}-D_{0A}|=|D_{AB}|$$

乃得據 Cauchy 審斂法以定I之收斂．吾人將於第八章附錄中另用一法以證其收斂性且斂於$\frac{\pi}{2}$，讀者可參閱之．

復次，在光學理論中，又見有所謂 **Fresnel 積分**者，其形式如下：

$$F_1=\int_0^\infty\sin(x^2)dx,\qquad F_2=\int_0^\infty\cos(x^2)dx.$$

此兩積分可由 $x^2=u$ 化為

$$F_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du,\qquad F_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du.$$

應用分部積分法，既知

$$\int_A^B\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du=\frac{\cos A}{\sqrt{A}}-\frac{\cos B}{\sqrt{B}}-\frac{1}{2}\int_A^B\frac{\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}du,$$

考此式右方之前兩項自隨 $A\to\infty$ 及 $B\to\infty$ 而趨於 0，而右方之積分據 § 4.7.2 所述亦趨於 0，故據與前相似之推理，可以斷 F_1 之收斂．欲證 F_2 之收斂，其理亦同．

觀上述 Fresnel 積分，可見一函數 $f(x)$ 當 $x\to\infty$ 時雖不趨於 0，其

旁義積分未始不可存在.不甯惟是,函數之值無距者，其旁義積分亦有存在可能;例如

$$\int_0^\infty 2u\cos(u^4)\,du$$

在 $u^4=n\pi$,卽 $u=\sqrt[4]{n\pi}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 時.其中函數之值爲 $2\sqrt[4]{n\pi}\cos n\pi=\pm 2\sqrt[4]{n\pi}$.然以 $u^2=x$ 之交替可化爲

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx,$$

其收斂固已證之矣.

例 題

考下列旁義積分(題 1－11)之收斂性:

1. $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^3}$. 2. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$.

4. $\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 5. $\int_0^1\frac{dx}{1-\cos x}$.

6. $\int_A^B\frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$, 其中 a_1,a_2,a_3,a_4 爲介於 A 及 B 之間而各不相等之數.

7. $\int_0^\infty\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$. 8. $\int_0^\infty\frac{\arctan x}{1-x^3}dx$. 9. $\int_1^\infty\frac{x}{1-e^x}dx$.

10. $\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\tan x\,dx$

12.*證 $\int_0^\infty\sin^2\left[\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx$ 不能收斂.

13.*證 $\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty\frac{dx}{1+kx^{10}}=0$.

14. 考 s 必爲何數兩後 (a) $\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1+x}dx$ 及 (b) $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^s}dx$ 始能收斂.

15.*考 $\int_0^\infty\frac{\sin t}{1+t}dt$ 是否收斂.

16.*(a)若 a 爲一固定正數,試證

$$\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}dx=\pi.$$

(b)若 $f(x)$ 在 $-1\leqq x\leqq 1$ 中有連續性,試證

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0).$$

求下列各積分(題 17－23):

17. $\int e^{\arcsin x}dx$.　　18. $\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$.（利用三角恆等式化簡後求之）

19. $\int(\log x)^2 dx$.　　20. $\int$ [illegible] dx.　　21. $\int$ [illegible] $e^{-2x}dx$.

22. $\int_{-1}^{+1} xe^{-x^2\sin^2 x}dx$.　　23. $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$.

24.*試證 $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt=0$.

25. 假定 $|\alpha|\neq|\beta|$，試證 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin\alpha x\sin\beta x\,dx=0$.

26. 求 $\int_{-1}^{1}x^3e^{-x^4}\cos 2x\,dx$.

27.*試證 $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}}$

經 $x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ 之變換後$(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$，仍得一同形之積分，且如四次式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

無重複之因子，所得t之新四次式亦然.

設 R 表一有理函數，試證上述之事於

$$\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx$$

亦眞.

28. 求 $n\to\infty$ 時 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ 之極限.

29.*求下之極限：

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-0}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

30.*試證 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$.

31.*若 a 爲大於 -1 之實數，試求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^a+2^a+3^a+\cdots+n^a}{n^{a+1}}.$$

第四章　附錄

積分之第二中值定理

根據本章第三節所論之分部積分法，可推得一重要定理，即世所盛稱積分之第二中值定理，其內容如下：

苟 $\phi(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中有獨行連續性，其導數 $\phi'(x)$ 亦在在連續，又 $f(x)$ 爲同一變程中的任何連續函數，則必有一數 ξ，如 $a\leqq\xi\leqq b$，使下之關係

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\phi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\phi(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

得以成立．欲證此，可假定 $\phi(b)=0$，蓋將 $\phi(x)$ 以 $\phi(x)-\phi(b)$ 代之，其式不變，由是卽得一函數，在 $x=b$ 時爲 0 者．復次，吾人又可假定 $\phi(a)>0$；何則，苟 $\phi(a)<0$，則將式中之 $\phi(x)$ 代以 $-\phi(x)$，其式亦如舊[至 $\phi(a)=0$ 之情形可不必論，蓋如是則 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 兩者皆 0，$\phi(x)$ 恆等於 0 矣]．於是吾人當在 $\phi(x)$ 有連續性及獨降性，又 $\phi(b)=0$ 之假定下證明

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\phi(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

之成立．試令 $F(x)=\int_a^b f(x)dx$，將此式左方用分部積分法求之，則

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=F(x)\phi(x)\Big|_a^b+\int_a^b F(x)[-\phi'(x)]dx;$$

因 $F(a)=0$ 及 $\phi(b)=0$，卽得

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\int_a^b F(x)[-\phi'(x)]dx,$$

惟考 $-\phi'(x)$ 之值處處爲正，故據 §2.6.1 所證之中値定理（自後稱爲積分之第一中値定理），必有一數 ξ 滿足

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=F(\xi)\int_a^b[-\phi'(x)]dx,\quad a\leqq\xi\leqq b.$$

然考
$$F(\xi)=\int_a^\xi f(x)dx,$$

又
$$\int_a^b[-\phi'(x)]dx=\phi(a)-\phi(b)=\phi(a),$$

故欲證之理，已得之矣．

此定理在較寬之假定下亦得證之．如假定 $\phi(x)$ 有獨行連續性，無論其導數之存否，此定理均能成立．其實 $\phi(x)$ 如有獨行性而間有間斷點者，但求 $f(x)\phi(x)$ 之積分存在，此定理依然有效也．

第五章　微積分學之應用

第一節　莫大與莫小值問題

5.1.1. 審莫大及莫小值之法

試標繪一連續函數 $f(x)$ 之圖形，常呈若暫起伏之狀，苟 $y=f(x)$ 在 $x=\xi$ 時之值較其鄰近各處之值爲大，其圖形在此適達一高峯之巔，則謂 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 有一**莫大值**或**莫大點**[1]．苟 $y=f(x)$ 在 $x=\xi$ 時之值較其在鄰近各處之值爲小，其圖形在此適臨二夾峯之底，則謂 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 有一**莫小值**或**莫小點**[2]．此義自淺顯易喻，惟何謂鄰近，應有明確之規定．試取 x 之一變界 $\alpha\leqq x\leqq\beta$，其中含有 ξ 者皆得謂之 ξ 之鄰近，其中各點謂之 ξ 之鄰點；如以 h 表一變數，且對其變程加以相當限制，則 ξ 之鄰點得以 $\xi+h$ 表而出之．惟如是，所謂 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫大值，其意卽謂

$$f(\xi)>f(\xi+h),$$

又 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫小值，其意卽謂

$$f(\xi)<f(\xi+h)$$

而已．所當注意者，在此所謂莫大莫小，僅就相當之鄰近比較言之；若統觀全體，則在某處之莫大值或較其在他處之莫小值爲小，觀圖 5.1 可以見之．因此之故，莫大莫小，不可與最大最小混爲一談，後者乃統觀全程，前者則限於相當鄰近而言之；是可知莫大莫小之概念恆有相對之意味．

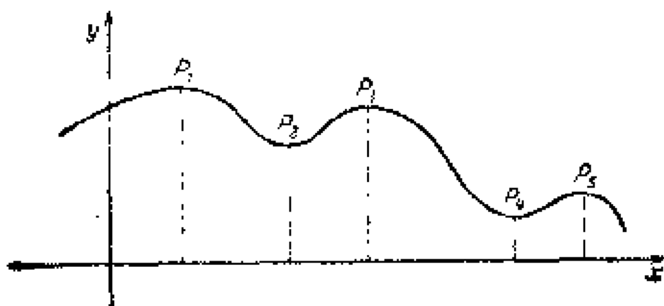


圖5.1

試就一連續且可導之函數而詳考之，果在何時得達其莫大或莫小值，似不難由觀覺以知之．蓋一上升曲線轉向下降之一刹那，必其達到

(1) maximum; maximum; Maximum.　(2) minimum; minimum; Minimum.

莫大點之時;據同理,苟一下降曲線轉向上升,其間必經過一莫小點.循是以觀,**一曲線在 $x=\xi$ 時如達其莫大或莫小點,則其切線在此必平行於橫軸;換言之,其函數之導數 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 點必爲 0 而後可**.此理之解析證法,略如下述.苟假定 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 有一莫大值,則不論 h 爲正爲負,當其在相當變程中變化時必有 $f(\xi)>f(\xi+h)$.惟如是,可知 $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ 當 h 爲正時爲一負數,當 h 爲負時爲一正數.於是知 h 自正趨 0 時其極限不能爲正,換言之,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqq 0;$$

又 h 自負趨 0 時,復不能爲負,即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqq 0.$$

惟 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點既有可導性,則不論 h 如何趨 0,此左右兩極限必相等且等於 0,是即欲證之理.據類似之推理,可知 $f(x)$ 如在 $x=\xi$ 點有一莫小值,其導數 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 亦必爲 0 而後可.

由是以論,$f'(x)=0$ 爲 $f(x)$ 獲得莫大或莫小値之必要條件;至其條件之未爲充分,不難概見.如 $y=x^3$ 之導數在 $x=0$ 時爲 0,然其値在此既非莫大,亦非莫小,然則 $f(x)$ 得其莫大或莫小値之時,其充分條件果爲何如?

據上所論,當一可導函數 $f(x)$ 由上升轉向下降時,其間必經過一莫大點;當其上升時,其導數爲正,下降時爲負.由是言之,**當 x 未達 ξ 之前,$f'(x)$ 爲一正數,在 $x=\xi$ 時爲 0,過此以後,變爲負數,如是則 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫大値.據同理,若 $f'(x)$ 在 x 未達 ξ 前爲負,在 $x=\xi$ 爲 0,過 ξ 後爲正,則 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫小値**.此理可由中値定理推斷之.試在 $x=\xi$ 點之左右各劃一變程如 $\xi_1<x<\xi$ 及 $\xi<x<\xi_2$,假定 $f'(x)$ 在每一變程中始終爲正或始終爲負.苟其在 $\xi_1<x<\xi$ 中爲正,在 $\xi<x<\xi_2$ 中爲負,則因 $f(\xi+h)-f(\xi)=hf'(\xi+\theta h)$ 之爲一負數,可知 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫大値.又若 $f'(x)$ 在 $\xi_1<x<\xi$ 中爲負,在 $\xi<x<\xi_2$ 中爲正,則 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點有一莫小値.莫大莫小値之存在,

由是遂得一言而判。復次，若 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 點之左右同爲正數或同爲負數，則 $hf'(\xi+\theta h)$ 之正負，將視 h 而定，於是 $f(\xi+h)$ 在 ξ 之一邊大於 $f(\xi)$，在其他一邊小於 $f(\xi)$，故其值在 $x=\xi$ 顯無莫大莫小可言矣。

要而論之，若 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 點如爲 0，則 $f(x)$ 之值在 $x=\xi$ 可爲莫大或莫小；復察 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 點之左右如何變化之情形，如由正變負，則 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 有一莫大值，如由負變正，則有一莫小值，如同正或同負，則無莫大莫小值存在。惟 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 之左右由正變負，其意無異謂 $f'(x)$ 在此爲一降函數，故 $f'(x)$ 之導數，即 $f''(x)$，在 $x=\xi$ 點必負。故由 $f'(x)=0$ 及 $f''(x)<0$ 在 $x=\xi$ 時之成立亦可斷定 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 有一莫大值。復次，苟 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 之左右如由負變正，無異謂 $f'(x)$ 在此爲一升函數，故其導數 $f''(x)$ 在此必正，因此吾人亦得由 $f'(x)=0$ 及 $f''(x)>0$ 在 $x=\xi$ 時之成立以推斷 $f(x)$ 之得一莫小值。

以上就 $f''(x)<0$ 及 $f''(x)>0$ 論之。若 $f''(x)=0$，其情形有殊足注意者。設 $f''(x)$ 在 $x=\xi$ 爲 0，而在其左右正負不同，則曲線之上凹者，過此將成下凹，下凹者過此將成上凹，是謂一反凹點[1]；上凹與下凹之曲線段由此而分，自無莫大莫小值可言。例如三次拋物線 $y=x^3$ 在 $x=0$ 即有一反凹點；他如 $f(x)=\sin x$，因 $f'(x)=(\sin x)'=\cos x, f''(x)=(\sin x)''=-\sin x$，可知 $f'(0)=1, f''(0)=0$，又觀 $f''(x)$ 在 $x=0$ 點之左右正負相異，故 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 亦有一反凹點。在反凹點上之切線，謂之反凹切線；因其半在曲線之上，半在曲線之下，故必與曲線交叉(觀圖 5.2)，如 $f(x)=\sin x$ 及 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 點之切線均爲反凹切線。至於 $y=x^4$，雖其 y'' 在 $x=0$ 爲 0，惟在 $x=0$

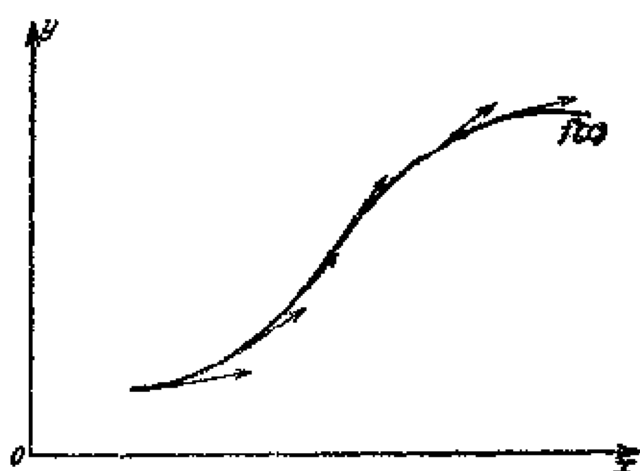


圖 5.2

(1) point of inflection; point d'inflexion; Wendepunkt.

之左右同爲正數，故 $x=0$ 未嘗爲一反曲點，其切線在此完全在圖形之一邊，未能與之交叉，可知其實爲一莫小點．讀者幸自作其圖形而細玩之也．

觀上述之推論，實以中值定理爲根據；復考中值定理之假設，爲 $f(x)$ 在其變程中處處可導，而在變程之端點不必有可導性．循是以論，在上述證明中，似可不必假定 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 點之可導性．因此吾人遂得如下較普遍之結果．苟 $f(x)$ 在含有 ξ 之變程中有連續性，又將 $x=\xi$ 點除外，處處有可導性，其導數 $f'(x)$ 至多在有盡個點上爲 0，**如是則當觀 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 之左右，是否一正一負以定莫大莫小值之存否；若左正右負，爲莫大值，若左負右正，爲莫小值；若同正同負，則無莫大莫小可言．** 例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 有一莫小值，蓋 y' 在 $x<0$ 時爲負，在 $x>0$ 時爲正，而在 $x=0$ 時固未嘗存在也．他如 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 亦有一莫小值，至其導數 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 在此雖無限制趨大，於事固絕無影響也．

所當注意者，本節中所論與 §A1.2.1 所謂函數在閉程中之最大及最小值不可不加以明辨．蓋獨行函數必在其閉程之端點獲得其最大及最小值，此乃統觀全程言之，與本節中專就某點之鄰近立論者不同．例如 $f(x)=x$ 在 $0\leqq x\leqq 1$ 中，得其最大值於其右端 $x=1$，得其最小值於其左端 $x=0$，然並無莫大莫小值，推而至於任何其他獨行函數無不皆然．至於 $y=\arctan x$，其導數爲 $\frac{1}{1+x^2}$，欲求莫大莫小值固不可得；又因其獨行於開程 $-\infty<x<\infty$ 之中，故據前所論，亦無最大最小值可言．

吾人既求得 $f'(x)=0$ 之根 ξ，代入 $f(x)$ 而得其莫大或莫小值之後，欲知其是否即爲其全程中之最大或最小值，當視 $f''(x)$ 是否處處爲負或正而定． 何則，如 ξ 及 $\xi+h$ 均屬於變程之中，則應用中值定理於 $f'(x)$，復注意 $f'(\xi)=0$，必有

$$f'(\xi+h)=f'(\xi+h)-f'(\xi)=hf''(\xi+\theta h);$$

由是知 $f''>0$ 時，$f'(\xi+h)$ 將與 h 同正或同負．若 $f''<0$，則 $f'(\xi+h)$ 與 h 之正負適相反，而欲證之理，即在於是，不待贅矣．

5.1.2. 舉例

[例一]　試就面積相等之長方形中，求其周圍之最短者．若長方形之面積為a^2，其一邊之長為x，則其他一邊為$\frac{a^2}{x}$，於是其周圍之半為

$$f(x)=x+\frac{a^2}{x}.$$

欲求一x，使$f(x)$得其最小值者，必求x滿足

$$f'(x)=1-\frac{a^2}{x^2}=0$$

而後可．故x必為a；又$x=a$時，

$$f''(x)=\frac{2a^2}{x^3}$$

顯為一正數．由是知$f(x)$在$x=a$時得其最小值，其意即謂長方形之面積相等者以平方形之周圍為最短．

[例二]　設有一竹桿，其長為a，直懸於空中如圖5.3所示，並假定其下端與地面相距為b．如在地面觀竹，問由何處觀之，其長為最大．換言之，圖中P之地位必如何而後φ為最大．據圖5.3，可知

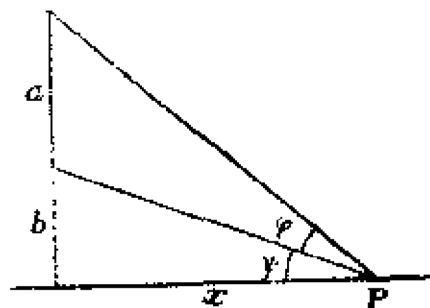


圖　5.3

$$a+b=x\tan(\varphi+\psi)=\frac{x(\tan\varphi+\tan\psi)}{1-\tan\varphi\tan\psi},$$

復因$b=x\tan\psi$之故，遂得

$$a+b=\frac{x^2\tan\varphi+bx}{x-b\tan\varphi},$$

由是知
$$\tan\varphi=\frac{ax}{ab+b^2+x^2}.$$

欲求$\tan\varphi$得其最大值，當先求其導數：

$$\frac{d\tan\varphi}{dx}=\frac{(ab+b^2+x^2)a-2ax^2}{(ab+b^2+x^2)^2}=\frac{a(ab+b^2-x^2)}{(ab+b^2+x^2)^2};$$

此導數在$x=\sqrt{ab+b^2}$時為0，又$x<\sqrt{ab+b^2}$時其值為正，$x>\sqrt{ab+b^2}$時為負，故在$x=\sqrt{ab+b^2}$時必有一最大值，可以斷言．

[例三]　試在一直線上求一點P，與兩固定點A及B相距之和為最小者．以此直線作橫軸，並假定A及B同居於橫軸之上如圖5.4所示，則問題所要求者，如何使

$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-d)^2+h_1^2}$$

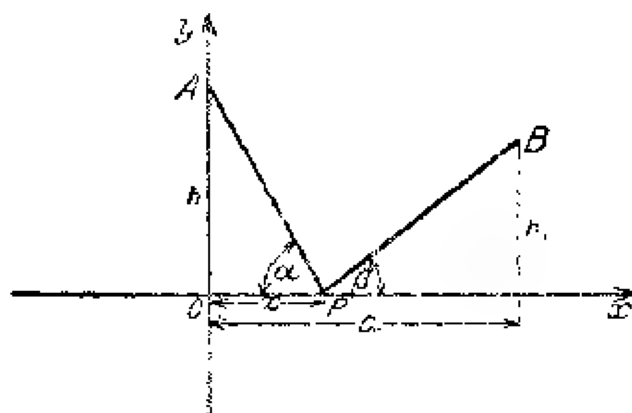


圖5.4

達其最小值而已．由是求其第一重及第二重導數，得

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+h^2)}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}},$$

$$f''(x)=\frac{-x^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{(x-a)^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}+\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}$$

$$=\frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{h_1^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}};$$

然後求 $f'(\xi)=0$ 之成立，得

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}}=\frac{a-\xi}{\sqrt{(\xi-a)^2+h_1^2}};$$

換言之，

$$\cos\alpha=\cos\beta.$$

其意謂 PA 及 PB 必各與橫軸成等角而後可．復因 $f''(x)$ 之為正數，可知在此條件之下，$f(x)$ 之值必最小．

此問題與光學中之反射定理[1] 有密切之關係．據光學中之基本原則，即世所盛稱之 Fermat 最短時間原理[2]，光線由 A 達 B 所取之途徑，無論在何種條件之下，其所需時間必為可能之最短者．今要求光線由 A 達 B 之途中必經過另一直線之任何一點，則其所需時間最短之可能途徑必為一如是之折線，其入射角[3] 與反射角[4] 適相等者．故反射定理實為 Fermat 原理之必然結果．

［例四］ 折射定理[5]．設有兩固定點 A 及 B，分處於橫軸之上下，欲以最短時間由 A 達 B，其傳播速度在橫軸之上為 c_1，橫軸之下為 c_2 ($c_1\neq c_2$)，如是則所取途徑應為何如．觀圖5.5，既有 $PA=\sqrt{h^2+x^2}$ 及 $PB=\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}$，

(1)law of reflection; loi de réflexion; Spiegelungsgesetz. (2)Principle of least time; principe de moindre temps; Prinzip der kurzesten Lichtzeit. (3)angle of incidence; angle d'incidence; Einfallswinkel. (4)angle of reflection; angle de réflexion; Ausfallswinkel. (5)Law of Refraction; loi de réfraction; Brechungsgesetz.

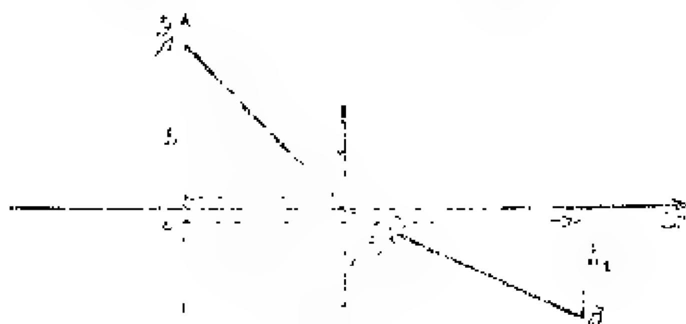


圖 5.a

則此問題所要求者無他，如何使

$$f(x)=\frac{1}{c_1}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}$$

得其最小值而已．因此必先求

$$f'(x)=\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{c_1}\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}}+\frac{1}{c_2}\frac{h_1^2}{\sqrt{[h_1^2+(a-x)^2]^3}}.$$

從而知 $f'(x)=0$ 之意，即要求

$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}$$

之成立，是即

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_1}{c_2}$$

之謂．讀者不難證明滿足此條件者僅有一點；且 $f(x)$ 在此一點必有其最小值．考光線之傳播，每因媒介物之不同而異其速度，惟據實驗結果，必依此法則進行，是即所謂 Snell 折射定理，由 Fermat 最短時間原理可以闡明之．

例　題

1．試求下列各函數之莫大莫小值，及反曲點．復標繪之，而定其升降凹凸之區域：

(a)　x^3-6x+2．　　(b)　$x^{\frac{2}{3}}(1-x)$．　　(c)　$\dfrac{2x}{1+x^2}$．

(d)　$\dfrac{x^3}{x^4+1}$．　　(e)　$\sin^2 x$．

2．求 $x^3+3px+q$ 之莫大莫小值及反曲點．討論 $x^3+3px+q=0$ 各根之性質．

3．試求 $y=x\lambda^a e^{-\lambda x}$ 之莫大值，其中 λ 及 a 均爲常數．苟 λ 可變，試求此莫大值之軌跡．

4．問雙曲線 $y^2-\frac{1}{2}x^2=1$ 上最近於 $x=0$，$y=3$ 之點爲何？

5．設 P 爲直角坐標系第一象限中之一固定點，其坐標爲 x_0，y_0．試求通過 P 點之直線方程式，其坐標軸間之截距爲最短者．

6. 在一高15呎之柱上有一高12呎之影像，問一身長[illegible]呎之人須立於距柱幾呎之處，俾此像在其眼中所張之角為最大？

7. 強度為 a 及 b 之二光源，其距離為 d. 問在連接此二光源之直線上，何處之照度最小（假定照度與強度成正比，與距離之平方成反比.）

8. 就面積一定之長方形中，試求

(a)其周圍為最短者；

(b)其對角線為最短者.

9. 試求內接於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中面積最大之長方形.

10. 設 a 及 b 為三角形之兩邊，試決定其第三邊，俾其面積為最大.

11. 一半徑為 r 之圓由一距圓心為 h 之直線 g 截成二弓形. 試於較小之弓形中求其面積最大之內接長方形.

12. 就體積一定之圓柱體中，試求其面積最小者.

13. 已知拋物線 $y^2=2px$，$p>0$，$P(x=\xi, y=\eta)$ 為其內之一點($\eta^2<2p\xi$). 試求由 P 至拋物線上一點 Q 與由 Q 至焦點 $F(x=\frac{1}{2}p, y=0)$ 之最短路徑. 試示 FQP 角在路徑最短時必為 Q 點之法線所平分，而 QP 則與拋物線軸平行.（拋物柱面鏡原理）

14*. 在一平面中進行之光注因通過一稜鏡而致偏轉. 設此平面與稜鏡之側稜相垂直，問欲使偏轉為最小，稜鏡與光注之相對地位必須如何?

15. 已知 n 個定數 $a_1, \cdots, a_n$，試決定 x 俾 $\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2$ 為最小.

16. 設 $p>1$，而 $x>0$，試證 $x^p-1\geqq p(x-1)$.

17. 試證不等式 $1\geqq\frac{\sin x}{x}\geqq\frac{2}{\pi}$，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$.

18. 試證(a) $\tan x\geqq x$，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$.

(b) $\cos x\geqq 1-\frac{x^2}{2}$.

19*. 已知 $a_1>0, a_2>0, \cdots, a_n>0$，試決定

$$\frac{\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+x}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}x}}$$

於 $x>0$ 時之最小值. 由所得之結果，試用數學歸納法以證

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

第二節 論曲線之方程式

5.2.1. 圓坐標之應用

點之在幾何學常稱之爲基本元素[1]。凡幾何學中之各種研究對象皆由基本元素組織而成，而基本元素本身之性質，不復加以深究。例如直線與曲線，乃點之依一確定法則所聚而成者，至點之果爲何物，則置諸不論，所謂平面中之點，由解析幾何學言之，兩個數或一對數 x,y 而已。平面中之曲線既爲點所組成，乃得以 x,y 所滿足之一種關係表而出之，是謂曲線之方程式，在解析幾何學中吾人固已屢見之矣。

平面中點之地位，必用兩個數以確定之，是誠然矣；然其數不必限定爲其直角坐標。苟有他種坐標系，足以規定點之位置者，當兼用之。不寧惟是，曲線之方程式常因所用坐標之適當而其形式得有化簡之可能，故適當坐標之選擇，有不可不審慎從事者。直角坐標之外，最通用者，有所謂**圓坐標**[2] r,θ，其與直角坐標 x,y 所發生之關係，觀圖 5.6，爲

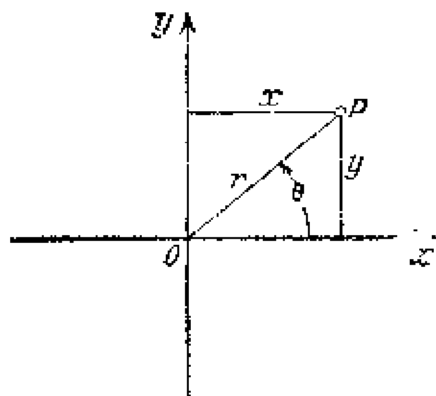


圖5.6

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta;\ \ r^2=x^2+y^2;\ \ \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

其間關係既明，可隨意選用其一，有必要時仍可轉換其他，視如何便利而定耳。

舉例言之，設有一曲線，其上各點與兩固定點之距離 r_1 及 r_2 相乘爲一常數 a^2 者。此種曲線謂之雙紐線[3]，其形狀如橫 8 字。欲求其方程式，可假定兩固定點之直角坐標分別爲 $x=a,y=0$，及 $x=-a,y=0$（見圖 5.7）。於是

$$r_1^2=(x-a)^2+y^2;\ \ r_2^2=(x+a)^2+y^2;$$

而雙紐線之方程式易知爲

(1)fundamental element; élément fondamental; fundamentale Elemente.
(2)polars coordinates; coordonnées polaires, Polarkoordinaten. (3)lemniscate, lemniscate; Lemniskate.

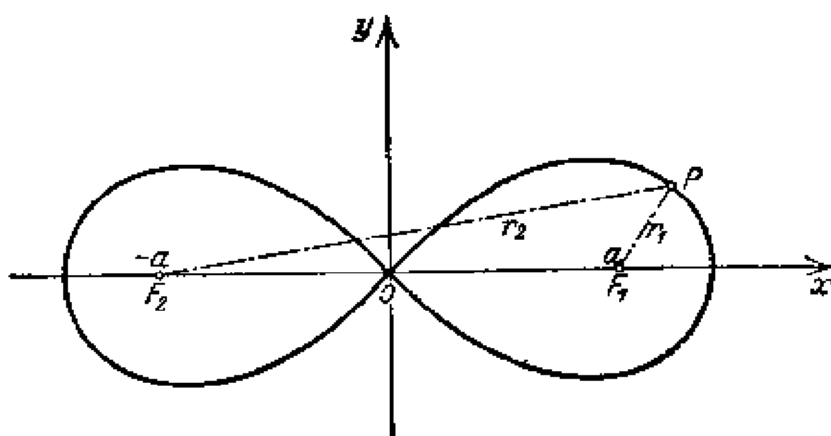


圖5.7

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

如改用圓坐標，則有

$$r^4-2a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0,$$

或
$$r^2=2a^2\cos 2\theta,$$

其形式自簡明多矣.

5.2.2. 參變數方程式

考曲線之所由成，謂其由於無限多之點依一確定法則而聚者固可，謂其爲某一點依一確定規則而移動之軌跡亦可．由前者言之，爲一切點之滿足一函數關係者，其所有兩坐標之一爲其他之函數，如 $y=f(x)$；由後者言之，某一點之兩坐標各隨一其他變數(例如時間)而定，故可視x,y 或 r,θ 爲他一變數 t 之函數，當 t 經過一確定變程時，卽從而獲得其點之軌跡；是卽利用一參變數[1]以表達曲線之法，t 卽稱之爲參變數．前者之例如 $x^2+y^2=a^2$，後者之例如 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，當其中 t 在 $0\leqq t\leqq 2\pi$ 中變化時，卽得一圓線，而 t 自有其極簡明之幾何意義，卽此圓之中心角是已．他如橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$，亦得用一參變數 t 以表達之，

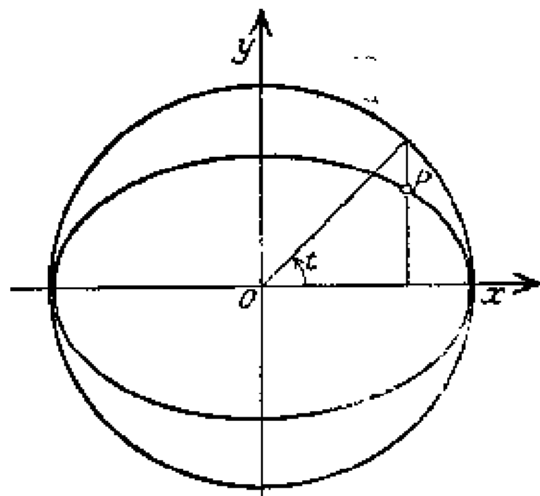


圖5.8

(1) parameter; paramètre; Parameter.

如 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$，其中 t 之意義亦至爲顯明；試作一圓線，與此橢圓外切，則圓上之點，在縱向居於橢圓點 $P(a\cos t, b\sin t)$ 之上下者，其相應之中心角，即由 t 決定之，觀圖5.8，更可瞭然。

據上所論，同一曲線，得有兩種不同之看法，因之其表達形式亦隨之而異。如以 $y=f(x)$ 表達一曲線，必限於其中之一單值支。故參變數之法，常較普遍，且多便利。惟欲以

$$x=\phi(t)=x(t),\quad y=\psi(t)=y(t)$$

[$x(t)$ 及 $y(t)$ 在形式上較簡，如不致誤會，可常用之] **表達一曲線，必求 t 在一確定變程中變化時，$x(t)$，$y(t)$ 所表達者爲此曲線上之點，且亦惟此曲線上之點，如是始得稱之爲此曲線之方程式。** 方程式之形式雖有不同，然其間必有相互溝通之關係。苟以 $y=f(x)$ 表達一曲線，欲求其參變數方程式，當擇一連續獨行函數 $x=\phi(t)$，使 t 在其變程中變化時有唯一 x 與每一 t 相應，然後將 $x=\phi(t)$，代入 $y=f(\phi(t))=\psi(t)$，即得所欲求之形式。此舉之成功，自在 $x=\phi(t)$ 之選擇；如何選擇一適當之參變數以表達一曲線，使其形式簡潔美觀，是在學者善自體會，不可以一端論。若令 $x=\phi(t)=t$，則 $y=f(t)=f(x)$，故 $y=f(x)$ 可視爲參變數方程式之一種特殊形式，即以 $t=x$ 爲其參變數者也。

例如 $y=\sqrt[3]{x^2}$，苟用 $x=t^3$，則得 $y=t^2$。令 t 在 $-\infty<t<\infty$ 之間變化，則 $x=t^3, y=t^2$，即表達一曲線之全體，所謂半三次拋物線者是也，觀其形式，簡潔極矣。

更從另一方面論之，如吾人已用一參變數表達一曲線如：$x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$，復可將其中之 t 消去而歸於 $y=f(x)$。例如由 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ 及 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，可由自乘並注意 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 之關係而分別回復於 $x^2+y^2=a^2$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。普遍言之，必先求 $x=\phi(t)$ 之逆函數 $t=\Phi(x)$，代入於 $y=\psi(t)$ 以求消去 t 而變得 $y=\psi(t)=\psi(\Phi(x))=f(x)$。惟消去 t 之後，必求 $y=f(x)$ 之單値，故其結果，或僅得原有曲線之一段，亦未可知。然事有不盡然者，如 $y=\frac{b}{a}x$ 在 $-\infty<x<\infty$ 時爲一直線，伸展至於無限遠，而 $x=a\sin t$，$y=b\sin t$

僅能表達其一段，介於 $x=-a$, $y=-b$ 及 $x=a$、$y=b$ 兩點之間者．諸如此類之關係，必注意研求，求其透澈明瞭而後可．

用參變數表達一曲線，其結果將使每一曲線有一確定之向旨[1]．苟其點依參變數之變大而移動者，其向旨爲正，反是爲負．例如以 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 表一曲線 C，假定 t 之變程爲 $t_0 \leqq t \leqq t_1$，當 $t=t_0$ 時，爲 C 之起點 P_0，$t=t_1$ 時，爲 C 之終點 P_1，如是則由 P_0 達 P_1 之向旨謂之正向旨．設另用一參變數 τ，如 $\tau=-t$ 者，則 C 上之點將與 τ 在 $-t_1 \leqq \tau \leqq -t_0$ 之中者相應，其起點 P_0 與終點 P_1 分別與 $\tau=-t_0$ 及 $\tau=-t_1$ 相應，如是則由 P_0 達 P_1 之向旨將爲負矣．要而言之，設改換一參變數，而其交替式 $t=t(\tau)$ 爲一獨升函數，則其曲線之原有向旨不變；若 $t(\tau)$ 爲一獨降函數，其結果將一反其原有之向旨．

茲更舉例以明參變數之用．設有一圓，其半徑爲 a 者，沿橫軸而滾動，則圓上任何一點如 P 必隨之而繪一曲線，謂之圓滾線[2]．試假定 P 在開始觀察時（即 $t=0$ 時）所處之地位爲原點，則觀圖 5．9，可知

$$x=a(t-\sin t),$$

$$y=a(1-\cos t),$$

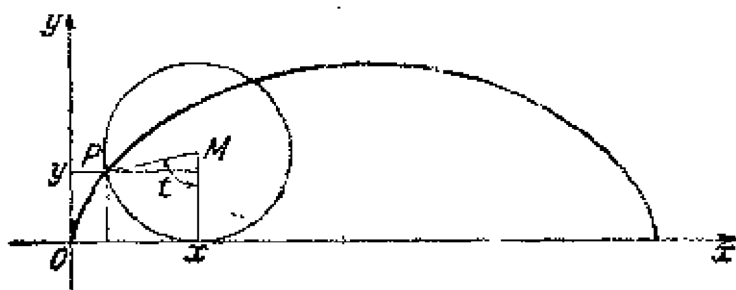


圖5．9

是即 P 所繪之軌跡．t 之意義，觀圖自明；若其圓之滾動速度有恆定性，則 t 與時間成正比．觀此形式，可謂簡潔已極．如欲消去其中之 t，勢必先求

$$\cos t=\frac{a-y}{a}, \quad t=\operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a},$$

$$\sin t=\pm\sqrt{1-\frac{(a-y)^2}{a^2}}$$

於是得

$$x=a\operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a}\mp\sqrt{(2a-y)y},$$

---

(1) sense; sens; Durchlaufungssinn. (2) cycloid, cycloïde; Zykloide.

是為 $r=f(\theta)$ 之形式，自遠不及應用參變數之為簡明也.

最後吾人復用一參變數以表達一直線，例如 p. 190 已知

$$r=\frac{p}{\cos t}, \quad \theta=\alpha+t$$

其中 p 及 α 為兩常數而 t 則為參變數. 試將其間 t 消去，即有

$$r=\frac{p}{\cos(\theta-\alpha)}$$

是即 $r=f(\theta)$ 之形式，r,θ 為其圓坐標也.

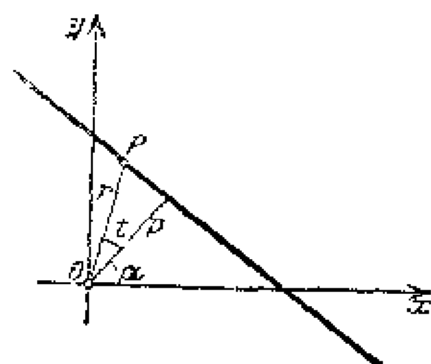


圖5.10

應用參變數之便利，觀於上述，已可略見. 其最有益於吾人之討論者，為其常有一簡明之幾何或物理上之意義. 藉此而學理之精蘊更得有所闡明. 不寧惟是，參變數之如何選擇，復供吾人以精研深思之餘地，如舍 t 而另用 $\tau=t^2$，或 $\tau=\omega(t)$，但求在 t 之變化全程中有一單值逆函數 $t=t(\tau)$ 存在，皆可一試其效用. 從而獲得一最適當者以應問題之需要，是在讀者時時觀摩、深思而自得之也.

5.2.3. 論曲線之導數

以 $y=f(x)$ 或以 $x=x(t), y=y(t)$ 表達一曲線，其間相互溝通之關係，已如上所論矣. 誠如是，則前者之導數 $\frac{dy}{dx}$ 與後者之導數 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$ 間，亦必有關係可尋. 欲明其關係，其事甚易. 蓋由 $y(t)=f(x(t))$，據鏈導法，可知

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt};$$

若以 y' 表 $\frac{dy}{dx}$，並在 x 及 y 之上加一點如 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 以表其對 t 之導數，則此式可寫如

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

試就擺線言之；因

$$\dot{x}=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\dot{y}=a\sin t=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

之故，可知其在 $t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$（即其與橫軸相遇時）適有豎直之切線，蓋當趨近此諸點時，其導數 $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\cot\left(\frac{t}{2}\right)$ 無限制增大也.

此關係既明，即可從而推知如下各簡單事實．設有一曲線 $x=x(t)$，$y=y(t)$，其切線之方程式必爲

$$(\xi-x)\dot{y}-(\eta-y)\dot{x}=0,$$

其中 x,y 爲切點之坐標，而 ξ,η 則爲切線上各點之坐標．試更作一直線，垂直於此，即所謂**法線**[1]者，其方程式爲

$$(\xi-x)\dot{x}+(\eta-y)\dot{y}=0.$$

又如將切線與 x 及 y 軸所成之角分別以 α 及 β 名之，則有

$$\cos\alpha=\frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\quad \cos\beta=\frac{\dot{y}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

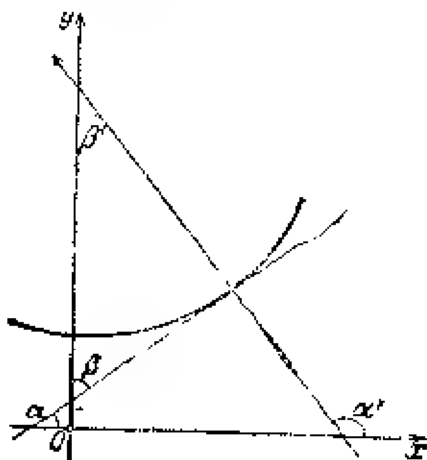


圖5.11

是即所謂**切線之方向餘弦**[2]．復將法線與 x 及 y 軸所成之角分別以 α' 及 β' 名之，則有

$$\cos\alpha'=\frac{-\dot{y}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\quad \cos\beta'=\frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

是謂法線之方向餘弦．由此公式可以見 $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq0$ 又 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 有連續性時，切線方向亦隨 t 而作有連續性之變化．此爲最重要之情形；若上述假定未能滿足，則情形自較複雜，如 $\dot{x}=\dot{y}=0$ 時，其切線之方向變化是否連續，即未能一言而判．例如 §5.2.2 所述之半三次拋物線 $x=t^3,y=t^2$，雖其 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 處處連續，然在原點有一會切點[3]，故其切線之方向變化在此失其連續性．更就 $x=t^3,y=t^3$ 觀之，因其所表爲一直線 $y=x$，其切線

(1) normal; normale; Normale. (2) direction cosine; cosinus directeur; Richtungscosinus. (3) cusp; rebroussement; Spitze.

方向始終如一，故爲連續．而 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 在 $t=0$ 時俱皆等於 0 也．不特惟是，若 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 在某處卽偶失其連續性，其切線方向則有連續者，亦有不連續者．試以 $\phi(t)$ 表一函數，在 $t_1 \leqq t \leqq t_2$ 中有連續及獨升性，惟在其中某點如 $t=t_3$ 有一尖角（卽失其可導性），則 $x=t$，$y=\phi(t)$ 卽曲線 $y=\phi(x)$ 在 $x=t_3$ 時亦必有一尖角；但觀 $x=\phi(t)$，$y=\phi(t)$，雖其 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 在 $t=t_3$ 時未能存在，因其爲直線 $y=x$ 之一段，仍在在有一確定不變之方向．由是以論，當上述假定未能滿足卽其定理未能應用時，如欲研究切線之方向變化情形，當據上列公式求 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 以 t 表達之，然後考其如何隨 t 而變可矣。

復次，設有兩曲線如 $x=x_1(t)$，$y=y_1(t)$ 及 $x=x_2(t)$，$y=y_2(t)$，則其間之角 δ（兩曲線在其相交點上之切線或法線所成之角），據解析幾何學所論，必由

$$\cos\delta=\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2+\dot{y}_1\dot{y}_2}{\pm\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2}}$$

規定之．觀上列諸式，其中均有一未定之平方根號，是乃由於其角亦未完全確定，蓋切線或法線上果以何者爲正向旨，尙待吾人隨意決定也．吾人自後當以此平方之正根應切線上之正向旨，所謂切線上之正向旨，與參變數變大之向旨同；由是更依反時針之向旨轉 $\frac{\pi}{2}$，卽得法線上之正向旨．

以上論 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\dot{x}, \dot{y}$ 間之關係及其簡單應用．繼此所欲論述者，有如下一問題：試改用圓坐標，將一曲線方程式 $y=f(x)$ 易爲 $r=r(\theta)$，則 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{dr}{d\theta}$ 間之關係當爲何如？欲明此，可假定 x, y 及 r, θ 各爲另一參變數 t 之函數，於是據 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 求其對 t 之導數，必有

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dot{\theta},$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dot{\theta}.$$

又考 $r=r(\theta)$，可視爲參變數方程式之一種特殊情形，以 θ 爲參變數者：$r=r(t)$，$\theta=t$，因之遂有 $\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}$，$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=1$．明乎是，遂

得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\dot{r}\tan\theta+r}{\dot{r}-r\tan\theta},\qquad \dot{r}=\frac{dr}{d\theta};$$
是卽吾人所欲求之關係．據此，試在 $r=r(\theta)$ 上任擇一點 r,θ，作一切線，與橫軸所成之角爲 α，其矢徑(1)（由原點直達此點之矢量爲其矢徑）與此切線所成之角爲 ψ，則因 $\psi=\alpha-\theta$ 及 $\tan\alpha=y'$ 之故，必有
$$\tan\psi=\frac{y'-\tan\theta}{1+y'\tan\theta}=\frac{r+\dot{r}\tan^2\theta}{\dot{r}+r\tan\theta}=\frac{r}{\dot{r}};$$
故應用圓坐標後，曲線之方程式如爲 $r=F(\theta)$，

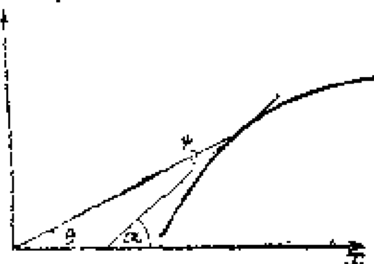


圖5.12

則
$$\tan\psi=\frac{F(\theta)}{F'(\theta)},$$
觀圖 5.12，其理亦可瞭然也．

最後可一論第二重導數．據鏈導法可知
$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}},$$
故得
$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

5.2.4. 論曲線之幾何性質

吾人研究曲線之時，常有隨意轉換其坐標軸之必要，於是發見其性質有因坐標軸之轉換而變者，亦有轉換而不變者．所謂轉換，精言之，可分爲移動及轉動兩種．將縱橫坐標軸不變其固有方向而遷移之謂之移動；其未移前與既移後之坐標，如分別以 x,y 及 ξ,η 表之，必發生如下關係：
$$x=\xi-a,\qquad \xi=x+a,$$
$$y=\eta-b;\qquad \eta=y+b;$$
其中 a,b 爲兩常數．又將縱橫坐標軸同轉一角謂之轉動；如依正向旨轉一角 α，則其前後坐標間之關係爲
$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha,\qquad \xi=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha,\qquad \eta=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$
如將移動轉動同時實施，則有

(1) radius vector; rayon vecteur; Radiusvektor.

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha+a,\qquad \xi=x\cos\alpha+y\sin\alpha+a',$$
$$y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha+b,\qquad \eta=-x\sin\alpha+y\cos\alpha+b';$$

試假定其中 α, a, b 為任何常數,此公式實包括一切可能之移動與轉動.此種轉移,對於曲線之性質,果有無影響可言?其最顯而可見者,苟一曲線在某點有一豎直切線即 $\dot{x}=0$ 或水平切線即 $\dot{y}=0$,則轉動之後即未能如是.然一曲線在某處如有一反屈點,換言之,當 t 為一確定之數時,$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=0$ 如得滿足,則據前式既有

$$\dot{x}=\dot{\xi}\cos\alpha-\dot{\eta}\sin\alpha,\qquad \dot{\xi}=\dot{x}\cos\alpha+\dot{y}\sin\alpha,$$
$$\dot{y}=\dot{\xi}\sin\alpha+\dot{\eta}\cos\alpha;\qquad \dot{\eta}=-\dot{x}\sin\alpha+\dot{y}\cos\alpha;$$

代入於此,即有　$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\dot{\xi}\ddot{\eta}-\ddot{\xi}\dot{\eta}$

由是可知轉動後其為反屈點依然如故.故此為一性質,不受轉移之影響者,此種性質,謂之幾何性質.

例　題

1.設有一曲線如　$x=a\cos 2\theta\cos\theta$,

$y=a\cos 2\theta\sin\theta$,

試消去其中之參變數,使其方程式僅由 x, y 表達之.

2.設在半徑為 R 之定圓 C 外,有一半徑為 r 之圓 c,沿 C 滾動,則在 c 圓周上之任一點 P 亦必隨 c 移動,而繪一曲線,即所謂圓外圓滾線(1).試求其參變數方程式.

3.在 $r=R$ 之特殊情形下,試草繪圓外圓滾線之圖形,並求其參變數方程式.(此種圓外圓滾線名曰心臟線(2)).

4.苟題2中之半徑 r 小於 R,而令 c 在 C 內滾動,則 P 點之軌跡為一圓內圓滾線(3).試求其參變數方程式.

5.試草繪下之圓內圓滾線:(a)設 $R=2r$,　(b)設 $R=3r$.

6.試草繪 $R=4r$ 時之圓內圓滾線(即星形線(4)),並求其不含參變數之方程式.

7.試求曲線 $x^3+y^3=3axy$ (Descartes 葉形線(5))之參變數方程式,以其矢徑與 x 軸所

(1)epicycloid; épicycloïde; Epizykloide.　(2)cardioid; cardioïde; Kardioide.
(3)hypocycloid; hypocycloïde; Hypozykloide.(4)astroid, astroïde, Astroide.
(5)folium, folium; Blatt.

成夾角之正切作爲參變數 t.

8. 試證圓內圓滾線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之切線在兩坐標軸間有恆定之截距.

9. 試證圓滾線任何一點之切線及法線分別通過動圓上之最高及最低點.

10. 試求兩曲線 $r=f(\theta)$ 及 $r=g(\theta)$ 所成交角 α 之關係公式.

11. 設 C 爲一固定曲線, $P(x_0, y_0)$ 爲一固定點,若由 P 向 C 之諸切線作垂直線,則其垂足之軌跡稱爲 C 之垂足曲線(1).假定 C 之方程式已用參變數表述如 $x=f(t)$, $y=g(t)$,試求其垂足曲線之參變數方程式.

12. 試求圓線 C 之垂足曲線,(a)以圓心 M 爲定點;(b)以圓周上一點 P 爲定點.

第三節　平面曲線略論

曲線之幾何性質,因研究觀點之不同而可分爲兩類.無論何種曲線,得統觀其全程或其一段而考驗之,或剖析入微,直至每一點之任何小鄰近而細察之;前者乃以積分法而考其通性,後者以導數法而明其微性.幾何性質,要而論之,不外通性與微性而已.請先論通性.

5.3.1.　論面積之正負

吾人前論定積分,曾以面積問題作出發點,當時不過爲積分概念之易於認識而已;若卽以此爲計算面積之法,則殊有未能滿意者.何以言之?據

$$\int_a^b y(x)\,dx$$

之幾何意義,其所示面積爲 $y=f(x)$ 之一單値支及其他直線所圍成者,而此諸直線實與坐標軸之選擇發生關聯.因此之故,如欲計量一圓線或一橢圓之面積,其全部爲一曲線所圍成者,必先擇適當之坐標軸,如以原點置於其中心,藉此卽得若干單値支,而上述方法始得應用;如是似覺其法之過於繁瑣.然則如何得一簡單易施之法,以計量一曲線所圍之面積?

在解析幾何學中,任何線段與面積均有正負之別.此與初等幾何學根本不同之處,自有其深長之意義.例如在橫軸上任取兩點 x_1 及 x_2,則

(1)pedal curve; coubve podaire; Fusspunktenkurve.

介於其間之一線段爲 x_2-x_1，由是不特可知其長，且可知其兩端點所處之相對地位；如以橫軸上自左向右之向旨爲正（依普通習慣），則由 x_2-x_1 之爲一正數，卽可斷定 x_2 必居於 x_1 之右；若 x_2-x_1 爲一負數，則 x_2 居於 x_1 之左．苟一反橫軸之向旨而以自右向左之向旨爲正，則 x_2-x_1 之正，無異謂 x_2 居於 x_1 之左，與前適得其反．然橫軸上向旨之正負，當以如何便利而定，無是非之可言，惟必先確定之後，而線段之正負，始有其幾何意義，蓋其端點彼此之相對地位，可由是而判也．

推而至於平面，其情形亦復相似．平面中若有曲線圍抱，可得一區域①如圖 5.13 所示．此種曲線謂之**迴合線**(1)．以迴合線爲邊界之面積得有正負之別，而其邊界亦有正負循周向旨(2)可言．爲便利之故姑作如下之規定．假定邊界爲一曲線，從不自交者，試沿此繞行一周，其所圍面積之內部始終居左者，

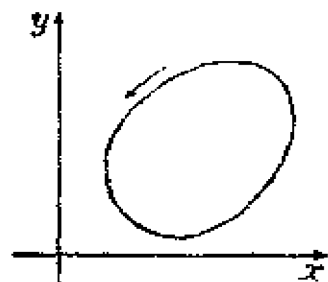


圖5.13

其循周向旨爲正，反是爲負，如圖 5.13 之矢向卽爲循周正向．於是任何面積之邊界皆有一循周向旨，爲正爲負，可以一言而定．此事既定，其面積之正負卽可隨之而定．依其邊界所循向旨之正負爲正負，謂其循周向旨爲正時，面積亦正，循周向旨爲負時，面積亦負，此一法也．或反其邊界所循向旨之正負爲正負，謂其循周向旨爲正時，面積爲負，循周向旨爲負時，面積爲正，此又一法也．何去何從，隨如何便利以決定之可矣．

吾人在此爲行文之便，姑依邊界所循向旨之正負以定面積之正負．今設有一區域如圖5.14所示，其上爲一曲線 $f(x)$，在 $a\leqq x\leqq b$ 中處處爲正者．試由 $x=x_1=b, y=0$ 點出發，沿橫軸向左至 $x=x_0=a, y=0$ 點，轉向上直上至 $f(x)$ 後，沿

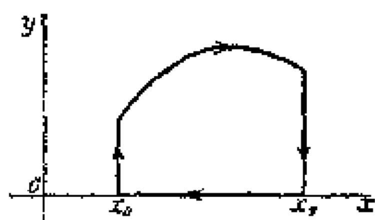


圖5.14

$f(x)$ 而達 $x=b$，更直下而訖於橫軸，循行一周時，其區域之內部始終

①其條件如何，姑置不論．

(1) closed curve; courve fermée; geschlossene Kurve.　(2) sense of describing the boundary; sens de parcours sur le périmètre; Umlaufungsinn der Berandüng.

居右，故循周之向皆爲負：若以 A_{01} 表其面積，則 A_{01} 之絕對値爲 $\int_a^b f(x)dx$，復據適所規定之公約，其値當爲一負數，因之遂有

$$A_{01}=-\int_a^b f(x)dx,$$

此就 $a<b$ 時言之．若 $a>b$，則 A_{01} 當爲一正數，於 $\int_a^b f(x)dx$ 在此時爲一負數，故上列 A_{01} 之公式不論 a,b 爲任何實數時均爲有效．復次，若用一參變數 t 以表達此曲線 $y=f(x)$，令 $x=x(t)$，$y=y(t)=f(x(t))$，則 A_{01} 將有如下形式：

$$A_{01}=-\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)dt,$$

其中 t_0 及 t_1 爲 t 之値，分別與 $x=a$ 及 $x=b$ 相應者；又假定 $y=f(x)$ 之一單値支必與 t 之一確定變程 $t_0\leqq t\leqq t_1$ 成一一相應之關係，而 $f(x)$ 處處爲正，$\dot{x}(t)$ 無處爲 0．在此假定之下，此 A_{01} 卽表示一面積，其上由 $f(x)$，其下由橫軸，左右由 $x=a$ 及 $x=b$ 所圍而成者，昭然無疑矣．

5.3.2. 面積之普遍公式

面積問題，至此得以最普遍之方式，提出而解決之．設有一迴合曲線，其方程式爲 $x=x(t)$，$y=y(t)$，當 t 在 $t_0\leqq t\leqq t_1$ 中變化時，其所表之點卽從而繪一迴合線，因之復可假定 $x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$．爲行文之便，假定 $\dot{x}(t)$ 及 $\dot{y}(t)$ 有連續性，又 $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ 無處爲 0，其圖形略如圖 5.15 所示，換言之，其中無角隅之出現，且任何直線至多僅能與

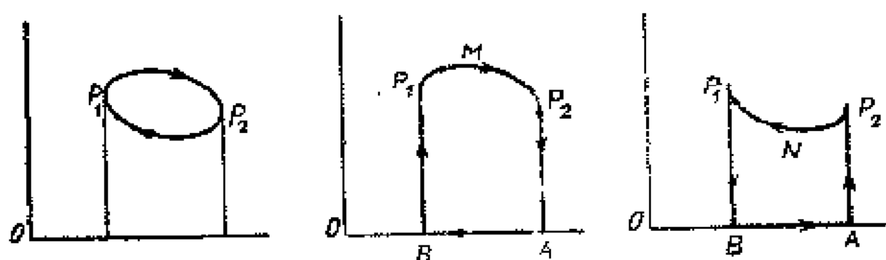


圖5.15

之相交於兩點．此曲線在 P_1 及 P_2 實有兩豎直切線；由此兩點，可分爲上下兩段，當 t 在 $t_0\leqq t\leqq\tau$ 中變化時爲上段，在 $\tau\leqq t\leqq t_1$ 時爲下段，而吾人欲量之面積，可視爲 A_{12} 及 A_{21} 兩者之和，前者以一迴合線

$P_1MP_2ABP_1$，後者以 $P_2NP_1BAP_2$ 爲邊界者.於是據前所論,必有

$$A_{12} = -\int_{t_0}^{\tau} y(t)\dot{x}(t)dt,$$

$$A_{21} = -\int_{\tau}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)dt;$$

故欲量之面積 A 爲

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)dt,$$

與 §5.3.1 所得結果完全相同.此公式復可用分部積分法化爲

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{y}(t)dt - xy\Big|_{t_0}^{t_1},$$

因其邊界爲一廻合線，$x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$，故

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}dt = \int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}dt$$

或

$$A = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(y\dot{x} - x\dot{y})dt,$$

觀此形式,可謂整潔極矣.

既得此公式,有數事須特加聲明者.其一，吾人前曾假定 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 在其變程中處處連續;此假定殊非必要,蓋 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 如作有盡次之跳躍或在有盡個點上爲 0,則據 §4.7.1 所述,如上積分,依然存在.其二,吾人對於邊界之形狀，不必過分有所限制,苟其 $\dot{x}$ 在有盡個點上爲 0，卽在有盡個點上有豎直切線,則上述推論,仍然有效；觀圖 5.16，可分爲若干單値支 P_1P_2，P_2P_3，$\cdots$ $P_{n-1}P_n$,P_nP_1.然後知其面積 A 爲

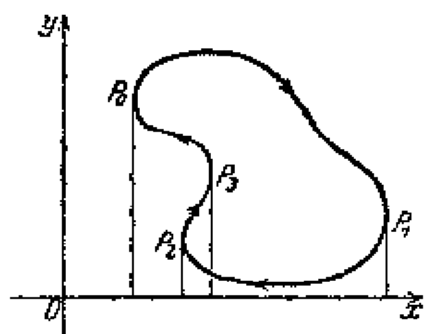


圖 5.16

$A = A_{12} + A_{23} + \cdots + A_{n-1,n} + A_{n,1}$，其中每一面積得由前法計量,至其正負仍依其邊界所循向皆而定.復將其一一相加,卽得 $-\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}dt$,與前所得之結果完全相同.其三,當標繪曲線時，曾假定 $y>0$. 此事亦非必要,蓋如移之於橫軸之下,換言之，試實施一移動,如將 y 以 $y+a$ 易之,則其面積爲

$$-\int_{t_0}^{t_1}(y+a)\dot{x}(t)dt.$$

惟因
$$\int_{t_0}^{t_1}a\dot{x}dt=ax\Big|_{t_0}^{t_1}=ax(t_1)-ax(t_0)=0$$

之故,可知其值不變.不寧唯是，苟令縱橫坐標軸各轉一角 α, 換言之,令 x,y 易以 ξ,η 如

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha,$$

$$y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha$$

所規定者,則因

$$\dot{x}=\dot{\xi}\cos\alpha-\dot{\eta}\sin\alpha,$$

$$\dot{y}=\dot{\xi}\sin\alpha+\dot{\eta}\cos\alpha$$

之故,可知 $y\dot{x}-x\dot{y}=\eta\dot{\xi}-\xi\dot{\eta}$,由是得

$$A=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(y\dot{x}-x\dot{y})dt=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\eta\dot{\xi}-\xi\dot{\eta})dt.$$

故面積爲一幾何性質,不受坐標軸轉移之影響者,於此可以見矣.其四,苟將 $x(t),y(t)$ 中之 t 易以另一參變數 τ, 如 $\tau=\tau(t)$,則因

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt},\qquad\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$

之故,可知

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)dt=-\int_{t_0}^{t_1}\left(y\frac{dx}{d\tau}-x\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}dt$$
$$=-\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(y\frac{dx}{d\tau}-x\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau$$

之形式依然不變，式中 τ_0 及 τ_1 爲分別與 t_0 及 t_1 相應之值. 由是以論,可見

$$A=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(y\dot{x}-x\dot{y})dt$$

之形式不因參變數之改易而發生影響,是亦一重要結果,不可不注意及之.

說明上述之理,可知一橢圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 所圍之面積爲

$$ab\int_0^{2\pi}\sin^2t\,dt=ab\pi,$$

較之應用 $\int_{-a}^{a} ydx$ 之公式，自覺簡捷多矣．類是之例，不復多舉．

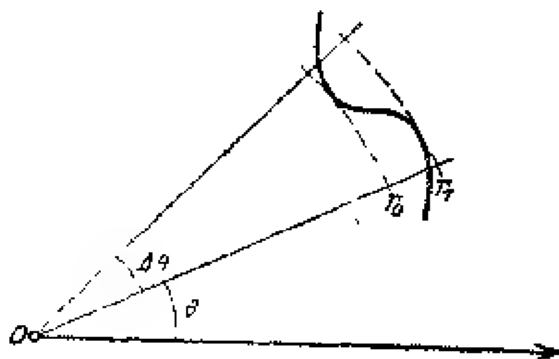


圖5.17

最後請一論如何用極坐標以計量面積之問題．設有一曲線，其方程式為 $r=f(\theta)$，其中 r,θ 假定為極坐標．試作一矢徑，與 x 軸(即 $\theta=0$) 成一角 θ 者，如圖 5.17．此矢徑與 x 軸及 $r=f(\theta)$ 之一部合圍而得一區域，以 A 名之．於是吾人不難推斷 $\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$ 關係之成立．蓋 A 既隨 θ 而變，當 θ 有 $\Delta\theta$ 之變，A 將隨之而有 ΔA 之變；考 $r=f(\theta)$ 在變程 $\Delta\theta$ 中有其最大及最小值，前者以 r_1，後者以 r_0 名之，於是

$$\frac{1}{2}r_0^2\Delta\theta\leqq\Delta A\leqq\frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta$$

之成立，為必然之理：因此遂有

$$\frac{1}{2}r_0^2\leqq\frac{\Delta A}{\Delta\theta}\leqq\frac{1}{2}r_1^2,$$

由是令 $\Delta\theta\to 0$，即得欲證之理．然後據積分學之定理，可知介於 $\theta=\alpha$ 及 $\theta=\beta$ 兩矢徑間之面積必由

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta$$

以計量之，其值在 $\beta>\alpha$ 時不能為負，可以斷言．當 θ 變大時，r,θ 依正向旨而循行其邊界，故與前段所規定之公約完全相符也．

例如雙紐線 $r^2=2a^2\cos 2\theta$．若令 θ 在 $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ 中變化，則得其一紐之面積：

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta;$$

應用 $u=2\theta$，可知其值為 a^2．

5.3.3. 曲線之弧長

平面中連結任何兩點之曲線各有長短可言，其中以直線為最短，此在觀覺上極顯明之事實，嘗用解析法表而達之．欲知一直線之長，但知其端點之直角坐標即得，吾人在解析幾何學中已知之矣．欲量一曲線之

長短,當設法歸併於已解決之直線問題,以一多邊形內接之,然後求其內接多邊形之周在其邊數愈趨愈多時所趨之極限,要而言之,爲一求積分之問題而已.

假定一曲線之方程式爲 $y=f(x)$,其中 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 處處有一連續導數.苟欲計量其上 P_1P_n 一段之長,假定 P_1 之坐標爲 $x=x_1=a$, $y=f(x_1)=f(a)$, P_n 之坐標爲 $x=x_n=b$, $y=f(x_n)=f(b)$ 者,當先就橫軸上由 $x=a$ 至 $x=b$ 之一段以 $x_1=a$, x_2, $\cdots$ x_{n-1}, $x_n=b$ 諸點分作 $n-1$ 個分段,其長分別以 Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_{n-1} 表之,然後在曲線每分段之兩端,以直線連接之,即得一多邊形.觀圖 5.18,可以瞭然.此

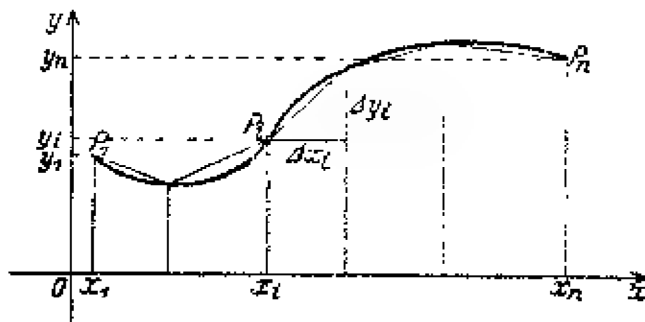


圖5.18

多邊形之周長顯爲

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\Delta x_i^{\,2}+\Delta y_i^{\,2}}=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

無疑.苟令其邊數愈趨愈多時,其周長有一極限可趨,且不論 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 諸點如何選擇,其極限確然不易者,即可用以量 $y=f(x)$ 在 P_1P_n 間之弧長,如是則此曲線謂有一長量,或謂有**鑐枉性**[1].吾人前既假定 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中處處有連續導數,則據中值定理,可知每一分段 Δx_i 中,必有 ξ_i 適合 $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(\xi_i)$ 者.因此之故,在 $n\to\infty$ 或 $\Delta x_i\to 0$ 時,據積分之存在定理,必有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

由是以論,**任何曲線,苟其 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中處處有連續導數者,必有鑐枉性,其在 $x=a$ 至 $x=b$ 兩點間之長爲**

$$s(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

(1) rectifiability; rectifiabilité; Rektifizierbarkeit.

若以 s 表其弧長,起自任何固定點訖於 x 點者,則據上所論,必有

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$$

關係之成立.

考上述量長之公式,僅可用於 $y=f(x)$ 之一單値支.欲解除此限制,當用參變數以表達曲線.設有一曲線如 $x=x(t)$, $y=y(t)$,則其弧長之公式將爲

$$s(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

其中 α,β 爲 t 之兩値,與 $x=a$, $x=b$ 分別相應者.據此以求 s,其法自遠勝於前,蓋其應用範圍可推至任何曲線,包括迴合線在內,但求其導數有連續性足矣.試在 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ 處處連續之假定下,設想 $x(t)$, $y(t)$ 由一多邊形逐步趨近,復假定其頂點與 t_0、t_1, $\cdots$, t_n 諸値相應,又令 $t_i-t_{i-1}=\Delta t_i(i=1,2,\cdots,n)$,當 t 有 Δt_i 之變時,x 及 y 之變量爲 Δx_i 及 Δy_i.惟如是,此多邊形之周長必爲

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i{}^2+\Delta y_i{}^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\,\Delta t_i,$$

由是可知 $n\to\infty$ 卽 $\Delta t_i\to 0$ 時,據積分之存在定理,必有

$$s(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

是卽以參變數表達弧長之公式.按其實際,如 $\dot{x}(t)$ 及 $\dot{y}(t)$ 在其變程中作有限次跳躍,則上列積分可作旁義積分論,其效用依然如故.**由是以論,若 $x(t)$ 及 $y(t)$ 在 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ 中有連續性,其導數 $\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$ 除作有限次跳躍外亦有連續性,則其所表曲線必有錯枉性,其弧長由上列公式表達之.**所當注意者,在此既假定 α 小於 β,可見曲線之弧長亦有正負之別,苟依參變數變大之向旨而進行,其弧長爲正,反是爲負.故弧長之正負與參變數之選擇有關.若另易一參變數 τ 如 $\tau=\tau(t)$,而其向旨不變者,換言之,$\dfrac{d\tau}{dt}>0$,則上列弧長公式亦依然不變,此理可證之如下:

$$\int\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\,d\tau$$

論至此，不可不略述如何用圓坐標 r,θ 以求弧長之法．此可由前式推論得之．蓋無論如何，必有

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

關係之成立．惟若 $r=f(\theta)$，可視爲參變數方程式之一種特殊情形，其中 $\theta=t,\dot{\theta}=1$ 者，由是遂得

$$s(\theta_0,\theta_1)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\dot{r}^2+r^2}\,d\theta$$

以量其弧長．

既明弧長之義，吾人卽以此爲參變數，藉以建立其曲線之方程式，亦無不可．試以 s 表一曲線之弧長，起於任何固定點 P_0，訖於 (x,y) 點者，則分居 P_0 點左右之點，其 s 自有正負之別，而曲線方程式將爲 $x=x(s),y=y(s)$。由是可以推斷

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=1$$

之成立；從而求其導數，復有

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0;$$

此兩關係應用甚廣．緣此關係，用 s 以立方程式常較用其他參變數爲便，蓋其形式將藉此而得異常簡潔美觀也．

茲更舉例以明弧長之計算．

［例一］ 設有一拋物線如 $y=\frac{1}{2}x^2$．其弧長之介於 $x=a$ 及 $x=b$ 之間者爲：

$$\int_a^b\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

此積分經 $x=\sinh u$ 之变替可化爲：

$$\int_{\operatorname{ar\,sinh}a}^{\operatorname{ar\,sinh}b}\cosh^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_{\operatorname{ar\,sinh}a}^{\operatorname{ar\,sinh}b}(1+\cosh 2u)\,du=\frac{1}{2}(u+\sinh u\cosh u)\Big|_{\operatorname{ar\,sinh}a}^{\operatorname{ar\,sinh}b},$$

由是得

$$s(a,b)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}b+b\sqrt{1+b^2}-\operatorname{ar\,sinh}a-a\sqrt{1+a^2}\right].$$

［例二］ 設有一懸鏈線[1] $y=\cosh x$，則

$$s(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_a^b\cosh x\,dx=\sinh b-\sinh a.$$

(1) catenary; chaînette; Kettenlinie

[例三] 設有一圓滾線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$，則因 $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$ 之故，可知其弧長之介於 $t=0$ 及 $t=\alpha$ 之者即為

$$s(0,\alpha)=\int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^\alpha a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt.$$

復因 $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$，可知 α 介於 0 與 2π 之間者為

$$s(0,\alpha)=2a\int_0^\alpha \sin\frac{t}{2}\,dt=4a\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=8a\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

由是知 α 若為 2π，則 $s(0,2\pi)=8a$，從而知一圓繞行一次滾動後，其圓滾線之長適四倍於其直徑.

5.3.4. 曲線之曲率

曲線之所以異於直線者，其方向隨處不同耳，因此如欲得一精確標準以量其曲，似當於其方向之變化中求之．惟其曲隨處而異，故有所謂每一點之曲率(1)，是為曲線在一點附近之幾何性質，與前所論面積與弧長，關係曲線之全程者不同．吾人苟沿一曲線依正向皆以恆速度進行，即在相等時間中經過相等弧長，必有一感覺油然而起，感覺為何，曲線方向之變化，有其速率可言是已．**吾人即擬以此速率作為量曲之標準**．設有一曲線 $y=f(x)$，其正切線(據 §5.2.3 所規定)與正橫軸所成之角為 α，視 α 為 s 之函數；於是所謂 $y=f(x)$ 在其弧長為 s 時之曲率 k 擬以 $k=\dfrac{d\alpha}{ds}$ 決定之．因 $\alpha=\arc\tan y'$，故據鏈導法得知

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dx}\div\frac{ds}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

(其中平方之正根，即 x 隨 s 之變大而變大之意)，由是得曲率之公式如下：

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

此式之應用，又限於 $y=f(x)$ 之一單值支，故對於曲線在坐標系所處地位，必有相當假定而後可．欲避免此限制，自以應用參變數為妙．如一曲線之方程式為 $x=x(t)$, $y=y(t)$，其中 t 為一參變數，則不論其性質如何，但求 $\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y}$ 處處連續，又 $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ 不等於 0，則由上式，或據

(1) curvature; courbure; Krümmung.

$$\alpha = \operatorname{arc} \tan y' = \operatorname{arc} \tan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{arc} \cot \frac{\dot{x}}{\dot{y}},$$

可以知其曲率爲

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

此公式在 $\dot{x}=0$ 時依然有効，其應用之廣，遠勝於前，自無待論. 更有進者，苟以曲線之弧長作爲參變數 $x=x(s)$, $y=y(s)$，則因 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$ 及 $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0$ 之故，其曲率公式將化簡爲

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \ddot{y}\left(\dot{x} + \dot{y}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{y}},$$

可謂簡潔極矣.

觀上述定義，可知曲率亦有正負之分，惟其曲線之向旨一反時，其正負亦隨之一反. 蓋將 t，或 s 易以新參變數 $\tau=-t$ 或 $\sigma=-s$，則 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 將一反其正負，而 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ 之正負不變，觀於

$$\frac{d}{d\tau}x(t(\tau)) = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \dot{x}(-1) = -\dot{x},$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x(t(\tau)) = \frac{d}{d\tau}(-\dot{x}) = -\frac{d\dot{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = (-\ddot{x})(-1),$$

可以見也.

據上所論，若依正向旨循行一圓線，其半徑爲 a 者，則由 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$，可以推知

$$k = \frac{1}{a}.$$

由是知其曲率處處相等，且等於其半徑之倒數. 此圓之所以爲圓，亦理有固然者，然由是可以益信此量曲標準之適合應用矣.

苟令 $\frac{1}{k}=\rho$，則 $|\rho|=\frac{1}{|k|}$ 常稱之爲曲線在每一點之**曲率半徑**(1). 試經過曲線 $y=f(x)$ 之任何一點，繪一圓與之相切，在相切點上兩者之向旨相同，曲率亦相同，且其中心當其曲率 k 爲正時在其正法線上，爲負時在其負法線上者，以 $y=f(x)$ 在此一點之**曲率圓**(2)稱之. 今以 $y=g(x)$

(1) radius of curvature; rayon de courbure; Krümmungsradius.

(2) circle of curvature; cercle de courbure; Krümmungskreis.

爲此曲率圓之方程式，據其定義可知其在該點上不僅 $f(x)=g(x)$ 及 $f'(x)=g'(x)$，復因

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{[1+f'^2(x)]^3}}=k=\frac{g''(x)}{\sqrt{[1+g'^2(x)]^3}}$$

之故，必有

$$f''(x)=g''(x).$$

據是以推，苟 $y=f(x)$ 在某點如有一反門點（即 $y''=0$）時，則其曲率爲 0，其曲率圓在此將爲一直線；此直線無他，即 $y=f(x)$ 在此點之切線是已。除此以外，得處處爲 $y=f(x)$ 作一曲率圓，其中心既在法線上，自可求之如下。設以一參變數 t 表 $y=f(x)$，得 $x=x(t)$，$y=y(t)$，則其法線之經過任何 x,y 點者，必有方向係數：

$$\cos\alpha'=\frac{\xi-x}{\rho},\quad \cos\beta'=\frac{\eta-y}{\rho}.$$

其中 ρ 爲曲率半徑，ξ,η 即爲所求中心之坐標。但由 §5.2.3 已知

$$\cos\alpha'=\frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\quad \cos\beta'=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

代入前二式中，即得

$$\xi=x-\frac{\rho\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\quad \eta=y+\frac{\rho\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}};$$

此曲率圓之中心，常簡稱爲曲線在 x,y 點之**曲率中心**[1]。苟令其中 t 在其規定變程中變化，則因 $\dot{x},\dot{y},\rho$ 均爲 t 之已知函數，其曲率中心 ξ,η 即從而繪一曲線，謂之 $x(t),y(t)$ 之**法包線**[2]，上列公式即此法包線之方程式也。

5.3.5 質量中心與曲線矩

設有 n 個質點，分佈於一平面之中，其質量分別爲 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，其縱坐標爲 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，於是

$$T=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu y_\nu=m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n$$

稱之爲此**質點系**[3]**對橫軸之矩**[4]。復以 M 表質點系之總質量，即

(1)center of curvature; centre de courbure; Krümmungsmittelpunkt.

(2)evolute; développée; Evolute. (3)system of particles; système des particules; Punktsystem. (4)moment; moment, statisches Moment

$M=m_1+m_2+\cdots+m_n$，則 $\eta=\frac{T}{M}$ 即為其質量中心[1]之縱坐標．據同理，可為質點系對縱軸之矩及其質量中心之横坐標各立一定義．是皆力學中之簡單概念，吾人已知之熟矣．在此所欲討論者，乃如何應用積分法以求此種概念推廣於普遍情形，藉以引入積分學之應用於力學問題耳．試假定質量匀佈於一曲線之上（為行文之便，不妨假定其密度為一常數 μ；若其分佈有連續性，亦可依法討論之，茲不贅．），則其對縱横軸之矩，及其質量中心之坐標將為何如？欲明此，當先假定其分佈初為有限個質點，然後據上述定義，尋求其極限可矣．設以弧長 s 為參變數表一曲線，並於線上任取 $n-1$ 個分點，從而將曲線分裂為 n 段，其弧長分別為 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$ 者，復設想每段中取一點，其縱坐標為 y_i，而即係該段質量 $\mu\Delta s_i$ 所集中之處，於是徵諸上述定義，此質點系對横軸之矩，必為

$$T=\mu\Sigma y_i\Delta s_i$$

無疑．明乎是，復令其上質點之分佈愈趨愈密，換言之，令 $\Delta s_i\to 0$，則此將歛於下列極限：

$$T=\mu\int_{s_0}^{s_1}y\,ds=\mu\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

是謂曲線 $y=f(x)$ 對横軸之矩．更考此曲線之總質量必為其長乘 μ：

$$\mu\int_{s_0}^{s_1}ds=\mu(s_1-s_0),$$

故其質量中心之坐標必為

$$\eta=\frac{\int_{s_0}^{s_1}y\,ds}{s_1-s_0},\qquad \xi=\frac{\int_{s_0}^{s_1}x\,ds}{s_1-s_0};$$

此在力學中實為曲線矩及曲線質量中心之定義，在此視為積分概念之一種應用可也．

5.3.6. 轉成面之面積與體積

設以横軸為轉軸[2]，將一曲線 $y=f(x)$ 轉動之；假定 $f(x)\geqq 0$，則

(1)center of mass; centre de masse; Schwerpunkt.

(2)axis of rotation; axe de rotation; Rotationsachse.

從而產生之曲面，稱之為 $f(x)$ 之轉成面[1]．欲知此轉成面之面積，介於 $x=x_0$ 及 $x=x_1(x_1>x_0)$ 之間者，當先將 $y=f(x)$ 以一多邊形替代之，從而獲得種種平截頭圓錐面[2]，更求其面積之和當多邊形之邊數無限制趨多時所斂之極限．如是即可知其面積 A 為

$$A=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{s_0}^{s_1}y\,ds;$$

據此，可見一曲線 $y=f(x)$ 若有一轉成面，**其面積為其曲線之長乘其質量中心因轉動而經歷之途程**，是即所謂 Guldin 定理是矣．

據同理，可以證其轉成面之體積 v，介於 $x=x_0$ 及 $x=x_1(x_1>x_0)$ 之間者，為

$$v=\pi\int_{x_0}^{x_1}y^2\,dx,$$

是亦由於一種極限之認識，讀者可自求之，茲不復贅．

3.5.7. 轉動慣量

在研究物體之轉動現象時，有所謂轉動慣量[3]者，在力學中佔一重要地位，茲略述之．設有一質點 m，其縱坐標為 y 者，以橫軸為轉動軸線，用恆定角速度[4] ω 轉動（即在每時單位內轉動一角 ω），如是則其動能量[5]據定義當為

$$\frac{m}{2}(y\omega)^2,$$

其中 $\frac{1}{2}\omega^2$ 之係量 my^2，稱之為此**質點對橫軸之轉動慣量**．

此定義既明，設有 n 個質點，其質量分別為 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，其縱坐標為 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 者，合成一質點系，則該系對橫軸之轉動慣量必為

$$T=\sum_i m_i y_i^2.$$

此為質點系本身之一種性質，與轉動狀態無關者．苟將此全系轉動，其

(1) surface of revolution; surface de révolution, Rotationsfläche. (2) frustum of circular cone; tronc de cône; Kreiskegelstumpfe. (3) moment of inertia; moment d'inertie; Trägheitsmoment. (4) uniform angular velocity; vitesse angulaire uniforme; konstante Winkelgeschwindigkeit. (5) kinetic energy; énergie cinétique. kinetische Energie.

中質點彼此間之距離不變者，則其動能量將爲此轉動慣量乘其角速度平方之半．由是可見轉動慣量之在轉動現象，其地位與質量之在直線運動(1)完全相似，其所以如此重要者，原因實在乎是．

今假定質量勻佈於一曲線 $y=f(x)$ 之上，並觀察其中由 $x=x_0$ 至 $x=x_1(x_1>x_0)$之一段；爲行文之便，復假定其分佈密度爲 1．如是據類似前段之推理，可知其對橫軸之轉動慣量 T_x 爲

$$T_x=\int_{s_0}^{s_1}y^2\,ds=\int_{x_0}^{x_1}y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

對縱軸之轉動慣量 T_y 爲

$$T_y=\int_{s_0}^{s_1}x^2\,ds=\int_{x_0}^{x_1}x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

是皆由極限概念而可以識之，無待贅矣．

5.3.8. 舉例

自微積法昌明之後，幾何學之發展，又闢一新蹊徑；蓋應用微積學以治幾何問題，有所謂微分幾何學(2)之成立，其理論宏深精美，非本書所能論其梗概．茲略舉數例於後，以闡明上述概念．

［例一］ 圓滾線 考其方程式 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，即可知其由 $t=0$ 至 $t=2\pi$ 之弧長（當其圓滾動一次所繪之圓滾線線段）爲 $8a$，已如§5.3.3 所述．至於由此線段及橫軸所圍成之面積則爲

$$I=\int_0^{2\pi}y\dot{x}\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=3a^2\pi,$$

故三倍於其動圓之面積．

更求其曲率半徑 $\rho=\frac{1}{k}$，則有

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}=-2a\sqrt{2(1-\cos t)}=-4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|;$$

由是知其值在 $t=0,\pm2\pi,\cdots$ 時爲 0，在此各點上，其切線均垂直於橫軸．

---

(1) rectilinear motion; mouvement rectiligne, geradlinige Bewegung.

(2) differential geometry; géométrie différentielle; Differentialgeometrie.

若以橫軸為轉動軸線，作一轉動，因而產生之轉成面必有如下面積：

$$A=2\pi\int_0^{8a}y\,ds=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

$$=16a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^3u\,du=16a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2u)\sin u\,du,$$

此積分可用 $\cos u=v$ 之交替以求之，得

$$A=16a^2\pi\left(-\cos u+\frac{1}{3}\cos^3u\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{64a^2\pi}{3}.$$

至於其質量中心之縱坐標 η 及其對橫軸之轉動惰量 I_x 為

$$\eta=\frac{4}{3}a=\frac{A}{2\pi s},\quad I_x=\frac{256}{15}a^3,$$

讀者可自證之.

〔例二〕 懸鏈線　據 §5.3.3 所述，已知懸鏈線之弧長為

$$s=\int_a^b\cosh x\,dx=\sinh b-\sinh a,$$

其中 a,b 為任何兩點. 若以橫軸為轉動軸線而轉動之，則其轉成面之面積為

$$A=2\pi\int_a^b\cosh^2x\,dx=2\pi\int_a^b\frac{1+\cosh 2x}{2}\,dx$$

$$=\pi\left(b-a+\frac{1}{2}\sinh 2b-\frac{1}{2}\sinh 2a\right).$$

更考懸鏈線由 a 至 b 之一線段，其質量中心之縱坐標必為

$$\eta=\frac{A}{2\pi s}=\frac{b-a+\frac{1}{2}\sinh 2b-\frac{1}{2}\sinh 2a}{2(\sinh b-\sinh a)}.$$

最後求得其曲率如下：

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh x}{\cosh^3x}=\frac{1}{\cosh^2x}.$$

〔例三〕 橢圓與雙紐線　此兩曲線之弧長，不能由初等函數表達之，蓋為一種橢圓積分故也(參閱 §4.6.1). 就橢圓 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 言之，其弧長為

$$s=\frac{1}{a}\int\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx=a\int\frac{1-\kappa^2\xi^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\kappa^2\xi^2)}}\,d\xi,$$

其中 $\xi=\frac{x}{a}$，$\kappa^2=1-\frac{b^2}{a^2}$，試應用 $\xi=\sin\phi$ 之交替，此積分可化為

$$s=\int\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\phi}\,d\phi=a\int\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}\,d\phi.$$

欲求橢圓之半周，必令 x 由 $-a$ 變至 $+a$，其意即 ξ 在 $-1\leqq\xi\leqq+1$，ϕ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqq\phi\leqq\frac{\pi}{2}$ 中變化. 此為一橢圓積分，不能由初等函數表而述之者.

復考雙紐線之圓坐標方程式為 $r^2=2a^2\cos 2\theta$，故其弧長為

$$s=\int\sqrt{r^2+r'^2}\,dt=\int\sqrt{2a^2\cos 2t+2a^2\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t}}\,dt$$

$$=a\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\cos 2t}}=a\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-2\sin^2 t}}$$

試用一新變數 $u=\tan t$，則因

$$\sin^2 t=\frac{u^2}{1+u^2},\quad dt=\frac{du}{1+u^2}$$

之故，必有

$$s=a\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

令其中 u 由 -1 變至 $+1$，即得雙紐線一紐之長

$$a\sqrt{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

是爲一特殊之橢圓積分，昔德國大數學家 Gauss 曾加以深入之研究者.

例 題

1. 試計算半三次拋物線 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 與橫軸及 $x=a$，$x=b$ 兩直線所圍之面積.

2. 試計算直線 $y=x$ 與 Descartes 葉形線之下半圈所圍面積.（應用 195 頁題 7 所得之參變數方程式.）

3. 試計算 Archimedes 螺線 $r=a\theta\quad(a>0)$ 與任意兩矢徑所圍成之扇形面積.

4. 試用極坐標計算心臟線（195 頁題 3）之面積.

5. 試計算星形線（195 頁題 6）之面積.

6. 以 x 軸上之任何一點 $P(x_0,0)$ 爲定點，圓線 $x^2+y^2=1$ 即有一相應之垂足曲線. 試計算此曲線之面積；並證明 P 在原點時，其面積爲最小.

7. 試就橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 解同上之問題.

8. 以弧長作參變數，試求心臟線之參變數方程式.

9. 同法求圓擺線之方程式.

10. 試計算半三次拋物線 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 之弧長.

11. 試計算星形線之全長.

12. 試計算下列各曲線之弧長：

(a) Archimedes 螺線 $r=a\theta\quad(a>0)$.

(b) 對數螺線 $r=e^{m\theta}$.

(c) 心臟線（195 頁題 3）.

(d) 曲線 $r=a(\theta^2-1)$.

13. 試求 (a) 拋物線 $y=x^2$, (b) 橢圓 $x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$ 之曲率半徑，分別以 x 及 ϕ 之函數表達之. 更求曲率半徑之最大及最小值，以及此等最大及最小值所在之點.

14. 試草繪曲線

$$x=\int_0^t\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du,\quad y=\int_0^t\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du,$$

並決定其曲率半徑(ρ).

15. 試證一曲線 $x=x(t), y=y(t)$ 之曲率公式不因坐標軸之轉動而變，亦不因參變數之交替[如 $t=\phi(\tau)$，其中 $\phi'(\tau)>0$]而變.

16. 設 $r=f(\theta)$ 為一曲線之極坐標方程式. 試證其曲率公式為

$$k=\frac{2r'^2-rr''+r^2}{(r'^2+r^2)^{3/2}},$$

其中

$$r'=\frac{dr}{d\theta},\quad r''=\frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

17. 設球半徑為 r，試求球帶之體積及表面積. 所謂球帶者，即夾於二平行平面間之球體部分，此二平面與球心之距離可假定為 h_1, h_2.

18. 一圓線以一不與相交之直線為軸而旋轉之，得一曲面，名曰轉成圓環面[1]. 試求其體積及表面積.

19. 試求懸鏈曲面[2]之面積. 此曲面係由懸鏈線 $y=\cosh x$ 之弧繞 x 軸旋轉而成.

20. 試草繪由下之方程式

$$x=\int_0^t\cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt,\quad y=\int_0^t\sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt$$

所定義之曲線. 當 t 自 $-\infty$ 變至 $+\infty$，此曲線如何變化? 試以弧長之函數計算其曲率 k.

21. 一曲線之切線，其自切點至 y 軸之長度恆為 1 者，此曲線名曰等切曲線[3]. 試求其方程式，次證此曲線各點上之曲率半徑與該點至 y 軸之法線長度成反比例. 更計算等切曲線之弧長，並以弧長為參變數求其方程式.

22. 設 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 為一適合曲線. 在其諸法線上各取定長為 p 之線段，則此線段端點所繪之軌跡謂之原曲線之平行曲線[4]. 試求其面積、弧長及曲率半徑.

---

(1) torus (anchor ring); tore; Ringfläche.　(2) catenoid; caténoïde; Kettenfläche.

(3) tractrix; tractrice; Traktrix.　(4) parallel curve; courbe parallèle; Parallelkurve.

23. 試求下列曲線上任意弧之質量中心:(a)一半徑為 r 之圓,(b)一懸鏈線.

24. 設有長方形 $a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d$ 試計算其界線對 x 軸之轉動慣量.

25. 試計算懸鏈線 $y=\cosh x$ 上任意弧對(a) x 軸及(b) y 軸之轉動慣量.

26. 方程式 $y=f(x)+\alpha$, $a\leqq x\leqq b$, 代表一曲線族,相應於參變數 α 之每一值,卽得族中之一條曲線.試證在此族曲線中,其對 x 軸之轉動慣量為最小者,必其質量中心適在 x 軸上.

第四節　力學中最簡單之問題

幾何學之外,為微積分學最初發展之原動力者,當推力學. 力學現象錯綜紛紜,然其間自有一貫之理; 蓋據 Newton 所建立之基本原則,種種現象皆可以闡明無餘.惟此基本原則之說明,必有賴於導數概念,而其應用又非積分方法不為功.故力學問題之提出,足以刺激微積分學之昌明,而微積分學之成就,又足影響力學之發展; 數學與物理學之彼此濬發,相得益彰,於此得一顯著之例焉.

5.4.1. 力學中之基本假設

力學問題之最簡單者,首推一個質點之運動. 設有一質點,其質量為 m 者,沿一曲線運動,則其位置當由曲線之弧長 s(由某固定點起算之 s)規定之(若沿一直線運動,可用 x 以代 s); 欲知其運動情形,當考其 s 如何隨時間 t 而變. 明乎函數 $s=\phi(t)$,則質點之運動自明; 其導數:

$$\frac{ds}{dt}=\phi'(t)=\dot{s}$$

為其運動之速度,其第二重導數:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\phi''(t)=\ddot{s}$$

為其運動之加速度,是皆顯而易見者.

力學之主旨,要而論之,在乎用**力**[1]之概念,以解釋或描寫一切運動現象而已.所謂力,不僅有強弱,且有一方向可言.據 Newton 第二基本定理,**凡一質點之沿一曲線運動者,其質量乘其加速度必等於其沿此**

(1) force; force; Kraft.

曲線所受之力，以公式表之，得

$$m\ddot{s}=F.$$

於是知力之方向與其加速度之方向相同，當速度變大時，其方向為 s 變大之方向，否則與 s 變大之方向適相反．此定理，初視之，似為力之定義而已．然按之實際，吾人常能由他種事實或假設以測知力之作用為何如．苟假定 F 為已知，則此公式實表達一重要關係，據是即可用積分法以推斷其運動情形 $s=\phi(t)$ 矣．

吾人所已知之力，以重力[1]為最淺近易覺，凡地上之物，無不受其影響．據實驗所得結果，作用於質量 m 之重力，論其方向為豎直向下，論其量為 mg，其中 g 為一恆量，若以秒量時間，以厘米量長，即約等於 981．惟如是，若有一質點 m 沿一曲線運動，則重力沿此曲線之作用為 $mg\cos\alpha$，其中 α 為其切線與豎直向下線所成之角，觀圖 5.19，可以瞭然．

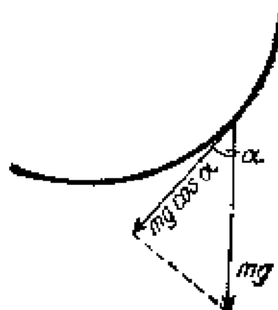


圖5.19

由是以論，苟假定已知一質點所受之力；如為求簡之故，假定 F 為 $mf(s)$，其中 $f(s)$ 為一已知函數，隨 s 而定，與時間 t 無關者，則其運動 $s=\phi(t)$，據 Newton 第二基本定理，可由

$$\ddot{s}=\frac{1}{m}F=f(s)$$

規定之．是為一微分方程式，其中含有未知函數 $s=\phi(t)$ 及其第二重導數．故質點運動，實為一微分方程式問題．茲略舉數例於後，以見其大要，至其普遍理論，非本書所能及也．

5.4.2. 舉例

［例一］ 自由落體之運動　設有一質點，因受重力之影響，沿豎直向下之 x 軸落下，則據前段所論，其空間坐標隨時間而變之函數 $x(t)$ 必滿足下列微分方程式：

$$\ddot{x}=g;$$

其中 g 即為重力恆量，如前段所述者．由是應用積分法，得

(1) force of gravity; pesanteur; Schwerkraft.

$$\dot{x}(t)=gt+v_0,$$

其中 v_0 爲一積分常數，考其意義，爲 $t=0$ 時(卽開始觀察時)之速度 $v_0=\dot{x}(0)$，卽所謂初速度.據此更用積分法，卽得

$$x(t)=\frac{g}{2}t^2+v_0t+x_0,$$

其中 x_0 又爲一積分常數，其意乃 $t=0$ 時質點之坐標 $x_0=x(0)$，卽所謂初位置.知其初位置及初速度，則自由落體之運動，卽於 $x(t)=\frac{g}{2}t^2+v_0t+x_0$ 可以識之矣.

［例二］ 落體之受空氣阻力[1]者，大地之空氣，當使物體下落之途程發生影響，故吾人若將此一因素，同時兼顧，則其結果與例一所論，殊有不同者.所謂空氣阻力，可視爲一種力，其方向與下墜方向相反，至於其量爲何，當依經驗之暗示而有所假設，例如假設(a)爲 $-r\dot{x}$，其中 r 爲一正數，意卽阻力之強弱與下墜速度成正比，或(b)爲 $-r\dot{x}^2$，意卽與速度之平方成正比.苟如是，則據 Newton 定理，其運動情形當由

$$(a)\quad m\ddot{x}=mg-r\dot{x}, \qquad\qquad (b)\quad m\ddot{x}=mg-r\dot{x}^2,$$

規定之.試令 $\dot{x}=u(t)$，則 $\ddot{x}(t)=\dot{u}(t)$，於是此兩方程式將爲

$$(a)\quad m\dot{u}=mg-ru, \qquad\qquad (b)\quad m\dot{u}=mg-ru^2;$$

由是得

$$(a)\quad \frac{dt}{du}=\frac{1}{g-\frac{ru}{m}}, \qquad\qquad (b)\quad \frac{dt}{du}=\frac{1}{g-\frac{ru^2}{m}}.$$

據此求積分，卽得

$$(a)\quad t(u)=-\frac{m}{r}\log\left(1-\frac{r}{mg}u\right)+t_0,$$

$$(b)\quad t(u)=-\frac{1}{2}k\log\frac{kg-u}{kg+u}+t_0,$$

其中 k 爲 $\sqrt{\frac{m}{rg}}$ 之簡寫，而 t_0 爲一積分常數.更求其逆函數，則有

$$(a)\quad u(t)=-\frac{mg}{r}\left(e^{\frac{-r(t-t_0)}{m}}-1\right),$$

$$(b)\quad u(t)=-gk\frac{e^{-\frac{2(t-t_0)}{k}}-1}{e^{-\frac{2(t-t_0)}{k}}+1}.$$

(1) resistance of the air; résistance de l'air; Reibung der Luft.

由此關係,可見其下墜速度實隨時間而趨於一極限,絕非無限制趨大者,蓋因

$$(a)\quad \lim_{t\to\infty} u(t)=-\frac{mg}{r}, \qquad (b)\quad \lim_{t\to\infty} v(t)=\sqrt{\frac{mg}{r}},$$

可知其極限之值實與 m 及 r 均有關係. 此爲下墜現象之一重要性質, 其原因實由於空氣之阻力也. 既得 $u=\dot{x}(t)$ 之後,復用積分法,必有(其結果可復求其導數而證實之)

$$(a)\quad x(t)=\frac{m^2}{r^2}g\,e^{-\frac{r(t-t_0)}{m}}-\frac{mg}{r}t+c,$$

$$(b)\quad x(t)=\frac{m}{r}\log\cosh\sqrt{\frac{rg}{m}}(t-t_0)+c,$$

其中 c 又爲一積分常數. 欲規定 t_0 及 c 兩常數, 但知下墜質點之初位置 $x_0=x(0)$ 及初速度 $\dot{x}(0)=u(0)=v_0$ 即可. 此兩常數依開始條件確定之後, x 隨 t 而變之情形乃完全確定. 於是, 已成事實固可得一解釋,將來事實亦可從而預測,關於下墜現象之一切,無不豁然明瞭矣.

［例三］ 最簡之彈性振動[1] 設有一質點 m 因受彈力而沿 x 軸運動. 假定彈力之方向, 指於坐標原點,其量隨其與原點相隔之距離成正比,換言之,爲 $-kx$. 設 k 爲一正數, 則此彈力在 x 爲正時爲負, x 爲負時爲正. 一質點 m 受此種彈力作用,其運動據 Newton 定理當爲

$$m\ddot{x}=-kx.$$

所當注意者,此質點之運動,不能由此微分方程式完全決定,吾人必知其在某確定時間,如 $t=0$ 時之位置及速度而後可. 由物理學之觀點論之,吾人可設想一質點由任何位置以任何速度開始運動,運動開始後之情形,則完全由自然定律(其形式爲一微分方程)支配之;考自然定律,自有其必然性,而開始條件如何,則隨情形而不同,無必然性可言. 更就數學觀點論之,欲求此微分方程式之解,必兩次應用積分法,故其解必含有兩個任擇常數,由兩個條件規定之而後可.

試求上列微分方程式之解,其事殊不難. 蓋應用求導數法,可直接證實其解爲

$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t,$$

其中 ω 爲 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 之簡寫,而 c_1 及 c_2 爲兩任擇常數. 不寧惟是, 吾人當於例四中證明,凡滿足此微分方程式之 $x(t)$ 必盡在於是,故受上述彈力作用之運動必由是而表達之. 考上列 $x(t)$ 形式,可寫如

$$x(t)=a\sin\omega(t-\delta)=-a\sin\omega\delta\cos\omega t+a\cos\omega\delta\sin\omega t,$$

其意乃令 $-a\sin\omega\delta=c_1$, $a\cos\omega\delta=c_2$, 以 a 及 δ 兩常數代替 c_1 及 c_2 耳. 此種運動,常稱

(1) elastic vibration; vibration élastique, elastische Schwingung.

之為正弦振動(1)，或簡諧振動(2)．觀其性質，實有週期性，蓋其坐標 $x(t)$ 及速度 $\dot{x}(t)$ 每經 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 之時間後週而復始，因此之故，$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 遂稱之為振動之週期(3)，蓋 $\sin\omega t$ 及 $\cos\omega t$ 均有週期 T 故也．又無論如何振動，其坐標 $x(t)$ 所不能超過之 a，稱之為振動之振幅(4)．週期之倒數 $\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 稱之為振動之頻率(5)，即每單位時間內振動之次數也．吾人將於第十章中對此振動問題更有論述，讀者可參閱之．

［例四］ 沿曲線運動之普遍討論 就觀上述各例，吾人乃得提出一普遍問題而討論之．設一質點 m 沿一曲線運動，其所受之力為 $mf(s)$．倘如是，則問題之關鍵，在乎如何求解下列微分方程式

$$\ddot{s}=f(s)$$

而已．既假定其中 $f(s)$ 為已知，此微分方程式可由一普通方法解之．其法如下．試以 $F(s)$ 表 $f(s)$ 之一原函數，即 $F'(s)=f(s)$，然後將 $\ddot{s}=f(s)=F'(s)$ 之左右各以 $\dot{s}$ 乘之，得 $\dot{s}\ddot{s}=\dot{s}F'(s)$．觀此式之左方，實為 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right)$，而其右方則為 $F(s)$ 對 t 之導數，故有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right)=\frac{d}{dt}F(s),$$

由是求其積分，得

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2=F(s)+c,$$

其中 c 為一待定之常數．此式亦可寫如 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2[F(s)+c]}$．據此，吾人雖不能直接獲得 $s(t)$，然其逆函數 $t(s)$ 得由

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2[F(s)+c]}}$$

以決定之．由是應用積分法，即得

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2[F(s)+c]}}+c_1,$$

其中 c_1 又為一待定常數．既得此結果，復將其中兩常數依開始條件規定之，其問題可謂已告解決矣．

欲應用此法以討論上述之彈性運動，但視前之 x 為 s，令 $f(s)=-\omega^2 s$ 即可．於是得 $F(s)=-\frac{1}{2}\omega^2 s^2$．惟如是，遂有

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2c-\omega^2 s^2}},$$

(1)sinusoidal vibration; vibration sinusoidal, Sinus-und Kosinusschwingungen.
(2)simple harmonic motion; mouvement vibratoire harmonique; Sinus-und Kosinusschwingungen. (3)period; période; Schwingungsdauer. (4)amplitude; amplitude; Amplitude. (5)frequency; frequence; Frequenz.

由是得
$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2c-\omega^2s^2}}+c_1,$$

若以$\frac{\omega s}{\sqrt{2c}}$為新變數,即可求得此積分.其結果為

$$t=\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega s}{\sqrt{2c}}+c_1,$$

更求其逆函數,得
$$s=\frac{\sqrt{2c}}{\omega}\sin\omega(t-c_1).$$

與前所得結果完全相符,亦理有固然者.

觀上所述,復可瞭然於積分常數之意義及如何規定之法.試假定某質點在 $t=0$ 時所處位置為零點,所有速度為 1,則 c 及 c_1 必滿足

$$0=\frac{\sqrt{2c}}{\omega}\sin\omega c_1,\qquad 1=\sqrt{2c}\cos\omega c_1$$

由是知 $c_1=0$, $c=\frac{1}{2}$. 且不論其初位置及初速度為何如, c 及 c_1 兩常數皆得由是決定之.然則運動現象不僅依 Newton 定理而進行,同時必受開始條件之支配,於此可以識矣.

[例五] 受重力沿曲線滑下之變速情形　如仿例四所論,可討論一較普遍之力學問題.設有一質點 m,因受重力作用而沿一曲線滑下,其曲線假定為已知,且對於滑下運動不發生摩擦阻力者.試令縱坐標軸豎直向上,換言之,與重力方向相反,並以一參變數 θ 表達所假定為已知之曲線 $x=\phi(\theta)=x(\theta)$, $y=\psi(\theta)=y(\theta)$,特繪其中一部分(即滑下現象發生處),如圖 5.20.在此曲線之每一點,設想有一重力,對滑下質點發生作用,其量為 mg,其方向豎直向下(為 y 變小之方向)者.試觀此曲線在每點上所有切線與負 y 軸所成之角,以 α 名之,則據前所論,質點 m 在每點上所受重力必為

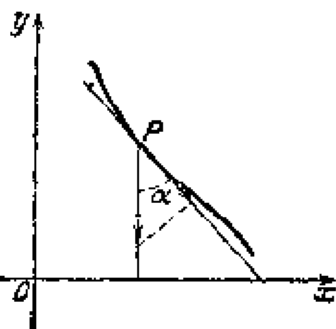


圖5.20

$$mg\cos\alpha=-mg\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

其中 x', y' 為
$$x'=\frac{d\phi}{d\theta}=\phi'(\theta),\qquad y'=\frac{d\psi}{d\theta}=\psi'(\theta)$$

之簡寫.若以弧長 s 作參變數,則將化簡為 $mg\cos\alpha=-mg\frac{dy}{ds}$;於是據 Newton 定理, $s(t)$ 必滿足下列微分方程式:

$$\ddot{s}=-g\frac{dy}{ds}.$$

吾人既假定 $x(s)$, $y(s)$ 為一已知曲線,故此式之右方為一已知函數,欲求者為 $s(t)$ 耳.

欲解此微分方程式,可應用前例所述之法,將式之兩方各以 $\dot{s}$ 乘之.於是其左方為

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right)$，而右方 $y(s)$ 中之 s 當視爲 t 之函數，故爲 $-g\frac{dy}{ds}$ 無疑．惟如是，乃得用積分法以推斷

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2=-gy+c$$

之成立，其中 c 爲一積分常數．欲定 c 之意義，當一考質點 m 之初速度爲何如．試假定 $t=0$ 時，質點在曲線上所處位置由 θ_0 規定之，其時之坐標爲 $x_0=\phi(\theta_0)$，$y_0=\psi(\theta_0)$，速度爲 0，即 $\dot{s}(0)=0$．如是則 c 之值爲 $-gy_0+c=0$，故得

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2=-g(y-y_0).$$

由是可知

$$\frac{dt}{ds}=\pm\frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}},$$

是即

$$t=c_1\pm\int\frac{ds}{\sqrt{2g(y_0-y)}},$$

其中 c_1 又爲一積分常數．card式中平方根之正負，自與 $\dot{s}$ 相同，當質點沿一線段運動，其縱坐標低於 y_0 者，其正負不變，蓋 $\dot{s}$ 之正負僅能在 $\dot{s}=0$ 或 $y-y_0=0$ 時變化也．據此結果，若改用 θ 爲積分變數，則有

$$t=c_1\pm\int\frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2g(y_0-y)}}=c_1\pm\int\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{2g(y_0-y)}}d\theta,$$

其中 $x'=\phi'(\theta)$，$y'=\psi'(\theta)$，$y=\psi(\theta)$ 爲已知函數，故可應用前章所論方法以求其積分．至於 c_1 之規定，當注意 $t=0$ 時，θ 之值爲 θ_0；惟如是，遂得

$$t=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{2g(y_0-y)}}d\theta.$$

此積分如能求得，即可知質點 m 由 θ_0 達 θ 所需時間爲何如．更求其逆函數 $\theta(t)$，則由 $x=\phi(\theta(t))$，$y=\psi(\theta(t))$ 即可明其運動情形矣．

吾人對此問題之研討，至此可告一段落．欲繼續有所討論，當對 $x(\theta)$，$y(\theta)$，即曲線之形式更有假定，觀於如下所述例六及例七，可以見之．惟細考所得結果，尚可作一推斷．設 $x(\theta)$、$y(\theta)$ 有下凹性，如圖 5.21 所示；令質點 m 由 A 點滑下，其時 $s=0$，$\theta=\theta_0$，又 A 之坐標以 $x_0=x(\theta_0)$，$y_0=y(\theta_0)$ 名之．因

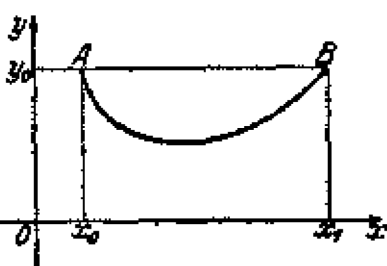


圖5.21

$\frac{dy}{ds}$ 在此爲負，$\ddot{s}$ 爲正，故質點 m 由 A 點以遞升速度沿曲線直達其最低點．既達其最低點之後，其加速度一變爲負，蓋 $-g\frac{dy}{ds}$ 此後爲一負數．其速度隨之變小也．如此逐漸變小，直至 $y=y_0$ 時，其值 $\dot{s}$ 爲 0，蓋由 $\dot{s}^2=-2g(y-y_0)$ 可以見之，其時質點之位置已達 B 點，其高與出發點 A 正同．復因其加速度在此仍爲負數，其運動又回復前程，直至 A 點，如是往返，永無

盡期，推厥原由，實因摩擦阻力置諸不論之故耳．在此振動現象中，質點由 B 回至 A 所需時間，與其由 A 達 B 之時間必相同．因此，若以 T 表其經歷全程之時間，即由 A 達 B，重返於 A 所需之時間，則其振動顯有週期性，且其週期為 T，亦顯而可見．於是其週期之半 $\frac{T}{2}$ 必為

$$\frac{T}{2}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}\,dx\right|=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\frac{\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}{\psi(\theta_0)-\psi(\theta)}}\,d\theta\right|,$$

其中 θ_0 及 θ_1 為 θ 之值，分別與 A, B 相應者．復次，若令 θ_2 與曲線之最低點相應，則質點由 A 直達此最低點之時間為

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta_2}\sqrt{\frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\psi_0-\psi}}\,d\theta$$

［例六］ 普通擺　普通擺亦稱單擺(1)，乃一質點受重力作用沿一圓線滑下之謂，故可用前例(例五)所述之法處理之．設一質點由 A 點滑下，其時 $\theta=\alpha$，然後沿下列圓線運動：

$$x=l\sin\theta,\quad y=-l\cos\theta,$$

其半徑為 l 者．如是則據前所論，其振動之週期 T 必為

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

其中 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 為質點在 $t=0$ 時，即以零速度滑下時之角，所謂振動之振幅是已．由是應用交替式

$$u=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad \frac{du}{d\theta}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

即可知其振動之週期為

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}},$$

是為一橢圓積分，不能由初等函數表達之者．惟當其振幅相當微小時，其中 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 得以 0 近似替代之，於是得其週期之近似值如下：

$$2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

故知 T 約為 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

［例七］ 圓滾擺(2)　據例六所述，可見單擺振動之週期，顯與其振幅發生關聯．惟為製造

---

(1)simple pendulum; pendule simple; mathematisches Pendel.

(2)cycloidal pendulum; pendule cycloïdal; Zykloidenpendel

準確之鐘錶，必求某一曲線，其擺之振動週期與其開始振動時之位置完全無關者。據 Huygens 研討之結果，以爲圓滾線確能適合此條件。

欲令一質點振動於圓滾線（其圖形如5.9）之上，必使後者之會切點向上，與重力方向相

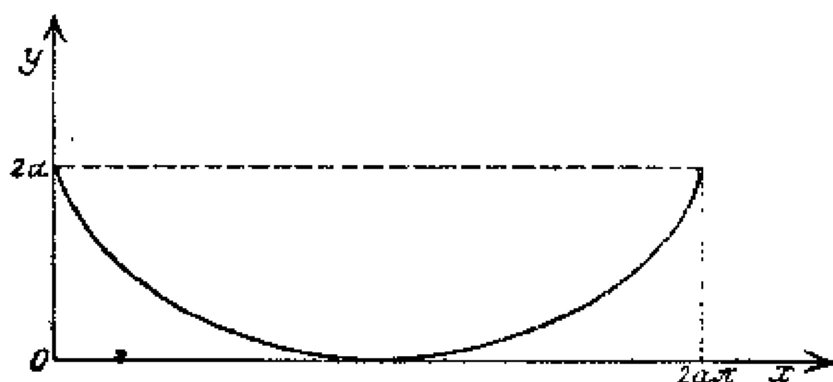


圖5.22

反，故當以橫軸爲轉軸作一轉動，復依縱軸之正方向平移 $2a$，得其圖形如圖 5.22，其方程式當爲

$$x=a(\theta-\sin\theta),$$

$$y=a(1+\cos\theta).$$

於是一質點開始運動時之位置如爲

$$y_0=a(1+\cos\alpha)\qquad(0<\alpha<\pi),$$

由此降落至最低點所需之時間，據例六所得結果，必爲

$$\frac{T}{4}=\sqrt{\frac{1}{2g}}\int_\alpha^\pi\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}}\,d\theta=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_\alpha^\pi\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\alpha-\cos\theta}}\,d\theta.$$

惟因
$$\cos\alpha-\cos\theta=2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

之故，得
$$\frac{T}{4}=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_\alpha^\pi\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\,d\theta.$$

試用 u 作積分變數，其與 θ 之關係爲 $\cos\frac{\theta}{2}=u\cos\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\theta}{2}d\theta=-2\cos\frac{\alpha}{2}du$ 者，即可求得此積分如下：

$$\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\,d\theta=-2\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-2\arcsin u,$$

由是即得
$$T=-8\sqrt{\frac{a}{g}}\arcsin\left.\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right|_\alpha^\pi=4\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

故圓擺擺之振動週期與其振幅 α 絲毫無關，亦以見矣

例　題

1. 設一半徑為 r，中心在原點之圓，圓周上有一點 A 以恆定速度 1 循之運動. 又有定長為 $l(>r)$ 之一直線將此點 A 與另一點 B 相連接；而 B 因受約束之故僅能沿 x 軸行動（其間關係如蒸汽機之曲柄、連桿及活塞）. 試計算 B 之速度及加速度，以時間之函數表達之.

2. 一質點以速度 4 自原點出發，由於重力之影響沿一直線滑下至豎線 $x=2$ 處方止. 問其所經路線須有如何斜度，庶能在最短時間中到達此豎線.

3. 一質點在一直線上運動，因受阻力而產生減速度 ku^2. 其中 u 為速度，而 k 為一常數. 試求其速度(u)及時間(t)之公式，以其去初位置之距離 s 與初速度 v_0 表達之.

4. 一單位質量之質點在 x 軸上運動，其所受之力為 $f(x)=-\sin x$.

(a)假定 $t=0$ 時，該點在 $x=0$，而有速度 $v_0=2$. 試決定其運動為何如. 示 $t\to\infty$ 時該點趨近一極限位置，並求此極限位置.

(b)假定 v_0 為任何值而其餘條件不變，則如 $v_0>2$，該點在 $t\to\infty$ 時趨向無限遠；如 $v_0<2$，該點在原點之左右往復振動，試示之.

5. 以地球中心為原點任擇一坐標系，地球半徑以 R 表之. 據 Newton 萬有引律，在 y 軸上如有一單位質量之質點，其所受地球之引力必為 $-\frac{\mu M}{y^2}$，其中 μ 為"引力恆量"，而 M 為地球質量.

(a)若該質點自 $y_0(>R)$ 點開始落下，試計算其運動；此即假定 $t=0$ 時，該點在 $y=y_0$，其速度 $v_0=0$.

(b)試求(a)中質點着地時之速度.

(c)應用(b)之結果，計算一質點自無限遠處落至地面之速度①.

6. 一質量為 m 之質點循橢圓 $r=\frac{k}{1-e\cos\theta}$ 運動，其所受之力為 $\frac{cm}{r^2}$ 方向恆朝原點，試論此質點之運動情形，求其週期，並示其矢徑在相等時間內所掠過之面積必相等.

5.4.3. 功量概念之應用

物理學中有一重要概念，曰功量[1]. 茲就其在力學上之意義及應用講明之，庶吾人對於前

---

①此速度與由地面上發出一拋射體使其永不復返之最小初速度相同.

(1)Work; travail; Arbeit.

段所述各問題，更有透澈之認識焉.

設有一質點沿一曲線運動，其位置如何，由曲線之弧長 s，自某固定點量起者，規定之.於是其沿此曲線所受之力爲 s 之一函數 $f(s)$.此函數 $f(s)$ 可假定有連續性；當力之方向與 s 變大之方向相同時，其函數值爲正，反是爲負.

沿一曲線發生作用之力，苟有一恆量（即不隨地而變者），則此力乘其質點運動之途徑 s_1-s_0 稱之爲其力所作之功，其中 s_0 爲運動起點，s_1 爲運動終點.據此定義，可知力之方向與運動方向相同者，其功量爲正，力之方向與運動方向相反者，其功量爲負；由前者言之，常謂其力作功，由後者言之，謂之抗力作功.

以上就力之有恆量者論之.其他無恆量之力（即隨處變化者）當用極限概念以定其功量.其法無他，先將曲線上由 s_0 至 s_1 之一線段分作 n 段，等與不等，無關宏旨，惟必求其如是之小，使每分段中之力，幾有恆量可言；如以 σ_ν 表其在第 ν 個分段中之任何一點，則其中作用之力，可由 $f(\sigma_\nu)$ 近似表達之.假定力之作用於每分段中者確爲 $f(\sigma_\nu)$，則吾人欲求之功量自爲

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\sigma_\nu)\Delta s_\nu,$$

其中 Δs_ν 乃表第 ν 個分段之弧長.由是令 n 無限制趨大，即其最長分段趨於 0 時，據積分之存在定理，必有

$$w=\int_{s_0}^{s_1} f(s)\,ds,$$

是即稱之爲力 $f(s)$ 之功量.

苟吾人視質點之位置坐標 s 爲時間 t 之函數，則其所受之力 $f(s)=p$ 亦爲 t 之函數.於是以 s,p 爲直角坐標，可標繪一曲線 $s=s(t)$，$p=p(t)$，以運動之功量圖稱之.試設想一有週期性之運動，如在各種機械中所常見者，可見其點 $s(t)$，$p(t)$ 經過一週期 T 後，必重回至出發點，故其功量圖必爲一還合曲線.就此情形論之，其曲線或僅爲一線段所成，先進後退於同一線段之上如彈性振動所示者；或爲一較普遍之還合曲線包圍一面積者，如機械活塞內之汽壓在前進與後退動程中不相等時即是.要之，其力在每一週期內之功量必爲此功量曲線所圍之負面積：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\frac{ds}{dt}\,dt.$$

當其邊界循周向皆爲正時，其運動之功量爲負，反是爲正.苟其曲線爲由若干圈迴線所合成者，當分別求其面積，復據前法以定功量之正負，然後求其總和可矣.

功量之定義既明，特更舉例以明其用.

〔例一〕 兩質點之互相吸引　設有一質點,固定於坐標原點者,依 Newton 引力定理[1],吸引另一質點,其所處地位去原點之距離以 r 表之,如是則此後一質點在連接前後兩質點之直線上運動時,其所受之力當為

$$f(r) = -\mu\frac{1}{r^2},$$

是即 Newton 引力定理之內容,式中 μ 為一正常量. 與乎是,可見此質點由 r 移至 $r_1(<r)$ 其所受力之功量為正,且為

$$-\mu\int_r^{r_1}\frac{dr}{r^2} = \mu\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right).$$

由是以觀,設有一與此引力相反之力,作用於此質點,使其由 r 漸移至 $r_1(>r)$,則此引力之功量仍如上式,惟為一負量耳. 然則就其與此相反之力所作功量言之,其絕對值必與此相等,惟正負相反,故為 $\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$ 無疑. 試令其中 r_1 逐漸增大,即有一極限 $\frac{\mu}{r}$. 此極限之意義,細考之,乃一質點因引力作用,由 r 無限遠移時,抗引力所作之功量而已. 此功量常稱之為兩點間之勢函數[2],或簡稱為勢. 由是言之,所謂勢者,將互相吸引之兩質點完全分離所需之功量耳. 如將一電子完全脫離一原子時,有所謂電離電勢[3]者,即其一例也.

〔例二〕 彈簧之伸長　將一彈簧伸長所需之功量,亦可依上法計算之. 據彈性理論[4]所述,力之作用於此者,當為 kx,意即與其時所伸長者成正比. 惟如是,欲由 $x=0$ 伸至 $x=x_1$,其功量為

$$\int_0^{x_1} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2.$$

〔例三〕 容電器之充電　功量概念,不僅對現於力學,且可應用於其他科學中,茲特舉容電器[5]之充電[6]為例. 設以 Q 表一容電器中之電量[7],C 表其電容[8],V 表其間之電勢差,於是據電學中所論,必有 $Q=CV$ 關係之成立. 今欲在電勢差 V 之下充以電量 Q,其必要之功量自為 QV. 惟充電時,其電勢差固未嘗在在不變,實隨 Q 而增大者. 因此之故,必應用極限概念如前所論者,從而知充電於容電器時,其功量為

$$\int_0^{Q_1} V\,dQ = \frac{1}{C}\int_0^{Q_1} Q\,dQ = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2}Q_1V_1,$$

其中 Q_1 為充入之總電量,V_1 為充電後容電器之電勢差.

---

(1)law of attraction; loi d'attraction; Anziehungsgesetz. (2)potential; potential; Potential. (3)ionization potential; potential d'ionisation; Ionisierungsspannung. (4)theory of elasticity; théorie d'elasticité; Elastizitätstheorie. (5)condenser; condensateur; Kondensator. (6)charging; charger; Aufladen. (7)quantity of electricity; quantité d'électricité; Elektrizitätsmenge. (8)capacity; capacité; Kapazität.

第五章附錄

法包線之性質

據§5.3.4所述，一曲線 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 之曲率中心 ξ,η 必滿足

$$\xi=x-\rho\frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}},\quad \eta=y+\rho\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}},$$

其中 ρ 爲其曲率半徑．若令 t 在其變程中變化，ξ,η 卽從而標繪一軌跡，稱之爲 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 之法包線；上列公式卽爲其方程式，蓋以 t 爲參變數表而出之者也．由此方程式，可以闡明其間之關係，玆略述其重要而饒趣味者於後．

爲求公式之簡潔，可改用弧長 s 爲參變數，於是遂有

$$\dot x^2+\dot y^2=1,\qquad \dot x\ddot x+\dot y\ddot y=0,$$

$$\frac{1}{\rho}=k=\frac{\ddot y}{\dot x}=-\frac{\ddot x}{\dot y},$$

或

$$\rho\ddot y=\dot x,\qquad \rho\ddot x=-\dot y;$$

而一曲線 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 之法包線將有如下方程式矣：

$$\xi=x-\rho\dot y,\qquad \eta=y+\rho\dot x.$$

求此式之導數，得

$$\dot\xi=\dot x-\rho\ddot y-\dot\rho\dot y=-\dot\rho\dot y,\qquad \dot\eta=\dot y+\rho\ddot x+\dot\rho\dot x=\dot\rho\dot x,$$

於是有

$$\dot\xi\dot x+\dot\eta\dot y=0.$$

此關係有一重要意義，試作一曲線 $x(s)$，$y(s)$ 之法線，其方向餘弦自爲 $-\dot y$ 及 $\dot x$，由是知此**法線實與其法包線相切於其曲率中心．故曲線之法線實爲其法包線之切線**，要而言之，**曲線之法包線爲其法線所包成者**①(見圖5.23)．

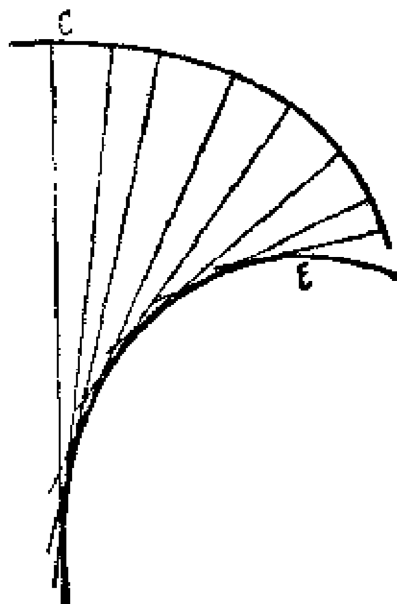


圖5.23

試就法包線而細考之，其弧長由任何固定點起算者，以 σ 名之，於是必有

①任何曲線爲其切線所包成．

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=\dot\sigma^2=\dot\xi^2+\dot\eta^2;$$

故由上列公式,復鑒於 $\dot x^2+\dot y^2=1$ 之成立,可知

$$\dot\sigma^2=\dot\rho^2.$$

惟如是,若選擇一適當方向以計量 σ, 又假定 $\dot\sigma\neq 0$, 即可推斷

$$\dot\sigma=\dot\rho,$$

由是求其積分,得 $$\sigma_1-\sigma_0=\rho_1-\rho_0,$$

其意即謂法包線上介於兩點間之弧長必與其兩點上曲率半徑之差相等,惟在此必假定 $\dot\rho$ 不等於 0 而後可. 此假定自不可缺;蓋 $\dot\rho$ 如一變其正負,則因 $\dot\sigma=\dot\rho$ 之故,其法包線之弧長在此將達其莫大或莫小值,故經過此點之後,必一反其原有向旨,或將上式改為 $\dot\sigma=-\dot\rho$. 當曲率半徑達其莫大或莫小值之時,即為其法包線之會切點, 是亦不可不注意者(其證從略).

如上所述曲線與其法包線之關係,復可由另一觀點闡明之.設想有一可彎曲而不可伸長之棉紗線, 置於法包線之上,然後展開其一段, 使與法包線逐漸分離,惟在在與之相切, 苟其端點 Q 適在原曲線 C 上,則如是展開之, Q 必從而繪成曲線 C. 因此, C 常稱之為法包線 E 之切展線[1].明乎此,吾人可由任何曲線 E 出發, 求其切展線 C, 則 E 即為 C 之法包線.欲證此,當假定 E 為吾人所已知, 其方程式為 $\xi=\xi(\sigma)$, $\eta=\eta(\sigma)$, σ 為其弧長. 試設想有一棉紗線置於其上,其端點 Q 與 E 上之 A 點相合,其弧長為 a 者,然後將紗線之一段漸漸展開,使與 E 相切於 P, 其時之弧長為 $\sigma\leqq a$, 則 PQ 之長為 $a-\sigma$, 其方向餘弦為 $\dot\xi$ 及 $\dot\eta$. 惟如是,若以 x, y 表 Q 之坐標,必有

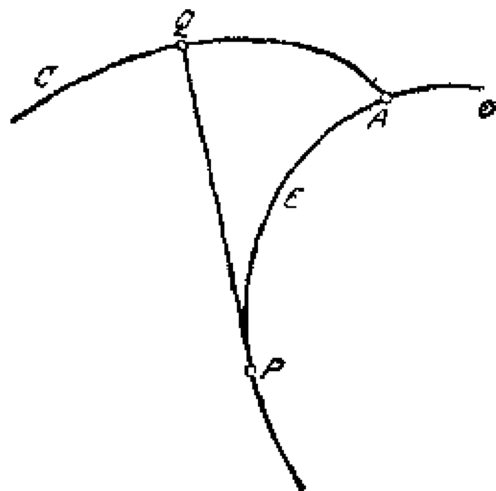


圖5.24

$$x=\xi+(a-\sigma)\dot\xi,\qquad y=\eta+(a-\sigma)\dot\eta,$$

(1) involute; développante, Evolvent.

是卽切展線 C 之方程式,以 σ 爲參變數者,由此求導數,卽得

$$\dot{x}=\dot{\xi}-\dot{\xi}+(a-\sigma)\ddot{\xi}=(a-\sigma)\ddot{\xi},$$

$$\dot{y}=\dot{\eta}-\dot{\eta}+(a-\sigma)\ddot{\eta}=(a-\sigma)\ddot{\eta};$$

復因 $\dot{\xi}\ddot{\xi}+\dot{\eta}\ddot{\eta}=0$ 之故,可知

$$\dot{\xi}\dot{x}+\dot{\eta}\dot{y}=0,$$

是卽直線 PQ 垂直於切展線 C 之謂.故 C 之法線卽爲 E 之切線,換言之,E 爲 C 之法包線.由是以論,**任何曲線爲其所有切展線之法包線,於此可以識矣.**

茲復略舉數例於後:

[例一] 試求圓滾線 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 之法包線,得

$$\xi=x-\dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}},\qquad \eta=y+\dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}.$$

更由上式求 $\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y}$ 代入其中,卽得

$$\xi=t+\sin t,\qquad \eta=-1+\cos t,$$

是亦爲一圓滾線;蓋令 $t=\tau+\pi$,卽有 $\xi-\pi=\tau-\sin\tau$,$\eta+2=1-\cos\tau$,故圓滾線之法包線

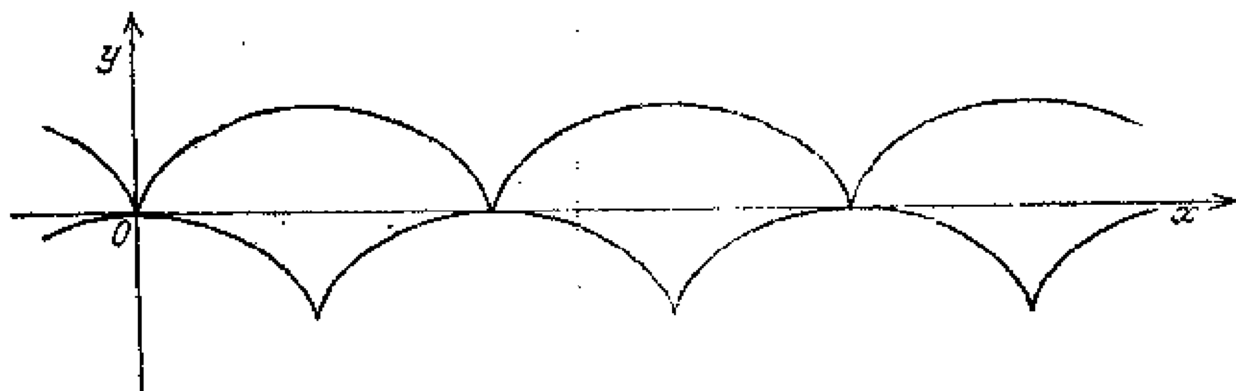


圖5.25

又爲一圓滾線,與原圓滾線相似,且由此移動而得者,觀圖 5.25,可以見之.

[例二] 試將一圓線 $\xi=\cos t$, $\eta=\sin t$ 展開如圖 5.26,得其切展線之方程式如

$$x=\cos t+t\sin t,\qquad y=-\sin t+t\cos t.$$

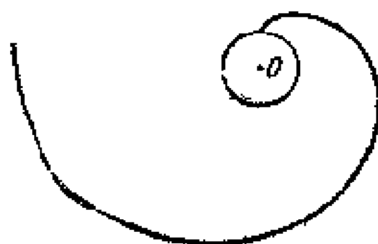


圖 5.26

[例三] 設有一橢圓如 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$,其法包線必爲

$$\xi=x-\dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = [illegible] \sin^3 t,$$

其中t爲一參變數.苟消去t,則得其方程式如

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

是爲星形線,其圖形如圖5.27.由其參變數方程式,不難證明橢圓之曲率半徑在其四頂點上達

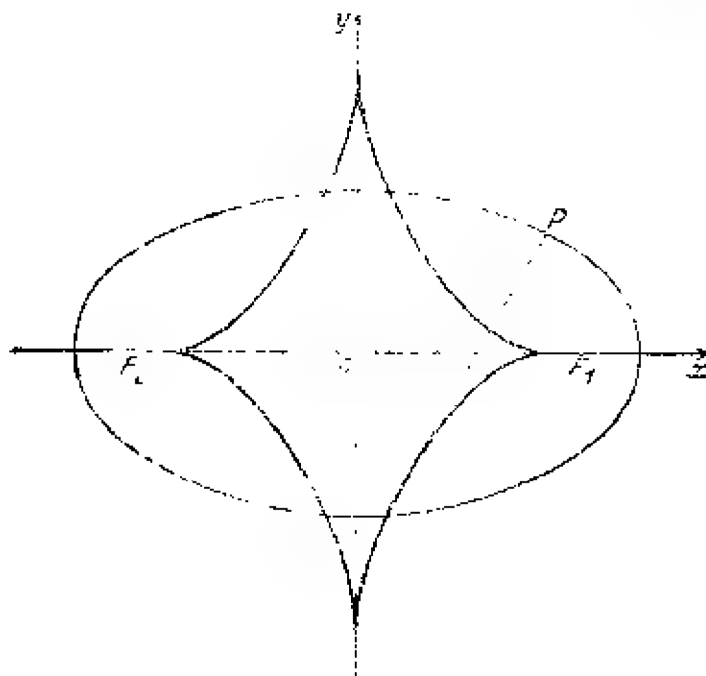


圖5.27

其其大或最小值,而其法包線在此適有會切點,觀圖5.27,更可瞭然.

例題

1.試證圓外圓滾線(195頁,題2)之切展線爲另一相似之圓外圓滾線,可由前者藉轉動及收縮而得之.

2.試證圓內圓滾線(195頁,題4)之切展線爲另一圓內圓滾線,可由前者藉轉動及擴張而得之.

第六章 函數之展開

綜觀前所論述之各種函數，其最淺顯易明者，莫如有理函數．有理函數者，疊次應用有理算法於自變數 x 之結果．其他函數，就其性質與形式言之，皆不若是之簡明，乃事之無可諱言者．然則吾人能否在相當條件下以一**有理函數**或一**整有理函數**替代其他函數，使兩者相差甚近；果如是，則在理論上得開闢一新蹊徑，在應用上復有莫大便利．請先舉兩例以見其事之能否成功．

第一節 近似表達法舉例

［例一］ 吾人皆知有所謂幾何級數者，在 $q\neq 1$，n 為正整數時，其形式為

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+r_n,$$

其中

$$r_n=\frac{q^n}{1-q},$$

常以餘項(1)稱之．若 $|q|<1$，則其餘項 r_n 隨 $n\to\infty$ 而趨於 0，於是得一無盡級數

$$1+q+q^2+q^3+\cdots,$$

其和為 $\frac{1}{1-q}$ 者．明乎是，得令 $q=-t$，代入於

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t},$$

逐項求其積分而得

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n,$$

其中 R_n 為

$$R_n=\int_0^x r_n\,dt=(-1)^n\int_0^x\frac{t^n dt}{1+t},$$

亦以餘項稱之．由是以論，不論 n 為任何正整數，$\log(1+x)$ 實已由一 n 次多項式：

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

近似表達之，而一考 R_n 之意義，實表示兩者之差，換言之，為近似表達時所未能避免之誤差(2)．欲知其表達之如何近似，當設法估計 R_n，其事可應用 §2.6.2 所述之法以實現之．苟 $x\geqq 0$，則 $\frac{t^n}{1+t}$ 在 $0\leqq t\leqq x$ 中無處為負，且無處能超過 t^n，是以

(1)remainder; résidu; Rest.　(2)error; erreur; Fehler.

$$|R_n| \leqq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

故當 x 在 $0 \leqq x \leqq 1$ 中變化時，但令 n 相當大，足致 $|R_n|$ 任意小．復次，苟 x 之變程爲 $-1 < x \leqq 0$，則有

$$|R_n| \leqq \frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} t^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)},$$

故亦可求一相當大之 n 以致 $|R_n|$ 任意小．惟此種估計法在 $x=-1$ 時自不可用．

綜上所論，可知

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$

其餘項 R_n 當 x 在 $-1 < x \leqq 1$ 中變化時必隨 $n \to \infty$ 而趨於 0．不當惟是，吾人可爲 R_n 估定一上涯，與 x 之變化無關者，因之不論 x 爲其變程 $-1+h \leqq x \leqq 1$ 中任何一值，其中 h 爲適合 $0 < h \leqq 1$ 之一數，皆可適用．如

$$|R_n| \leqq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n+1}$$

之眞確，昭然無疑．由是以論，不論 x 在其變程 $-1 < x \leqq 1$ 中如何變化，$\log(1+x)$ 可由一 n 次多項式近似表達之，其誤差無虞能超過 $\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n+1}$，可斷言矣．所當注意者，若 x 之變程爲 $|x| > 1$，則上述餘項非特不趨於 0，且隨 $n \to \infty$ 無限制而趨大，故欲以一 n 次多項式近似表達之，其事爲不可能，讀者可自證之，不復贅述．

誠如以上所述，R_n 在 $-1 < x \leqq 1$ 中果隨 $n \to \infty$ 而趨於 0，則吾人在此變程中已爲 $\log(1+x)$ 求得另一形式，即一無盡級數：

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \cdots.$$

令其中 $x=1$，則有

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \cdots,$$

此關係之發明，殊堪注意．

試假定 x 之變程爲 $-1 < x < 1$，可將上式中 x 易以 $-x$ 而得

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - S_n.$$

令 n 爲偶數，求 $\log(1+x) - \log(1-x)$，即得

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \overline{R_n},$$

其中 $\overline{R_n}$ 爲

$$\overline{R_n} = \frac{1}{2}(R_n - S_n) = \frac{1}{2}\int_0^x t^n\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t^2}dt;$$

因

$$|R_n|\leqq\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

之故,可知其隨 $n\to\infty$ 而趨於0. 惟如是,乃知 x 在 $|x|<1$ 中必有

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{ar\,tanh}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

故已爲 $\operatorname{ar\,tanh}x$ 求得一無盡級數. 細審此式之內容,當 x 在 $-1<x<1$ 中變化時,$\frac{1+x}{1-x}$ 得隨之而取得任何正數.故吾人如能選擇一適當之 x,即可由是而計算任何正數之對數,其誤差不能超過前所估計者.

[例二] 如

$$\operatorname{arc\,tan}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2},$$

亦可依此法以一 n 次多項式近似表達之.假定 n 爲一正整數,則因

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+r_n,$$

$$r_n=(-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

之故,代入前式,逐項求積分,得

$$\operatorname{arc\,tan}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R_n,$$

$$R_n=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt;$$

由是可知 R_n 在 $-1\leqq x\leqq1$ 中必隨 $n\to\infty$ 而趨於0, 蓋由

$$|R_n|\leqq\int_0^{|x|}t^{2n}dt=\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

可以見之.據同式,可知 R_n 之絕對值在 $|x|>1$ 時必隨 $x\to\infty$ 而無限制增大.由是以觀,吾人在 $|x|\leqq1$ 中已爲 $\operatorname{arc\,tan}x$ 求得一無盡級數如

$$\operatorname{arc\,tan}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\cdots,$$

由是知 $x=1$ 時,因 $\operatorname{arc\,tan}1=\frac{\pi}{4}$ 之故,必有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\cdots,$$

是亦一深堪注意之關係,似可應用之以計算 π 者.

例題

1.試證 $$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+x)}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ (x>0)$$

並由是以求 $\log\frac{4}{3}$ 至小數兩位.

2.應用下列級數

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

以算 $\log\frac{6}{5}$ 至小數三位，並證所得結果準確至小數三位.

3. 設 $30\leqq x\leqq 31$，須用 $\log(1+x)$ 之級數幾項，方能得 $\log(1+x)$ 之值而其誤差在百分之十以內?

第二節 Taylor 定理

吾人鑒於上述兩例，不覺隨之而生一感想，以為任何函數，苟其導數在其變數之規定閉程中至少自第一重至第 $n+1$ 重皆有連續性者，似均可由一整有理函數近似表達之.然按其實際，無論如何高重之導數必存在且有連續性而後可，故 n 得假定為任意整數.此問題在微積分學初期發展中已引起普遍之重視，Newton 之門弟子有 Taylor 者，復建立一公式，以之近似表達函數，世遂以 Taylor 公式稱之.

6.2.1. 關於整有理函數之 Taylor 公式

為求問題性質之透澈明瞭，先就一整有理函數而討論之.設有一整有理函數，或一多項式如

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

則其係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 可由 $f(x)$ 在 $x=0$ 時之各重導數表而出之.蓋屢次求此式之導數，必有

$$a_0=f(0), a_1=f'(0), a_2=\frac{1}{2!}f''(0), \cdots, a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

由是以觀，任何 n 次多項式必可化為

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0);$$

此不過形式上之改換而已，然其係數之意義，由是可以大明，且吾人如能知 $f(x)$ 及其各重導數在 $x=0$ 之值，即可從而推知 $f(x)$ 在任何 x 時當為何如.是即稱之為多項式之 Taylor 公式.

考此公式之意義，乃將任何多項式 $f(x)$ 由其各重導數在一固定點(即 $x=0$)之值完全決定之.惟此固定點可任意選擇，不必定為原點.因

此之故，自應化爲如下之普遍形式，以便應用．試將 x 易以 $\xi=x+h$，而一考 $f(\xi)=f(x+h)$，將其中 x 認爲固定，h 認爲變數，於是此函數自隨 h 而變，得 $f(\xi)=f(x+h)=g(h)$．由是求其導數，得

$$g'(h)=f'(\xi),\ \cdots,g^{(n)}(h)=f^{(n)}(\xi),$$

故在 $h=0$ 時必有 $g'(0)=f'(x),\ \cdots,g^{(n)}(0)=f^{(n)}(x)$．

然後應用前式於 $f(x+h)=g(h)$，因其爲 h 之 n 次多項式，故得

$$f(\xi)=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x),$$

是爲其普遍形式，包括前式於其中者．

6.2.2. 關於任何函數之 Taylor 公式

然則 $f(x)$ 所表者，苟非多項式而爲一任何函數，則上式決不能望其替代 $f(\xi)$，至多僅能近似表達 $f(\xi)$ 而已．試任擇 x 及 $\xi=x+h$ 兩點，其間相隔爲 $h=\xi-x$ 者，如是則 $f(\xi)$ 無論如何，不能等於

$$f(x)+(\xi-x)f'(x)+\cdots+\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n)}(x),$$

故以此替代 $f(\xi)$，其間必有誤差，試以 R_n 名之，則有

$$f(\xi)=f(x)+(\xi-x)f'(x)+\frac{(\xi-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n.$$

此公式初不過爲餘項 R_n 之定義而已．然據此可爲 R_n 求得一簡潔形式，從而研討其特性．試假定 ξ 爲固定，x 爲變數，則 R_n 爲 x 之函數．惟 $x=\xi$ 時，R_n 必爲 0，換言之，$R_n(\xi)=0$，此由其定義可以見之．復求上式之導數，必有

$$0=f'(x)-f'(x)+(\xi-x)f''(x)-(\xi-x)f''(x)+\cdots-\frac{(\xi-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)+R_n'(x),$$

由是知 $$R_n'(x)=-\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x).$$

惟如是，遂得

$$R_n(x)=R_n(x)-R_n(\xi)=\int_\xi^x R'_n(t)dt=-\int_x^\xi R'_n(t)dt,$$

或
$$R_n(x)=\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

若改用 τ 作積分變數，與 t 之關係如 $\tau=t-x$ 者，則此式可化為

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h(h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)d\tau.$$

由是以論，苟 $f(x)$ 在其變程中有連續性，又其導數直至 $n+1$ 重亦有連續性，則

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n,$$

或以 ξ 代 $x+h$，$h=\xi-x$，

$$f(\xi)=f(x)+(\xi-x)f'(x)+\frac{(\xi-x^2)}{2!}f''(x)+\cdots$$
$$+\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n,$$

其餘項 R_n 為

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h(h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)d\tau.$$

是即所謂 Taylor 定理．苟 $f(x)$ 為一整有理函數，則 $R_n=0$，否則即為 $f(\xi)$ 代以一 n 次多項式所必有之誤差，其如何隨 n 而變，為吾人所亟欲明瞭者，故非設法估計之不可．

觀上列 Taylor 公式，當其中 $x=0$ 時，必為（復以 x 易 h）

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}!f^{(n)}(0)+R_n,$$

其餘項 R_n 為

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau,$$

是為一特殊情形，其形式較簡，極便應用，故論及之．

6.2.3. 餘項之估計

細考 Taylor 公式之意義，其最初 $n+1$ 項能否近似表達一函數，當視其餘項如何隨 n 而變．故餘項之估計，實為問題之重要關鍵．吾人在此擬應用積分中值定理以估計之，其意謂 $p(\tau)$ 若在其變程中有連續

性，且無處爲負，又 $\phi(\tau)$ 在同一變程中亦有連續性，則必有一 θ，如 $0 \leqq \theta \leqq 1$ 者[1]，滿足

$$\int_0^h p(\tau)\phi(\tau)d\tau = \phi(\theta h)\int_0^h p(\tau)d\tau.$$

因此之故，若令 $p(\tau)=(h-\tau)^n$，應用此理於 R_n，即得

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

或令 $p(\tau)=1$，則有

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

前者爲 Lagrange 餘項式，後者爲 Cauchy 餘項式[2]，其中 θ 爲合於 $0 \leqq \theta \leqq 1$ 之一數，自與 n, x, h 有關者.

既爲餘項求得一簡明公式後，即可從而研究其如何隨 n 而變之情形. 苟其隨 $n\to\infty$ 而趨於 0，則 n 愈大，$f(x+h)$ 代以 h 之 n 次多項式，其間之誤差愈微. 果如是，**遂謂 $f(x+h)$ 由一無盡 Taylor 級數展開之，得：**

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

或令 $x=0$，其形式爲

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots.$$

上述之理，復可由另一觀點闡明之. 設令上列第一式中之 h 漸趨於 0，則據§3.7.4 之術語，其中各項趨 0 之數量級自有不同，如 $hf'(x)$ 趨 0 之數量級爲1，$\frac{h^2}{2!}f''(x)$趨 0 之數量級爲 2，餘類推. 因此，**觀其餘項之形式，可知一函數逐項展開，直展至一項之數量級爲 n 者，其所有誤差隨 $h\to 0$ 而趨 0 之數量級必爲 $n+1$.** 明乎是，可知 $x+h$ 愈近 x，則

---

①其實可假定 $0<\theta<1$. ②此二式（以及其他類公式）亦可分別由導數中值定理及普通中值定理(§4.3.3.3)推斷之. 吾人但分別應用其理於 $R_n(x)=R_n(x)-R_n(\xi)$ 及 $R_n(x)$，$(\xi-x)^{n+1}$ 兩函數，復注意 $R'_n(x)=-\frac{(\xi-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$ 即可，其中 ξ 爲一固定數. 如是推斷，可見 Taylor 定理爲中值定理之推廣，且不必假定 $n+1$ 重導數之連續性，但假定其存在已足，是其所長耳.

$f(x+h)$ 以此多項式表達之，愈見近似；且在 x 之鄰近，可使其近似程度隨意增進，但令 n 增大可矣.

例　題

1. 苟 $f(x)$ 之導數在 $a\leqq x\leqq b$ 中存在連續性，又 $f''(x)$ 不問 x 之值爲何如，始終不能爲負：$f''(x)\geqq 0$，如是則以 ξ 表此幾程中之任何一點，$f(x)$ 之圖形必須居於 $x=\xi$, $y=f(\xi)$ 點切線之下者.

2. 設將 $\dfrac{1}{1-x}$ 及 $\dfrac{1}{1+x}$ 以 x 之冪展開，試求其 Lagrange 餘項式中 θ 之值.

第三節　初等函數之展開

茲擬應用前節所得結果，求初等函數之展開，惟爲行文之便，僅擇其最淺近者，即其係數之組織特別簡單者而研討之，藉此略示其要旨，至於其他較爲繁複者，留待第八章及例題中詳論之.

6.3.1. 指數函數之展開

函數之最易展開者，莫如指數函數 $f(x)=e^x$，蓋其一切導數與其函數本身相同，在 $x=0$ 時皆等於 1，故據 Lagrange 餘項式得下列展開式：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

苟令其中 n 無限制趨大，則不論 x 爲任何固定數，其餘項必趨於 0，何以言之？無論如何，$|e^{\theta x}|\leqq e^{|x|}$ 之成立，可無疑義，試擇一固定整數 m，大於 $2|x|$ 者，則凡 n 之合於 $n\geqq m$ 者必滿足 $\dfrac{|x|}{n}<\dfrac{1}{2}$，可以斷言，因此遂得

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\frac{|x^m|}{m!}\cdot\frac{|x|}{m+1}\cdots\frac{|x|}{n+1}\leqq\frac{|x^m|}{m!}\cdot\frac{1}{2^{n+1-m}}\leqq\frac{|2x|^m}{m!}\cdot\frac{1}{2^n},$$

由是即爲上式之餘項求得一上涯如

$$|R_n|\leqq\frac{|2x|^m}{m!}\cdot e^{|x|}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

觀此式之右方，其前列兩因數與 n 無關，而 $\dfrac{1}{2^n}$ 則隨 $n\to\infty$ 而趨於 0，故欲證之理，已在於是. 苟假定 x 未嘗固定，而在 $-a\leqq x\leqq a$ 中變化（a

假定為一固定正數)，則據前所述，當 $m>2a$ 時，可估定合於 $n\geqq m$ 之 n，其餘項 R_n 終不能超過：

$$|R_n|\leqq \frac{|2a|^m}{m!}e^a\cdot\frac{1}{2^n}.$$

於是為 R_n 求得一上涯，對於 x 之在 $-a\leqq x\leqq a$ 中者皆為有效．由是以言，不論 x 在 $-a\leqq x\leqq a$ 中如何變化，R_n 必隨 $n\to\infty$ 而趨於 0．惟如是 e^x 得展開為一無盡級數：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!},$$

此形式無論 x 之值為何如均能成立．故第一章中所論之 e 即為自然對數之底，於此又獲一證．

欲計算數值，以應用 Taylor 公式之附有餘項者為便．如令 $x=1$，可由

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

以算 e．欲求其誤差至多為 $\frac{1}{10000}$，但擇一如是之 n，其餘項 R_n 小於 $\frac{1}{10000}$ 足矣．惟 R_n 既小①於 $\frac{3}{(n+1)!}$，故令 $n=7$ 即可，因 $8!>30,000$ 故也．如是即得 e 之近似值如

$$e=2.71822,$$

其誤差必小於 0.0001．至於第六位小數略去後所引起之誤差，在此置諸不論．

6.3.2. $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ 之展開

試應用 Taylor 公式，求多項式以近似替代 $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ 及 $\cosh x$ 諸函數，則據 Lagrange 餘項式，必有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(\theta x),$$

---

①此處又應用 $e<3$ 之關係；參閱 §1.4 7.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cosh(\theta x),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh(\theta x),$$

其中 θ 未必相同，惟均合於 $0 \leqq \theta \leqq 1$，又各隨 n 及 x 而異者. 由此諸式，可見其餘項不論 x 如何變化，必隨 $n \to \infty$ 而趨於 0. 因此之故，遂得展開爲下列無盡級數：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

又 $\sinh x$ 及 $\cosh x$ 亦可根據其原有定義由 e^x 求得其 Taylor 級數，讀者可自證之. 至於 $\log(1+x)$ 及 $\arctan x$ 之展開，已詳於前，故不復贅.

6.3.3. 二項式級數

二項式級數爲 Newton 數學發明之一，又爲 Taylor 展開式之一種應用，故略論之. 假定 x 之變程爲 $x > -1$，又 α 爲任何實數，爲正爲負，爲有理或爲無理，均無不可，所謂二項式級數者，將 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 依 Taylor 定理展開所得之無盡級數是已. 考 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$，實爲一冪函數，所以捨 x^{α} 而取 $(1+x)^{\alpha}$ 者，因前者之導數，除 α 爲正整數或 0 時無足討論之情形外，在 $x=0$ 未必皆有連續性故也. 試求 $f(x)$ 之導數，則有

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \cdots,$$
$$f^{(\nu)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)(1+x)^{\alpha-\nu}.$$

其值在 $x=0$ 時自爲

$$f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ \cdots,\ f^{(\nu)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1).$$

惟如是，遂得

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_{n};$$

現欲討論者，其餘項 R_n 如何隨 n 而變之情形而已．欲估計 R_n，其事雖不甚難，然不若上述諸例之簡易，故擬俟本章附錄中討論之．茲僅述其結果如下：苟 x 之變程爲 $|x|<1$，則 R_n 隨 $n\to\infty$ 而趨於0，故在此條件下 $(1+x)^{\alpha}$ 得展開爲一無盡級數：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu}x^{\nu},$$

世常以二項式級數稱之，其中$\binom{\alpha}{\nu}$在 $\nu>0$ 時爲

$$\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!},$$

在 $\nu=0$ 時爲$\binom{\alpha}{0}=1$之簡寫也．

例題

1．展開$(1+x)^{\frac{1}{2}}$至二項，復加上其餘項．試將其餘項估計之．

2．應用題1結果(棄去餘項)以算$\sqrt{2}$，其近似之準確程度爲何如?

3．在$x=0$之鄰近，如何之一次函數與$\sqrt[3]{1+x}$最相近似?在x何值之間其近似之誤差小於0.01?

4．在$x=0$之鄰近，如何之二次函數與$\sqrt[3]{1+x}$最相近似?在變程$-0.1\leqq x\leqq 0.1$中其最大誤差爲何?

5．在$x=0$之鄰近，(a)如何之一次函數，(b)如何之二次函數，與$\sqrt[4]{1+x}$最相近似?當$-0.1\leqq x\leqq 0.1$時，其最大誤差爲何?

6．試計算 $\sin(0.01)$至四位數字．

7．如上題求(a) $\cos(0.01)$，(b) $\sqrt[3]{126}$，(c) $\sqrt{97}$．

8．展開$\sin(x+h)$爲含h諸冪之 Taylor 級數，復應用此級數以求$\sin 31^{\circ}(=\sin(30^{\circ}+1^{\circ}))$

準三位數字.

試將題 9 至題 18 中各函數在 $x=$[illegible] 之鄰近展開至[illegible]，並附上其餘項（餘項須用 Lagrange 式）.

9. $\sin^2 x$.　　14. [illegible]

10. $\cos^3 x$.　　15. [illegible]

11. $\log \cos x$.　　16. [illegible]

12. $\tan x$.　　17. [illegible]

13. $\log \frac{1}{\cos x}$　　18. [illegible]

19. (a) 展開 $e^{\sin x}$ 至五項，並加上其餘[illegible]. (b) 在 [illegible] 級數中，代 t 以 $\sin x$ 之羃級數，所取項數以 x^4 之係數正確爲度．將所得結果與 (a) 比較.

20 試求一四次多項式，在 $x=0$ 之鄰近與 $\tan x$ 最相近似者．在如何之[illegible]中以此多項式替代 $\tan x$，其誤差在百分之 5 以內?

21. 試爲定義如下之函數 y，求其含 x 諸冪之 Taylor 級數止於第六項:

(a) $x^2+y^2=y$, $y(0)=0$; (b) $x^2+y^2=y$, $y(0)=1$; (c) $x^3+y^3=y$, $y(0)=0$.

第四節　Taylor 定理在幾何學中之應用

欲將一函數 $f(x)$ 或其圖形剖析入微，考其在某一點 $x=a$ 鄰近之性質，必詳察 x 由 a 變至 $x=a+h$ 之過程中，不論 h 如何小，其在 $f(x)$ 所引起之變量，即 $f(a+h)-f(a)$ 果爲何如．前論微分時，已將此問題討論及之，今吾人又得一更精密之工具以解決此問題．據 Taylor 定理，$f(a+h)-f(a)$ 可化爲一 n 次多項式及餘項之和；就此多項式言之，其中各項隨 $h\to 0$ 而趨 0 之數量級逐項增大，如最前一項之數量級爲 1，繼此爲 2, 3, ⋯．所取項數愈多，則分析愈見細密，如是可以收精益求精之功．

6.4.1. 曲線之接觸

應用此法以研討曲線之接觸(1)，可獲得極精密之結果．設有兩曲

(1) contact of curves, contact des courbes, Berührung von Kurven.

線$y=f(x)$及$y=g(x)$在$x=a$點不僅相交，且有一公共切線，則兩者在$x=a$謂有**初重接觸**；就$f(a+h)$及$g(a+h)$之展開式觀之，其最初兩項必彼此相等，即$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$．苟$f(x)$及$g(x)$在$x=a$點之第二重導數亦相等，則其曲線在此謂有**二重接觸**．於是兩函數之差$D(x)=f(x)-g(x)$，假定其第三重導數之存在，必可由下式表而達之．

$$D(a+h)=f(a+h)-g(a+h)=\frac{h^3}{3!}D'''(a+\theta h)$$

$$=\frac{h^3}{3!}F(h),$$

其中$F(h)$當$h\to 0$時必趨於$f'''(a)-g'''(a)$．故$D(a+h)$趨0之數量級至少為3，從可識矣．據是以言，苟$f(x)$及$g(x)$在$x=a$之高重導數直至第n重均彼此相等：

$$f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),f''(a)=g''(a),\ \cdots\ ,f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a),$$

其第$n+1$重導數復有連續性者，則其曲線在此謂有**n重接觸**．於是此兩函數之差將為

$$f(a+h)-g(a+h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F(h)$$

$$=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}D^{(n+1)}(a+\theta h),$$

其中$0\leqq\theta\leqq 1$，而$F(h)=D^{(n+1)}(a+\theta h)$隨$h\to 0$而趨於$f^{(n+1)}(a)-g^{(n+1)}(a)$，故在此接觸點上，$f(x)-g(x)$趨0之數量級至少為$n+1$，亦勢使然也．所當注意者，若謂$f(x)$及$g(x)$在某點有$n$重接觸，其意固未嘗絕對不許其有更高重之接觸，即未始不可有$f^{(n+1)}(a)=g^{(n+1)}(a)$．苟其$f^{(n+1)}(a)\neq g^{(n+1)}(a)$，則其接觸確為$n$重．據上述定義，兩曲線之接觸必為一幾何性質，不受坐標軸轉動之影響者，其證甚易，讀者可自求之．

明乎上述定義，Taylor展開式復有一簡明之幾何義意可言．蓋以Taylor多項式近似替代一函數，其意乃欲為一曲線尋求種種n次拋物線，在某點上彼此有可能之最高重接觸者，是即稱之為**密切拋物線**[1]．

(1) osculating parabola; parabole osculatrice; Schmiegungsparabel oder oskulierende Parabel.

茲特爲 $y=e^x$ 繪其最初之三條密切拋物線，讀者細視圖 6.1 而自得之可也。

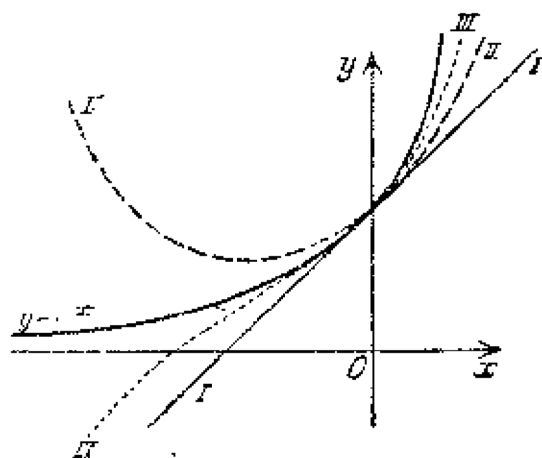


圖6.1

細考 Taylor 展開式，或標繪一曲線之密切拋物線時，有一事深足注意，特略及之。設有兩曲線，在某點上有 n 重接觸，而 n 爲一奇數者，則 $f(a-h)-g(a+h)$ 之正負在其接觸點鄰近始終如一，不因 h 之正負而變，此就其幾何意義言之，無異謂兩曲線在此點鄰近不相交叉，如一曲線與其切線之關係(假定 $y''\neq 0$)，即其一例。若 n 爲一偶數，則兩者交叉於其接觸點之鄰近，如一曲線與其切線在反囘點 (因 $f''(x)=0, f'''(x)\neq 0$) 之情形，讀者可自舉例明之，無待贅也。

6.4.2. 再論曲線之曲率圓

前論曲線之曲率，知有所謂曲率圓者。試作種種圓線與一曲線 $y=f(x)$ 相切於任何固定點 $x=a, y=b$，則合於此條件之圓，其多無限，其中心無一不居於其法線之上。就此無限多之圓，如以適當條件選擇其中心，可從而獲得一圓，與 $y=f(x)$ 適有二重接觸者。據 §5.3.4 所述，所謂 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 之曲率圓，爲一如是之圓 $y=g(x)$，在 $x=a$ 不僅 $g(a)=f(a), g'(a)=f'(a)$，且有 $g''(a)=f''(a)$。由是以論，$y=f(x)$ 在 $x=a$ 之曲率圓同時必爲其密切圓，在 $x=a$ 點有二重接觸者，可以識矣。此理既明，可知 $x=a$ 如爲 $y=f(x)$ 之反囘點或爲一如是之點，其上之曲率爲 0 者，則其曲率半徑趨無限大，在此情形下，其曲率圓即爲其 $x=a$ 點上之切線。就其他普通情形論之，若假定其接觸重數確爲 2，則其曲率圓在此不僅與 $y=f(x)$ 相切，且與之交叉，觀圖 6.2，可略見也。

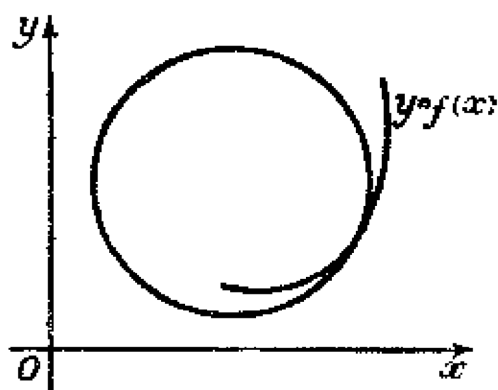


圖6.2

6.4.3. 再論莫大與莫小值問題

據 §5.1.1 所論,滿足 $f'(a)=0$ 之 a,代入於 $y=f(x)$,果能得其莫大或莫小值與否,當視 $f''(a)<0$ 或 $f''(a)>0$ 而定.此 $f''(a)\lessgtr 0$ 爲莫大或莫小值存在之充分條件;而非必要條件;蓋如 $f''(a)=0$,有三種可能情形,如 $y=-x^4$ 在 $x=0$ 有一莫大值,$y=x^4$ 有一莫小值,$y=x^3$ 無莫大又無莫小值,可以概見.自 Taylor 定理成立之後,莫大莫小值存在之充分條件,得以最普遍形式提出之如下:試將 $f(a+h)$ 依 Taylor 定理展開爲 h 之多項式,而觀其最初不等於 0 之一項,其 h 之冪爲偶或爲奇.若其爲偶,則有一莫大或莫小值(當其係數爲負時,爲莫大值,其係數爲正時,爲莫小值),否則有一水平切線,無莫大莫小值存在.其理可由展開式之餘項直接見之,無待縷述①.

例 題

1.間 $y=e^x$ 與 $y=1+x+\frac{1}{2}\sin^2 x$ 在 $x=0$ 有幾重接觸?

2.間 $y=\sin^4 x$ 與 $y=\tan^4 x$ 在 $x=0$ 有幾重接觸?

3.試規定 a,b,c,d 使 $y=e^{2x}$ 與 $y=a\cos x+b\sin x+c\cos 2x+d\sin 2x$ 在 $x=0$ 有三重接觸.

4.試繪 $x^3+y^3=xy$ 及 $x^2+y^2=x$ 之圖形,將其在交點之接觸重數.

5.將 $x^2-y^2=y$ 與 $x^3=y$ 在其交點之接觸爲幾重.

6.設 $y=f(x)$ 經過原點,並在此與橫軸相切.試證其在原點之曲率半徑爲 $\rho=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$.

7.*一圓綫 K 與一已知曲線相切於 P,相交於 Q,而 P,Q 爲相鄰二點.試示 $Q\to P$ 時,圓 K 之極限即爲此曲線在 P 之曲率圓.

8.*由已知曲線之相鄰二點,P,Q 各作法線,設 R 爲其交點.試示 $Q\to P$ 時,R 趨於此曲線在 P 點之曲率中心(曲率中心爲相鄰法線之交點).

①但在應用上,仍以 §5.1.1 所證示之充要條件較爲普遍便利,即設導數 $f'(x)$ 祇在有盡個點上爲 0,則在此等點上有一莫大或莫小值之充要條件爲 $f'(x)$ 必於經過此點時變其符號.

9.*在曲率半徑莫大或莫小之處,一曲線與其密切圓之接觸重數至少為三.試證之.

10.試決定函數$y=e^{-\frac{1}{x^2}}$之莫大或莫小值(參閱本首第六章附錄第一節).

第六章附錄

第一節 函數之不能展開者

欲求一函數在某點鄰近展開為一Taylor級數,其餘項之數量級為$n+1$者,其函數必在此有可導性而後可.其理甚明,無待深討.緣此之故,函數如$\log x$及$\sqrt[3]{x}$皆不能按x之冪依Taylor級數表而出之,因其導數在$x=0$未能存在故也.循是以論,苟一函數在某點鄰近可展開為一無盡級數,則其一切高重導數非存在不可.惟此條件對於展開之可能,殊非充分;換言之,一函數之一切導數在某規定變程雖能存在而又有連續性,然未必即因此之故而可展開為一Taylor級數,蓋其餘項在此變程中,不論其變程如何小,未必隨$n\to\infty$而趨於0也.茲特舉一淺例以明其說.

設有一函數如
$$y=f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (x\neq 0\text{時})$$
$$y=f(x)=0, \quad (x=0\text{時})$$

其性質已於第三章附錄中詳言之.此函數及其一切導數在任何變程中均有連續性,即在$x=0$時亦然.在$x=0$,其一切導數均為0,故不論n為任何正整數,必有$f^{(n)}(0)=0$.惟如是,如應用Taylor定理,可知其展開式中各項係數一一為0,於是其餘項即為此函數本身,故除在0點外,未能隨$n\to\infty$而趨於0(據定義,此函數在$x\neq 0$時不等於0),其不能展開,於此得證.

第二節 e為無理數之證明

據
$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta},$$

不難推斷e為一無理數.何以言之?倘為一有理數如$e=\frac{p}{q}$,其中p及q為兩整數者,吾人自可選擇n,使其大於q.如是則$n!e=n!\frac{p}{q}$自為一整數無疑.由另一方面言之,復有
$$n!e=2n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{1}{n+1}e^{\theta};$$

推因 $e^{\theta}<e<3$，可知 $0<\frac{e^{\theta}}{n+1}<1$. 若然，則整數 $n!e$ 將爲一整數 $2n!+\frac{n!}{2}+\cdots+1$ 加一眞分數之結果，其不可能，顯而可見.

第三節　二項式級數收斂之證明

前論 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $|x|<1$ 之展開時，對其餘項 R_n 尚未加以估計，故特補述於此. 爲推論之便，分 $x>0$ 及 $x<0$ 兩種情形考驗之.

吾人既知

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\frac{(1+x)^{\alpha}}{(1+x)^{n+1}};$$

在 $x>0$ 時，將其餘項由 Lagrange 式表達之，得

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\frac{(1+\theta x)^{\alpha}}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

由是知

$$\left|R_n(x)\right|\leqq\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|\frac{x^{n+1}(1+x)^{|\alpha|}}{1^{n+1}}.$$

設以 $[|\alpha|]$ 表不大於 $|\alpha|$ 之最大整數，令 $b=[|\alpha|]+1$，則有

$$\begin{aligned}\left|R_n(x)\right|&\leqq 2^b\frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{(n+1)!}x^{n+1}\\&\leqq\frac{2^b}{(b-1)!}\frac{1\cdot2\cdots(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}{(n+1)!}x^{n+1}\\&\leqq\frac{2^b}{(b-1)!}(n+b)^{b-1}x^{n+1}\end{aligned}$$

觀其中 b 既固定，可知在 $0<x<1$ 中，R_n 必隨 $n\to\infty$ 而趨於 0.

至於 $-1<x<0$ 之情形，可將 R_n 由 Cauchy 式表達之：

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\frac{(1+\theta x)^{\alpha-1}}{(1+\theta x)^n}.$$

由是得

$$\left|R_n(x)\right|\leqq\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta|x|)^n}|x|^{n+1}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\left|(1+\theta x)^{\alpha-1}\right|;$$

因 $|x|<1$ 之故，此式右方之最後一因數，必不能超過一常數 k，與 n 之變無關者. 復次，$\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1$ 之眞確，亦顯而易見. 故以 b 表 $b=[|\alpha|]+1$，必有：

$$|R_n(x)| \leqq k|x|^{n+1}\frac{1}{(b-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+b)$$
$$\leqq \frac{k}{(b-1)!}(n+b)^b|x|^{n+1},$$

其隨 $n\to\infty$ 而趨於 0, 由此可見. 總而論之, 設 x 之變界爲 $|x|<1$, 則 R_n 隨 $n\to\infty$ 而趨於 0, 故二項式級數之展開, 至是遂得一根據.

第四節　函數之零點與無限點；所謂不定式

自函數在某點鄰近展開爲 Taylor 級數之後，其性質乃得剖析入微，闡發盡致，精微無以復加. 玆特舉兩重要概念以備應用，至其詳當另求專書，如微分幾何學之理論，大半以是爲基礎，觀本章第四節，可略見也.

苟一函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 點爲 0, 其導數直至 n 重（包括 n 重導數在內）在 $x=a$ 鄰近有連續性，而在 $x=a$ 點直至 $n-1$ 重爲 0 者，即
$f(a)=0, f'(a)=0, f''(a)=0, \cdots, f^{(n-1)}(a)=0, f^{(n)}(a)\neq 0$ 則 $f(x)$ 在 $x=a$ 點稱之爲有 n 重零點[1], 或謂**其在 $x=a$ 點之零點確爲 n 重**, 意即高於 $n-1$ 重之導數在 $x=a$ 不復爲 0, 自 $n-1$ 以下無一非零也.
誠如是，據 Taylor 定理，知其函數在 $x=a$ 點鄰近必有如下形式：

$$f(a+h)=\frac{h^n}{n!}F(h),$$

其中 $F(h)$ 當 $h\to 0$ 時趨於 $f^{(n)}(a)$，據假定不等於 0 者.

復次，苟 $\phi(x)$ 除在 $x=a$ 點本身或未能確定，在其鄰近各點均爲確定，又

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

之分子 $f(x)$ 在 $x=a$ 點不等於 0, 分母 $g(x)$ 有一 ν 重零點，則 $\phi(x)$ 當 $x\to a$ 時以 ν 數量級無限制趨大，因之謂爲一 ν 重**無限點**[2]. 苟 $f(x)$ 在 $x=a$ 點有一 μ 重零點，而 $\mu>\nu$, 則 $\phi(x)$ 在此謂爲有一 $\mu-\nu$ 重零點；苟 $\mu<\nu$, 謂有一 $\nu-\mu$ 重無限點.

(1)zero (of a function); zero (d'une fonction), Nullstelle.　(2)infinity (of a function); infinité (d'une fonction), Unendlichkeitsstelle.

以上論零點及無限點之定義．由是獲知其函數趨 0 或無限制趨大之情形，與第三章所論數量級之義自相符合，此可由下式見之：

$$\phi(a+h)=\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{\nu!}{\mu!}\frac{h^{\mu}f^{(\mu)}(a+\theta h)}{h^{\nu}g^{(\nu)}(a+\theta_1 h)};$$

是乃應用 Lagrange 餘項式而得之者，其中 θ 及 θ_1 爲介於 0 及 1 間之兩數，而 $f^{(\mu)}(a+\theta h)$ 及 $g^{(\nu)}(a+\theta_1 h)$ 在 $h\to 0$ 時不趨於 0，因其極限 $f^{(\mu)}(a)$ 及 $g^{(\nu)}(a)$ 不等於 0 故也．據此關係，可以推斷

$$\lim_{h\to 0}\phi(a+h)=\lim_{h\to 0}\frac{\nu!}{\mu!}h^{\mu-\nu}\frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)},$$

故 $\mu>\nu$ 時 $\phi(a+h)$ 隨 $h\to 0$ 而趨 0 之數量級爲 $\mu-\nu$，在 $\nu>\mu$ 時，隨 $h\to 0$ 而無限制趨大之數量級爲 $\nu-\mu$ 也．若 $\mu=\nu$，則由上式可以推知

$$\lim_{h\to 0}\phi(a+h)=\frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)}.$$

應用此關係，所謂**不定式**[(1)]問題，皆得迎刃而解．所謂不定式，在一般微積分學之教本中每喜作冗長之討論，其定義模糊不清，殊易引起誤會，按其實際，不過欲在分子分母均趨 0 之假定下，即 $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}g(a+h)=0$，規定其商之極限 $\lim\limits_{h\to 0}\phi(a+h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$ 而已．故上列公式爲解決此問題之一適當工具，無待瑣述．

上述結果，不必定以 Taylor 定理爲根據，蓋亦可由導數之普遍中値定理推論而知之[①]（參閱第三章附錄）．據此，在 $g'(x)\neq 0$ 假定下必有

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)},$$

其中 θ 爲介於 0 及 1 間之一數．若 $f(a)=0=g(a)$，則

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)};$$

令 $k=\theta h$，則

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{k\to 0}\frac{f'(a+k)}{g'(a+k)},$$

(1) indeterminate form; forme indéterminée; unbestimmter Ausdrück.

①如此證法，可不必假定其導數在 $x=a$ 點之存在，又如 $\phi(x)$ 僅在 $x\geqq a$ 時確定，則 $x\to a$ 或 $h\to 0$ 僅由一邊實現之，是其所長耳．

在此自必假定右方極限之存在．苟 $f'(a)$ 及 $g'(a)$ 仍各等於 0，復可應用前法推演之，直至 $f^{(n)}(a)$ 及 $g^{(n)}(a)$ 不復同時爲 0 乃止．於是遂得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{l\to 0}\frac{f^{(n)}(a+l)}{g^{(n)}(a+l)},$$

其極限之是否存在，或竟無限制趨大，皆可由是以識之。

茲略舉數例於後，以見上式之用，如

$$\frac{\sin x}{x},\quad \frac{1-\cos x}{x},\quad \frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)},\quad \frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

當 $x\to 0$ 時所趨之極限，即可由是以定之，其結果如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\cos 0}{1}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}}=2;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(2\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)\sqrt{1-x^2}=0.$$

復次，$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 時將趨 $\infty-\infty$；欲知其極限爲何，可先合

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x},$$

然後用前式以求之：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

例　題

求下例各極限(例題 1—11)：

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{24-12x^2+x^4-24\cos x}{(\sin x)^6}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 5x}{\tan x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

12.試證函數 $y=(x^2)^x$, $y(0)=1$ 在 $x=0$ 有連續性.

第五節 插值公式及其與 Taylor 公式之關係

上述 Taylor 公式可視為一種插值[1] 公式之極限情形，故本節擬將所謂函數插值問題者提出而解決之：明乎是，則吾人對於 Taylor 公式將更有透澈之認識，不僅其本身在應用上之重要而已也．何謂函數插值?設有一函數 $f(x)$，欲求一其他函數 $\phi(x)$，其值在 $x=x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 時，適與 $f(x)$ 之值相等，即分別為 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$ 者，謂之插值．果如是，則 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之值至少在此 n 個點必彼此相符．此種 $\phi(x)$ 之求索，殊非難事，昔 Lagrange 已獲得一圓滿之解決，其結果為

$$\phi(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)}f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)}f(x_2)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

細考之，為一 $n-1$ 次之多項式，當 $x=x_1$ 時，右方各項除第一項外均為 0，而第一項適為 $f(x_1)$，故 $\phi(x_1)=f(x_1)$；據此類推，可知 $\phi(x_2)=f(x_2)$, $\phi(x_3)=f(x_3)$, $\cdots$, $\phi(x_n)=f(x_n)$．是即所謂 **Lagrange 插值公式**，其中 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 為固定之點．苟假定每兩點間之距離相等，且等於 Δx，如

$$x_1=a,\ x_2=a+\Delta x,\ x_2=a+2\Delta x,\ \cdots,\ x_n=a+(n-1)\Delta x,$$

則又有所謂 **Newton 插值公式**，請略言之．

設以 $f(x)$ 表一函數，則 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 稱之為 $f(x)$ 之差分，以 $\Delta f(x)$ 表之：
$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$
假定 x 及 Δx 在其變程中任意變化，又有所謂二重差分：

(1)interpolation; interpolation; Interpolation.

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x);$$

繼此更有三重，四重……差分

$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x),$$

$$\Delta^4 f(x)=\Delta^3 f(x+\Delta x)-\Delta^3 f(x),$$

…………………………

…………………………

此義既明，吾人得將 $f(x)$ 在 $x+\Delta x, x+2\Delta x, x+3\Delta x, \cdots$ 諸點之值分別由其在 x 點之值及其差分表而出之如下：

$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x),$

$f(x+2\Delta x)=f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x)=f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x),$

$f(x+3\Delta x)=f(x+2\Delta x)+\Delta f(x+2\Delta x)$

$\qquad\qquad =f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x),$

……………………………………………

然則欲求一函數 $P(x)$，其值在 $x=a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \cdots, a+(n-1)\Delta x$ 與 $f(x)$ 之值相等者，必為

$$P(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}+\cdots$$

$$+\cdots+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\cdots[x-a-(n-2)\Delta x]}{(n-1)!}\frac{\Delta^{(n-1)}f(a)}{(\Delta x)^{n-1}},$$

蓋此為一 $n-1$ 次之多項式，當 $x=a$ 時，$P(a)=f(a)$，又當 $x=a+\Delta x$ 時，右方自第三項以後各項均為 0，於是得

$$P(a)=f(a)+\Delta f(a)=f(a+\Delta x).$$

循是以推，可知 $P(x)$ 適一一滿足所要求之條件．此公式謂之 Newton 插值公式．

惟觀 $f(x)$ 與 $P(x)$，除在 n 個固定點如 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之值相等外其差果為何如，為一頗饒趣味之問題．試以 $R(x)$ 表其差：

$$R(x)=f(x)-P(x),$$

所可斷言者，此 R 在 $x=a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 時必為 0．因之其形式不

外
$$R(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{n!}\phi(x),$$
其中所以列入 $n!$ 者，爲推理之便，無關宏旨．惟 $\phi(x)$ 之果爲何物，尚有待於決定．以意測之，此 $\phi(x)$ 必與 $f(x)$ 之 n 重導數有關，蓋 $f(x)$ 如爲一 $n-1$ 次多項式，其 n 重導數處處爲 0 者，其 R 亦爲 0，可以見也．欲測定 $R(x)$ 之性質，可先就下列函數：
$$F(z)=f(z)-P(z)-\frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}{n!}\phi(x),$$
視其中 z 爲自變數，x 爲參變數，而研討之．考 $F(z)$ 在 $z=a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 時必爲 0，蓋 $f(a_1)=P(a_1)$，$f(a_2)=P(a_2)$，$\cdots f(a_n)=P(a_n)$ 故也．又 $F(z)$ 在 $z=x$ 時亦爲 0．即 $F(x)=0$，蓋由 $R(x)$ 之定義而可以見之．惟如是，苟疊次應用導數之中値定理於此，可以推斷必有一 ξ，存於 $a_1,a_2,\cdots,a_n,x$ 諸點之間者如
$$F^{(n)}(\xi)=0.$$
然一考 $F(z)$ 之定義（觀上列公式），因 $P(z)$ 爲一 $n-1$ 次多項式，其 n 重導數爲 0，而右方最後一項爲一 n 次多項式，其 n 重導數爲 $-\phi(x)$ 者．因此之故，遂有
$$F^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-\phi(x)=0,$$
或
$$\phi(x)=f^{(n)}(\xi).$$
然則應用是理以論 Newton 插値公式，必有
$$f(x)=P(x)+\frac{(x-a)\cdots[x-a-(n-1)\Delta x]}{n!}f^{(n)}(\xi),$$
其中 $P(x)$ 爲
$$P(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}+\cdots$$
$$+\frac{(x-a)\cdots[x-a-(n-2)\Delta x]}{(n-1)!}\frac{\Delta^{(n-1)}f(a)}{(\Delta x)^{n-1}}.$$
由是以論，如假定 x,a 及 n 之固定不變，令 $\Delta x\to 0$，復假定 $f(x)$ 之導數直至 n 重均有連續性，則
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=f'(a),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}=f''(a),\cdots,$$

在此種假定下令 $\Delta x\to 0$，則 ξ 之地位自將發生變化．惟觀上式之右方各項無不有確定極限，左方之 $f(x)$ 又因 x 固定而始終不變，於是據 $f^{(n)}(x)$之連續性，可知必有一數 θ，介於 a 及 x 之間，在 $\Delta x\to 0$ 時足令 $f^{(n)}(\xi)\to f^{(n)}(\theta)$．因此遂得

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\theta),$$

是即 Taylor 公式；而其與 Newton 插值公式之關係，至是可以恍然矣．

第七章　近似算法略論

近似算法之重要，不僅在工程學之應用中見之；欲闡發現象之關係，考驗眞理之存在，皆在在非此不爲功．本章僅就其與微積分學有關者略述之，至其詳細理論，自當求之專書①．近似算法，顧名思義，爲近似解答數學問題之工具．惟如是，其近似程度果爲何若，不可不詳加論列，故誤差之估計，實爲其成功要素也．

第一節　積分之近似算法

函數之形式雖甚簡單者，其積分未必能由初等函數表而達之，已如第四章中所述矣．然函數之連續者，其定積分之存在，已有一普遍之證明．惟其存在，乃得近似計算其值．下述各法，由觀覺言之，極爲簡單明瞭，惟其間不能避免之誤差，當設法估計之耳．

在此所欲研討之問題，爲如何計算 $I=\int_a^b f(x)dx$ 之值，其中 a 假定小於 b．試將其積分變程，卽由 a 達 b 之一線段，等分爲 n 段，令每分段之長爲 $h=\dfrac{b-a}{n}$，復以 $x_0=a,\ x_1=a+h,\ \cdots,x_n=b$ 表其分點，以 $f_0,f_1,f_2,\cdots,f_n$ 表其函數 $f(x)$ 在各分點之值，如是則 $f(x)$ 在每分段中點之值，得以 $f_{\frac{1}{2}},f_{\frac{3}{2}}\cdots,f_{\frac{2n-1}{2}}$ 表之．於是就此問題之幾何意義言之，吾人所欲求之面積，已由是分裂爲 n 個帶形面積，故問題之關鍵，在乎如何近似計算每一帶形面積，卽如何爲

$$I_\nu=\int_{x_\nu}^{x_\nu+h}f(x)dx$$

獲得一近似値而已．

7.1.1.　矩形替代法(1)

欲爲

$$I_\nu=\int_{x_\nu}^{x_\nu+h}f(x)dx$$

①如 Whittaker–Robinson: The Calculus of Observations, 1926; Runge-König. Vorlesungen über numerisches Rechnen; 1924.

(1)rectangle rule; règel de rectangle; Rechtecksregel.

求得一近似值，其最粗淺之法莫如將每一帶形面積 I_ν 以一長方形面積 $f_\nu h$ 替代之，於是得 I 之近似值如①：

$$I\approx h(f_0+f_1+\cdots+f_{n-1}).$$

7.1.2. 梯形替代法

設令每一帶形面積 I_ν 改由一梯形如圖7.1所示，其面積為 $\frac{1}{2}(f_\nu+f_{\nu+1})h$ 者替代之，則得 I 之近似值如下：

$$I\approx h(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1})+\frac{h}{2}(f_0+f_n),$$

蓋將所有梯形面積相加，函數值 $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ 除最前最後兩值外，均出現兩次故也。是即所謂**梯形替代公式**(1)。惟組織梯形時，如舍直線 AB(觀圖7.1)而改用其在每分段中點上之切線(每分段中點之坐

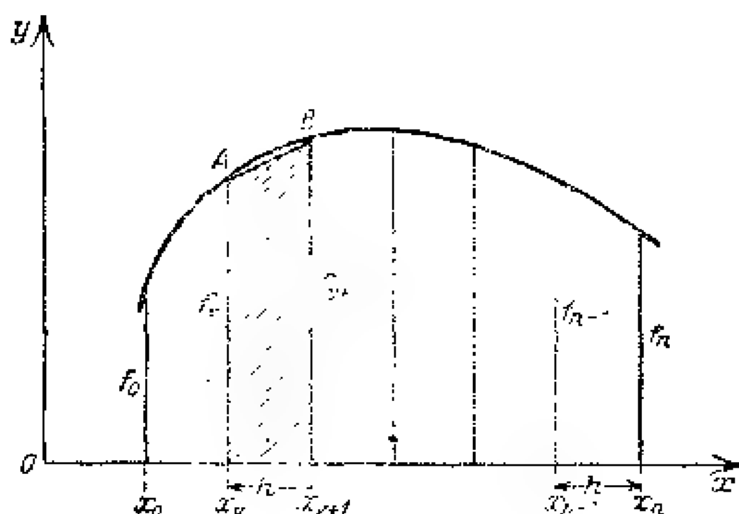


圖7.1

標自為 $x=x_\nu+\frac{h}{2}$)，則其梯形面積將為 $hf_{\nu+\frac{1}{2}}$，而 I 之近似值為

$$I\approx h\left(f_{\frac{1}{2}}+f_{\frac{3}{2}}+\cdots+f_{\frac{2n-1}{2}}\right),$$

如是或能較前更近似於事實。是為**切線替代公式**(2)。

7.1.3. Simpson 法

試將每兩帶形面積之相毗鄰者，即介於 $x=x_\nu$ 及 $x=x_\nu+2h$ 間之

---

①符號≈即"近似相等"之意。

(1)trapezoid formula; formule trapéziforme; Trapezformel.

(2)tangent formula; formule tangente; Tangentenformel.

面積 $I_\nu+I_{\nu+1}$ 合併而觀，復將其上端之直線以一拋物線替代之，詳言之，繪一拋物線，經過 $x_\nu, x_{\nu+1}=x_\nu+h$，及 $x_{\nu+2}=x_\nu+2h$ 三點如圖7.2所示者，則其方程式為

$$y=f_\nu+(x-x_\nu)\cdot\frac{f_{\nu+1}-f_\nu}{h}$$
$$+\frac{(x-x_\nu)(x-x_\nu-h)}{2}\cdot\frac{f_{\nu+2}-2f_{\nu+1}+f_\nu}{h^2}$$

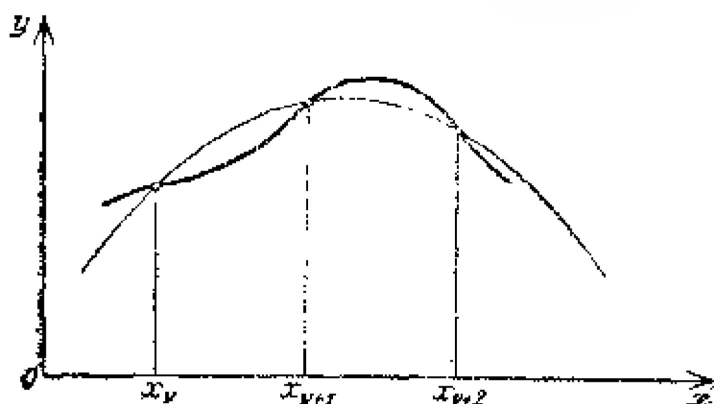


圖7.2

蓋令其中 $x=x_\nu$，$x_\nu+h$，$x_\nu+2h$，y 之值適為 $f_\nu, f_{\nu+1}, f_{\nu+2}$ 也．更求此二次多項式由 x_ν 至 $x_\nu+2h$ 之定積分，其結果為

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu+2h} y\,dx=2hf_\nu+2h(f_{\nu+1}-f_\nu)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}h-2h\right)(f_{\nu+2}-2f_{\nu+1}+f_\nu)$$
$$=\frac{h}{3}(f_\nu+4f_{\nu+1}+f_{\nu+2}),$$

是即 $I_\nu+I_{\nu+1}$ 之近似值．苟假定 $n=2m$，換言之，n 為一偶數，則將此種帶形面積相加，可從而知 I 之近似值為：

$$I\approx\frac{4h}{3}(f_1+f_3+\cdots+f_{2m-1})+\frac{2h}{3}(f_2+f_4+\cdots+f_{2m-2})$$
$$+\frac{h}{3}(f_0+f_{2m}).$$

是即所謂 **Simpson** 法，其結果遠勝前述兩法，自不待言．

7.1.4.　舉例

試應用上述各法以計算 $\log_e 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$ 而比較其結果．設將 x 之變程等分為十段，每段長為 $\frac{1}{10}$ 者，則據梯形替代公式得如下各值：

$x_1 = 1.1$　　$f_1 = 0.90909$

$x_2 = 1.2$　　$f_2 = 0.83333$

$x_3 = 1.3$　　$f_3 = 0.76923$

$x_4 = 1.4$　　$f_4 = 0.71429$

$x_5 = 1.5$　　$f_5 = 0.66667$

$x_6 = 1.6$　　$f_6 = 0.62500$

$x_7 = 1.7$　　$f_7 = 0.58824$

$x_8 = 1.8$　　$f_8 = 0.55556$

$x_9 = 1.9$　　$f_9 = 0.52632$

$$6.18773$$

$x_0 = 1.0$　　$\frac{1}{2} f_0 = 0.5$

$x_{10} = 2.0$　　$\frac{1}{2} f_{10} = 0.25$

$$6.93773 \times \frac{1}{10}$$

$$\log_e 2 \approx 0.69377$$

其結果似覺過大，如改用切線替代公式，則有

$x_0 + \frac{1}{2}h = 1.05$　　$f_{\frac{1}{2}} = 0.95238$

$x_1 + \frac{1}{2}h = 1.15$　　$f_{\frac{3}{2}} = 0.86957$

$x_2 + \frac{1}{2}h = 1.25$　　$f_{\frac{5}{2}} = 0.80000$

$x_3 + \frac{1}{2}h = 1.35$　　$f_{\frac{7}{2}} = 0.74074$

$x_4 + \frac{1}{2}h = 1.45$　　$f_{\frac{9}{2}} = 0.68966$

$x_5 + \frac{1}{2}h = 1.55$　　$f_{\frac{11}{2}} = 0.64516$

$x_6 + \frac{1}{2}h = 1.65$　　$f_{\frac{13}{2}} = 0.60606$

$x_7 + \frac{1}{2}h = 1.75$　　$f_{\frac{15}{2}} = 0.57143$

$x_8 + \frac{1}{2}h = 1.85$　　$f_{\frac{17}{2}} = 0.54054$

$x_9 + \frac{1}{2}h = 1.95$　　$f_{\frac{19}{2}} = 0.51282$

$$6.92836 \times \frac{1}{10}$$

$$\log_e 2 \approx 0.69284$$

由於曲線之下凹性,此值又覺太小.最後應用 Simpson 法,得

$x_1=1.1$	$f_1=0.90909$	$x_2=1.2$	$f_2=0.83333$
$x_3=1.3$	$f_3=0.76923$	$x_4=1.4$	$f_4=0.71429$
$x_5=1.5$	$f_5=0.66667$	$x_6=1.6$	$f_6=0.62500$
$x_7=1.7$	$f_7=0.58824$	$x_8=1.8$	$f_8=0.55556$
$x_9=1.9$	$f_9=0.52632$		2.72818×2
	3.45955×4		5.45636
	13.83820		13.83820
		$x_0=1.0$	$f_0=1.0$
		$x_{10}=2.0$	$f_{10}=0.5$
			$20.79456\times\frac{1}{30}$
			$\log_e 2\approx0.69315$

與其實際 $\log_e 2=0.693147\cdots$ 相差甚微矣.

7.1.5. 誤差之估計

至於應用上述各法所不能避免之誤差,如能詳知 $f(x)$ 各重導數之值,即不難估計之.試以 $M_1, M_2, \cdots$ 表其初重,二重 $\cdots$ 導數之絕對值所不能超過之上涯,換言之,假定 $|f^{(\nu)}(x)|<M_\nu$, 則有下列各式之成立,藉以估計其誤差為何如.

其一,就長方形替代式而論,有

$$|I_\nu-hf_\nu|<\frac{1}{2}M_1h^2 \text{ 或 } |I-h\sum_{\nu=0}^{n-1}f_\nu|<\frac{1}{2}M_1nh^2=\frac{1}{2}M_1(b-a)h.$$

其二,就切線替代公式而論,則

$$|I_\nu-hf_{\nu+\frac{1}{2}}|<\frac{M_2}{24}h^3 \text{ 或 } |I-h\sum_{\nu=0}^{n-1}f_{\nu+\frac{1}{2}}|<\frac{M_2}{24}(b-a)h^2.$$

其三,更就梯形替代公式言之,則

$$\left|I_\nu-\frac{h}{2}(f_\nu+f_{\nu+1})\right|<\frac{M_2}{12}h^3.$$

其四,據 Simpson 法,

$$|I_\nu+I_{\nu+1}-\frac{h}{3}(f_\nu+4f_{\nu+1}+f_{\nu+2})|<\frac{M_4}{90}h^5.$$

由是可見 Simpson 誤差中之 h,其趨 0 之數量級較高於其他方法,故

在 M_4 不甚大之條件下,極合實用.

上列各式之證明,原則上殊爲簡易.茲僅就切線替代式證之如下,其他各式,讀者可自證之.試將 $f(x)$ 之在第 $\nu+1$ 個帶形內之值依 Taylor 公式展開:

$$f(x)=f_{\nu+\frac{1}{2}}+\left(x-x_\nu-\frac{h}{2}\right)f'\left(x_\nu+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-x_\nu-\frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

其中(ξ)爲此帶形內之一中值.然後求其由 x_ν 至 $x_\nu+h$ 之定積分,則右方居中一項之定積分爲 0;復因

$$\frac{1}{2}\int_{x_\nu}^{x_\nu+h}\left(x-x_\nu-\frac{h}{2}\right)^2 dx=\frac{h^3}{24}$$

之故,卽得
$$\left|\int_{x_\nu}^{x_\nu+h} f(x)dx-hf_{\nu+\frac{1}{2}}\right|<M_2\frac{h^3}{24},$$

是卽欲證之理.

例　題

1.應用(a)梯形替代式,令 $h=0.1$;　(b)Simpson 法,令 $h=0.1$,

試由
$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$
近似計算 π 之值.

2.近似計算 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$,使其誤差不大於 $\frac{1}{100}$.

3.近似計算 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$,使其誤差小於 0.1.

第二節　中值定理及 Taylor 定理之應用

7.2.1.　誤差問題

應用導數之中值定理或 Taylor 定理爲近似計算之工具,前已略及之矣.設有一可導函數 $y=f(x)$,當其自變數 x 之變量爲 $\Delta x=h$ 時,所引起之變量 Δy 應用何法以測知之,此爲微分學中基本思想之一,而各種科學中之實際問題,幾在在與此發生關聯.自 Taylor 定理成立之後,

吾人所可斷言者，苟一函數有相當多次可導性，則其在一點鄰近得由一一次函數替代之，其間誤差之數量級小於1者，或由一二次函數替代之，其間誤差之數量級小於2者．依次類推，可以見如何近似計算 Δy 之法．茲就其由一次函數相追近論之，如以 $y=f(x)$ 表一可導函數，又 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)=f(x+h)$，則據 Taylor 定理必有

$$\Delta y=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi),$$

其中 ξ 爲介於 x 及 $x+h$ 間之一中值：$\xi=x+\theta h\,(0<\theta<1)$．如 $h=\Delta x$ 之值相當微小時，即得 Δy 之近似値如：

$$\Delta y\approx hf'(x);$$

換言之，在 $h=\Delta x$ 相當微小之假定下，其差分與導數幾乎相等，而 Δy 因之必甚接近於 $hf'(x)$ 也．

上述之理，自覺淺顯易明，至其在實際上之應用，則隨處可見．如在物理科學中，兩數量 x 及 y 之間，常有函數關係 $y=f(x)$ 之存在．欲考驗其關係與事實是否相符，最後必付諸實驗，而實驗之準確與精密，自有其不可超越之限度．然則量 x 時之誤差苟不大於 h，則其所影響於 y 之變者必幾近於 $hf'(x)$，可以識矣．由是得一近似計算誤差之法，復舉數例於後以明其用．

［例一］ 正切電流計　用正切電流計以量電流之强度，所根據者爲下列關係 $y=c\tan\alpha$，其中 α 表偏轉角，$y=I$ 爲電流强度，c 爲一恆量，與儀器構造有關者．於是

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{c}{\cos^2\alpha},$$

故 $\Delta y\approx\frac{c}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$．由是言之，作此實驗時之百分誤差爲

$$\frac{100\,\Delta y}{y}\approx\frac{100c\,\Delta\alpha}{c\cos^2\alpha\tan\alpha}=\frac{200}{\sin 2\alpha}\Delta\alpha,$$

故在 $\alpha=\frac{\pi}{4}=45°$ 時達其最高準確度，換言之，所量得之磁針偏轉角，容有不精，然因是而引起電流强度之誤差，以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 時爲最小．復次，在電流計觀其磁針偏轉之誤差如小於半度，即以弧度表之 $|\Delta\alpha|<\frac{1}{2}\times 0.01745\cdots$，則其電流强度之百分誤差將爲 $\frac{1.745}{\sin 2\alpha}$；苟所見偏轉

角爲30°，則 $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\times 1.73205\cdots$ [illegible] $2\times\frac{1.715}{1.732}$，其百分誤差約爲百分之二矣.

［例二］　假定三角形（見圖 [illegible]）之兩邊 b 及 c 可精確測得，但量角 α 時，有不可避免之誤

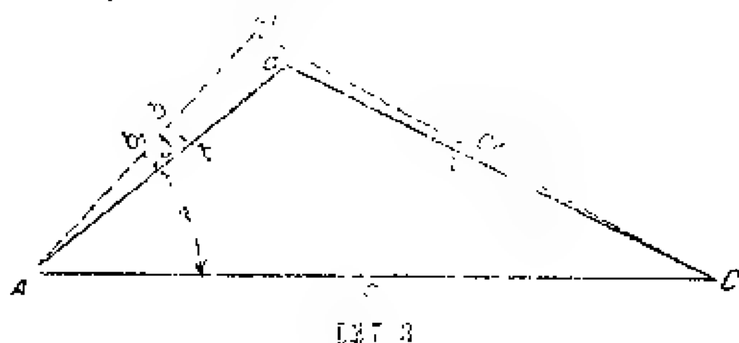


圖 [illegible]

差如 $|\Delta\alpha|<\delta$. 如是則其所影響於 $y=a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ 者將爲何如？

因

$$\Delta a \approx \frac{1}{a} bc \sin\alpha\ \Delta\alpha$$

之故，可知其百分誤差爲 $\frac{100\Delta a}{a} \approx \frac{100bc}{a^2}\sin\alpha\,\Delta\alpha$. 若 $b=100$ 米，$c=500$ 米，$\alpha=60°$，則 $y=a=458.2576$ 米，而

$$\Delta a \approx \frac{200000}{458.2576}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}\ \Delta\alpha.$$

若假定 $\Delta\alpha=10''=4848\times10^{-6}$ 弧度，則至多

$$\Delta a \approx 1.83 \text{ 厘米},$$

故其準確度約爲0.004％.

［例三］　設有一鐵桿，其長在溫度0時爲 l_0，在溫度 t 時當爲 $l=l_0(1+\alpha t)$，其中 α 爲一恆量，與鐵桿性質有關者. 如是則一擺鐘在 t_1 報正確時間者，如溫度升至 t_2 度，每日將遲誤若干秒？據前所論，擺之振動週期 T 爲

$$T(l)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

由是知

$$\frac{dT}{dl}=\frac{\pi}{\sqrt{lg}};$$

故其長之變量如爲 Δl，其影響及於振動週期者當爲

$$\Delta T \approx \frac{\pi\,\Delta l}{\sqrt{l_1 g}},$$

其中 $l_1=l_0(1+\alpha t_1)$，又 $\Delta l=\alpha l_0(t_2-t_1)$. 是即每一振動所遲誤之時間. 由是知其每秒鐘遲誤 $\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{\Delta l}{2l_1}$，每日遲誤 $\frac{43200\Delta l}{l_1}$ 秒.

應用上述之法，在計算上異常簡潔便利，讀者諒同有此感，無待贅述．若取上式之對數如

$$\log T=\log 2\pi-\frac{1}{2}\log g+\frac{1}{2}\log l.$$

則
$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dl}=\frac{1}{2l},$$

復將$\frac{dT}{dl}$以$\frac{\Delta T}{\Delta l}$替代之，則
$$\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{\Delta l}{2l},$$

結果與前相符，而計算更覺簡捷；蓋一函數如含有因數甚多或其指數多為分數時，於求導數之前，先取其對數，自有其便利也．

7.2.2. π之計算

觀第六章中將 $\arctan x$ 展開，從而獲得之級數：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\cdots,$$

似可據之以算 π，惟因其收斂異常遲緩，故殊不適於用．於是創下述之法以補救之．吾人有鑒於

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

知其逆函數 $\alpha=\arctan u$，$\beta=\arctan v$ 必滿足

$$\arctan u+\arctan v=\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right).$$

試選擇適當之 u,v，滿足$\frac{u+v}{1-uv}=1$者，代入於此，則右方為$\frac{\pi}{4}$，而左方為收斂較速之級數，自較易於計算．例如從 Euler，令 $u=\frac{1}{2}$，$v=\frac{1}{3}$，

則有
$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

復因$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\div\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}$，

得
$$\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7},$$

故
$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}.$$

昔 Vega 曾應用此關係以算 π，直至 140 位之多．復次，如應用

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)\div\left(1-\frac{1}{40}\right)=\frac{1}{3},$$

則
$$\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8},$$

而 $$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{8},$$

據此，令 $x=\frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8}$，代入於 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$，可見各項趨小甚速，故僅取其前數項，即可獲得準確之結果．據同理，可知應用

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{120}{119}-\arctan\frac{1}{239}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

不特計算稍便，且收效甚宏也．

7.2.3. 對數之計算

欲近似計算對數之值，可先將

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots,\qquad (|x|<1),$$

假定其中 $0<x<1$，由下列交替

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{p^2}{p^2-1},\quad x=\frac{1}{2p^2-1}$$

變易其形式，如

$$\log p=\frac{1}{2}\log(p-1)+\frac{1}{2}\log(p+1)+\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\cdots,$$

其中 $2p^2-1$ 自大於 1；換言之 $p^2>1$．苟 p 爲一整數，而 $p+1$ 可析爲因子之積，則任何 p 之對數，由上列級數觀之，爲較小整數之對數，加一級數所成者，而此級數中諸項之趨小甚速，故甚便於計算．由是以論，任何素數之對數皆可據此以知之，惟如是，任何整數之對數亦可從而推斷，但假定能計算 log2 足矣．

至於應用此法所獲得之準確程度爲何如，可與幾何級數相比較而估計之．試觀其餘項 R_n，即隨於 $\frac{1}{n(2p^2-1)^n}$ 之後各項之和，可知

$$R_n<\frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^{n+2}}\left[1+\frac{1}{(2p^2-1)^2}+\frac{1}{(2p^2-1)^4}+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^n}\cdot\frac{1}{(2p^2-1)^2-1},$$

其誤差如何，由是可以識矣．

試應用此法以算 $\log_e 7$，並取上列級數中之最前四項而計算之，如是則

$$p=7, \quad 2p^2-1=97,$$

$$\log 7=2\log 2+\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{97}+\frac{1}{3\times 97^3}+\cdots,$$

$$\frac{1}{97}\approx 0.01030928, \qquad \frac{1}{3\times 97^3}\approx 0.00000037,$$

$$2\log 2\approx 1.38629436, \qquad \frac{1}{2}\log 3\approx 0.54930614,$$

故得

$$\log_e 7\approx 1.94591015.$$

至其誤差可估計如下：

$$R_n<\frac{1}{5\times 97^5}\times\frac{1}{1-\frac{1}{97^2}}<\frac{1}{36\times 10^9}$$

例 題

1. 欲測一山之高，先由平地觀察山頂上高 100 米突之塔，乃知塔底之仰角爲 42°，而全塔所張之角爲 6°．設 42° 角容有 1° 之誤差，問由是決定之山高，其誤差限度如何？

2. 試藉一級數展開式以計算 $\log_e 2$ 至三位小數．

3. 應用書中所與 $\log_e 2$ 及 $\log_e 3$ 之值，以計算 $\log_e 5$ 至五位小數．

4. 應用 §7.2.2 中之任一公式以計算 π 至五位小數．

第三節 求方程式之近似根

欲近似求某一實數，滿足一方程式 $f(x)=0$ 者（$f(x)$ 不必爲一多項式；若爲一多項式，則爲一代數方程式．），其法無他，假定已知一相當接近於其根之一近似值 x_0，然後由是出發，設法改進，求一較此更接近之近似值，且屢次爲之，務求其近似程度愈益增進而後已．至於最初 x_0 之如何獲得，爲另一問題，吾人可用繪圖（觀其圖形約在何處與橫軸相交）或其他方法約略知之．在此所欲討論者，爲如何改進 x_0 之道，使其力趨近似耳．

7.3.1. Newton 法

改進 x_0 之法，最初爲 Newton 所發見者，乃根據於微分學中之一基本思想，其意不過欲將一曲線在一點鄰近由其切線近似替代之而已．設有一方程式 $f(x)=0$，假定已知其根之一近似值爲 x_0，欲據此以求

其圖形與橫軸之交點，當先作其切線，經過$x=x_0$，$y=f(x_0)$點者，觀其在何處與橫軸相交，苟其交於x_1，則此x_1或較x_0更近於欲求之根（由幾何觀點言之，即$f(x)$與橫軸之交點），如是則近似求法，即得其效，觀圖 7.4 可知

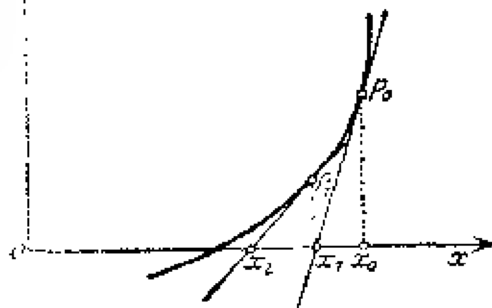


圖7.4

$$\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}=f'(x_0),$$

由是即得
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

若x_1果較x_0爲近似，則更據x_1以求x_2，如是逐步進行，欲求之近似根即由是得之，觀圖 7.4，可以概見．

惟此方法之成功，實與曲線之性質有關．觀圖 7.4，其近似根之逐步改進，自爲顯而易見之事，推原其故，實由於其曲線在此有下凹性；苟其如圖 7.5 所示者，而x_0之選擇又不甚適當，則應用此法之結果，必致

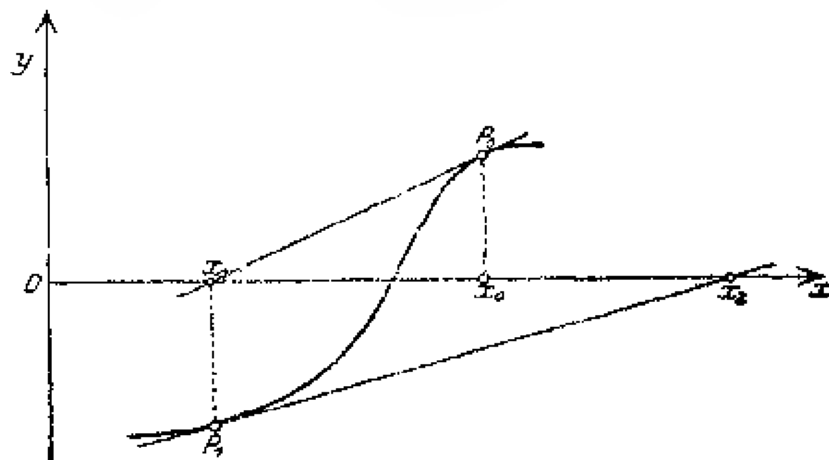


圖7.5

失望，是尤不可不注意者

7.3.2. 伴設法

在 Newton 法發明之前，已有一求近似根之法，與 Newton 法發生密切關聯者，曰伴設法(1)．設吾人已知$f(x)=0$在x_0及x_1之間有一實根，則連結$x=x_0$，$y=f(x_0)$及$x=x_1$，$y=f(x_1)$兩點，必有一割線．

(1) rule of false position.

以此割線代替 $f(x)$，求其與橫軸之交點，可望幾得 $f(x)=0$ 之一近似根，蓋此交點常甚接近於 $f(x)$ 與橫軸之相交處也．試以 ξ 表此交點之橫坐標，則割線之方程式爲

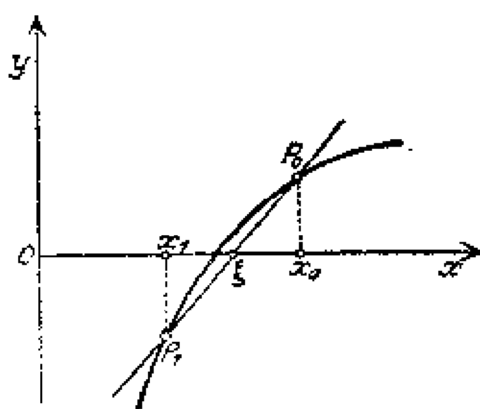


圖 7.6

$$\frac{\xi-x_0}{f(x_0)}=\frac{\xi-x_1}{f(x_1)},$$

觀圖 7.6 自明．由是可知 ξ 必爲

$$\xi=\frac{x_0f(x_1)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$=\frac{x_0f(x_1)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)},$$

或

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}.$$

由此公式，可以據 x_0 及 x_1 以求 ξ，是爲倖設法．考其用意，不過將一曲線在一點鄰近以一割線替代之而已．此法應用於 y_0 及 y_1 一正一負時（即 $y_0>0, y_1<0$ 或 $y_0<0, y_1>0$）必有極大成效．旣得 ξ 之後，如 $f(\xi)$ 與 y_0 或與 y_1 又爲一正一負者，則再用此法結果必更見滿意．如是遞推，可將近似根逐步改進．所當注意者，若令其中 x_1 趨於 x_0，則上式將趨於 Newton 公式，故上段所述之 Newton 法，視爲倖設法之極限情形可也．

7.3.3 疊代法

此外復有所謂疊代法[1]者，亦可用以求索一方程式之近似根．試令 $\phi(x)=f(x)+x$，則要求 $f(x)=0$ 之成立，無異欲求一實數 ξ，滿足 $\xi=\phi(\xi)$ 者．設假定其初步近似値爲 x_0，代入於 $\phi(x)$，得 $x_1=\phi(x_0)$，謂之第二步近似値，復將其代入於 $\phi(x)$，得 $x_2=\phi(x_1)$，是謂第三步近似値．依次類推，得 $x_3, x_4, \cdots$．惟 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 果在何種條件下能收斂於 ξ，實爲一重要問題耳．

據導數之中値定理，可知

(1) method of iteration; méthode d'itération, Iterationsmethode.

$$\xi - x_1 = \phi(\xi) - \phi(x_0) = (\xi - x_0)\phi'(\bar{\xi}),$$

其中$\bar{\xi}$爲介於ξ及x_0間之一值．由是知$\phi'(x)$之絕對值在

$$|\xi - x| < |\xi - x_0|$$

時若小於$k<1$，則

$$|\xi - x_1| < k|\xi - x_0|.$$

依此類推，復有

$$|\xi - x_2| < k^2|\xi - x_0|, \cdots |\xi - x_n| < k^n|\xi - x_0|,$$

故其誤差逐步趨小而趨於0．若$\phi'(x)$之絕對值在ξ之鄰近愈小，則其收斂於0愈速．

然則$\phi'(x)$在ξ之鄰近若大於1，則$x_0, x_1, x_2, \cdots$自不能趨近於ξ．如是可由初步近似值x_0出發，先算得$f'(x_0)=A$，然後令

$$\phi(x) = -\frac{1}{A}f(x) + x;$$

於是方程式$f(x)=0$可寫作$x=\phi(x)$．由是知$\phi'(x) = -\frac{1}{A}f'(x)+1$，故$\phi'(x)$在$x=x_0$時爲0，而其絕對值在$|\xi - x| < |\xi - x_0|$時當小於一常數$k<1$，惟如是，上述推理復可應用於此．

明乎是，試應用其理以論Newton之法，即可斷定其法之是否適用．假定$f'(x) \neq 0$，將方程式$f(x)=0$以$x=\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$替代之；然後據疊代法，將初步近似值$x_0$代入其中，得第二步近似值如$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$．由是可見此$x_1$與前根據Newton法於$f(x)=0$所得之近似值完全相符．循是以言，若

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

之值愈小，則其逐步近似值之收斂愈速．故Newton法，在$f(x_0)$及$f''(x_0)$甚小而$f'(x_0)$甚大時極合於用，可斷言矣．

不寧惟是，據Newton法所得近似值之準確程度果爲何如，不難由是以估計之．蓋由$f(\xi)=0$可知$\phi'(\xi)=0$．乃據Taylor定理，必有

$$\xi - x_1 = \phi(\xi) - \phi(x_0) = \frac{(\xi - x_0)^2}{2}\phi''(\bar{\xi}),$$

其中$\bar{\xi}$為介於ξ及x_0間之一值．由是以觀，若$\xi-x_0$相當微小，即初步近似值相當接近於ξ，則應用 Newton 法之結果，較直接應用疊代法於$f(x)=0$收斂為速；Newton 法之重要，實由於此．例如

$$\phi''(x)=\frac{f'^2(x)f''(x)+f'(x)f(x)f'''(x)-2f(x)f''^2(x)}{f'^3(x)},$$

苟處處小於 10，而$\xi-x_0$之差已小於 0.001，則x_1之誤差將不致超過$\frac{1}{2}[(0.001)^2\times 10]=0.000005$，其準確可以概見．

7.3.4. 舉例

試求

$$f(x)=x^3-2x-5=0$$

之近似根，因$x=x_0=2$時，得$f(x_0)=-1$，又$x=x_1=2.1$時，得$f(x_1)=0.061$，故據 Newton 法，必有

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=2.1-\frac{0.061}{3(2.1)^2-2}=2.1-0.005461=2.094539.$$

欲估計其誤差為何如，可先據前式求得$\phi''(x)$在$x=2$點鄰近之值約為 1，故必小於 2．復因x_1之誤差必小於$\frac{1}{160}$，蓋割線之連結$x=2, y=-1$及$x=2.1, y=0.061$兩點者與橫軸相交之點，離$x=2.1$不能過$\frac{1}{160}$，而居於其下之曲線與橫軸相交處必較此更近於$x=2.1$，由是以言，x_2之誤差必小於

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(160)^2}=\frac{1}{25,600}<0.00004.$$

若以此種準確程度為未足，則再度應用此法，將$x_2=2.094539$代入，求得$f(x_2)$及$f'(x_2)$，從而得知x_3，其誤差必小於$\frac{1}{(25600)^2}<0.000000002$．

茲更就下列方程式

$$f(x)=x\log_{10}x-2=0$$

討論之．因$f(3)=-0.6$及$f(4)=+0.4$之故，試以$x_0=3.5$作初步近似值．如是應用對數表可逐步求得

$$x_0=3.5,$$

$$x_1=3.598,$$

$$x_2=3.5972849,$$

$$x_3=3.5972850235.$$

例　題

1. 用 Newton 法，求 $x^3+6x-3=0$ 之正根至小數四位.

2. 求 $x=\tan x$ 之近似根，介於 π 及 $\frac{3}{2}\pi$ 之間者，至小數四位，試證其結果準確至四位.

3. 用 Newton 法，求 x 之滿足.

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{4}$$

者.

4. 求 $x=2\sin x$ 之近似根至小數兩位.

5. 用疊代法求 $x^5-x-0.2=0$ 之正根.

6. 用疊代法求 $x^4-3x^3+16x-10=0$ 之最小正根.

7. 求 $x^3-7x^2+6x+20=0$ 之近似根至小數四位.

第七章附錄

Stirling 公式

治統計學[1]及幾率理論[2]者每以多數情形作推理之根據，因之幾在在與 $n!$ 相遇．於是有一重要問題隨之而生，即如何爲 $n!$ 求得一近似算法，並如何以 n 之初等函數表而達之．此問題已由 Stirling 公式解決之，其言曰，苟 $n\to\infty$，則

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \to 1,$$

詳言之，
$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right),$$

其意謂 n 甚大時，$n!$ 與 $\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ 相差無幾，且其間誤差，可由 $1+\frac{1}{4n}$ 測知之.

此關係之成立，深足令人注意．欲證之，可先標繪 $y=\log x$ 之圖形，求其下之面積 A_n，由 $x=1$ 以迄 $x=n$ 者如下：

---

(1) statistics; statistique; Statistik.　(2) theory of probabilty; théorie de probabilité; Theorie der Wahrscheinlichkeit.

$$\int_1^n \log x dx = x\log x - x \Big|_1^n = n\log n - n + 1.$$

此面積亦可應用梯形替代法(見 §7.1.2)求之,試就 $x=1,2,\cdots n$ 諸點

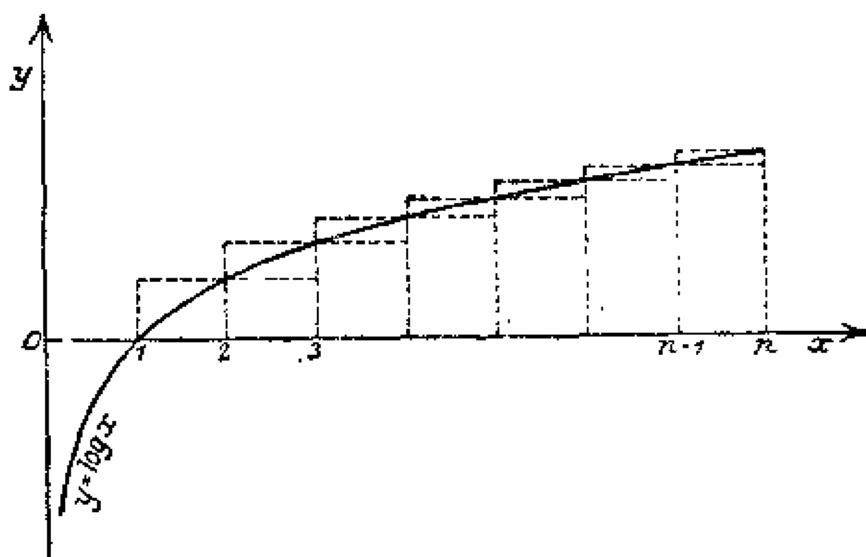


圖7.7

立垂直線於橫軸(見圖 7.7),則其面積之近似値 T_n 爲:

$$T_n = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log n = \log n! - \frac{1}{2}\log n.$$

試令 $A_n - T_n = a_n$ 而細考之,可見 a_n 必不因 $n\to\infty$ 而無限制增大,因此 A_n 與 $T_n = A_n\left(1-\frac{a_n}{A_n}\right)$ 之數量級必相等. 欲證 a_n 之有涯,當在 $k\leqq x\leqq k+1$ 中,就曲線下及割線下之兩面積,比較而並觀之,其差自爲 $a_{k+1}-a_k$. 復因曲線之下凹性,故其圖形必居於割線之上,遂知 $a_{k+1}-a_k$ 爲一正數,從而推知 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ 必有獨升性. 又一考 $a_{k+1}-a_k$ 所示面積,不難求得其上涯,蓋在 $x=k+\frac{1}{2}$ 點作一切線,其下之面積,減去其面積之居於割線之下者,必爲 $a_{k+1}-a_k$ 所不能超過之一上涯,觀於圖 7.8 自明. 惟如是,遂有下列不等式成立:

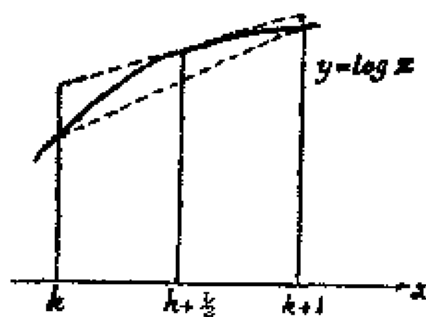


圖7.8

$$a_{k+1}-a_k < \log\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\log\left[1+\frac{1}{2\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$<\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\log\left[1+\frac{1}{2(k+1)}\right];$$

然後相繼令 $k=1,2,3,\cdots,n-1$,一一相加，則右方各項除二項外均彼此相消，復因 $a_1=0$ 之故，遂得

$$a_n<\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{2}\log\frac{3}{2},$$

由是 a_n 之有涯性已得證，復據其獨升性，可知 $n\to\infty$ 必斂於一極限 a. 因此之故，必有

$$a-a_n=\sum_{k=n}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)<\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

據定義既有 $A_n-T_n=a_n$. 故得

$$\log n!=1-a_n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n,$$

或
$$n!=\alpha_n n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

其中 α_n 爲 e^{1-a_n} 之簡寫. 循是言之，α_n 必有獨降性且斂於 $\alpha=e^{1-a}$. 惟如是，得從而推斷

$$1<\frac{\alpha_n}{\alpha}=e^{a-a_n}<e^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=\sqrt{1+\frac{1}{2n}}<1+\frac{1}{4n};$$

更由是而知

$$\alpha n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}<n!<\alpha n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right)$$

之成立. 惟其中 α 之存在雖無可疑，其果爲何數，尚未規定. 欲規定之，可引用 §4.3.4 所已證之關係

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

將其中 $n!$ 代以 $\alpha_n n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$，復將 $(2n)!$ 代以 $\alpha_{2n}2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}$，即得

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n{}^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}}=\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}},$$

由是知 $\alpha=\sqrt{2\pi}$，而 Stirling 公式，遂得證矣.

Stirling 公式不特在理論上佔一重要地位，而於 n 甚大時，藉是以

算 $n!$ 之近似值，實有極大便利，蓋利用對數表，據此而從事計算，以視將甚大之整數相乘，其繁簡不可以道里計．例如 $n=10$ 時，據 Stirling 所得結果為 3598696，其實10！為3628800，其間誤差僅百分之 $\frac{5}{6}$ 而已．

例　題

試證

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

第八章　無盡級數綱要

無盡級數，在前數章中已屢見之，如幾何級數及 Taylor 級數，其最著者也．在本章中，擬由一普遍觀點作系統之研討．由原則上言之，任何極限如

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n$$

皆可化為無盡級數之形式；蓋 n 既依次而為 $1,2,3,\cdots$，若 $n=1$ 時，令 $a_1=s_1$，復在 $n>1$ 時，令 $a_n=s_n-s_{n-1}$，則 s_n 將為

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$

而 S 實為最前 n 項疊加之和在 $n\to\infty$ 時所趨之極限．惟如是，遂稱 S 為下列無盡級數：　$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots$

之和．據是以觀，無盡級數皆為表達極限之一種形式，利用疊次加項之法，以接近其所欲表達之極限而已．如任何實數 a 之介於 $0\leqq a\leqq 1$ 之間者，以無盡級數表達之，則有 $a=a_1+a_2+a_3+\cdots$，其中 $a_n=\alpha_n\times 10^{-n}$，$\alpha_n$ 為小於 10 之一正整數；蓋其所加項數愈多，其趨於 a 愈近；類是之例，不勝枚舉．讀者既明此中關係，遂以為極限理論，前已詳哉言之，無盡級數既為表達極限之一種形式，自可歸併於此，不必更建一獨立之理論．殊不知事實適得其反．無盡級數，就其大體而言，整潔美觀，甚便推理，舉其前一項，後一項即追踵而至，相隨而加，秩然不亂，據是以研討極限，則極限理論將更得透澈之闡明．故本書第一卷殿以無盡級數之普遍理論，實有其深長之意義也．

無盡級數之外，又有所謂無盡乘積[1]者，乃用疊次乘項之法以近似表達一極限；惟本書為篇幅所限，僅於本章附錄中略及之，至其詳細理論，當求之專書．

第一節　基本概念

8.1.1.　收斂與發散

(1)infinite product; produit infini; unendliches Produkt.

凡一無盡級數中之第 n 項，不論 n 為任何整數，以 a_n 表之者，皆可歸於下列形式：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu,$$

其中右方之集和號 Σ，意即左方之簡寫，自無待言．苟其最前 n 項之和

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu,$$

在 $n\to\infty$ 時有一極限 S：　　$S=\lim_{n\to\infty}s_n$，

則此級數謂之**收斂**，或稱此級數為**斂級數**，而 S 稱為此**斂級數之和**．苟其無極限存在，則謂之**發散**，或簡稱為**散級數**．斂級數之例，前已數見不鮮；如幾何級數 $1+q+q^2+\cdots$ 在 $|q|<1$ 時斂於 $\frac{1}{1-q}$，他如 log2 及 e^x 之級數皆是．

既明級數收斂之義，乃得根據 Cauchy 審斂法，而推斷一無盡級數收斂之必要與充分條件，此條件無他，**必有如是大之 m 及 $n(m>n)$ 可求，足致**　　$|s_m-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|$

為任意小而已．精言之，一無盡級數必在下述條件，且亦惟在下述條件下方能收斂；條件為何，試任意選擇一正數 ε，不論其值如何小，必有一 N 可求，一隨 ε 而異，且隨 $\varepsilon\to 0$ 而常無限制趨大之 N，凡 m 及 n 之大於 N 者皆足致 $|s_m-s_n|<\varepsilon$ 之成立．

例如假定幾何級數中之 q 為 $\frac{1}{2}$，即 $q=\frac{1}{2}$．試擇 $\varepsilon=\frac{1}{10}$，則上述之 N，即於 $N=4$ 得之．何則，因

$$|s_m-s_n|=\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n}}\right)<\frac{1}{2^{n-1}},$$

故當 $n>4$ 時，$\frac{1}{2^{n-1}}$ 已小於 $\frac{1}{10}$ 故也．若擇 $\varepsilon=\frac{1}{100}$，則 $N=7$，然後 m 及 n 之大於 7 者皆足致 $|s_m-S_n|<\frac{1}{100}$，讀者可自行證實之．至於 N 與 ε 相倚為變之關係，觀此一例，顯而可見．

以意測之，苟一級數果能收斂，則其第 n 項 a_n 必隨 $n\to\infty$ 而趨於 0，故　　$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

為收斂之必要條件，自無疑義，蓋不如是則 Cauchy 審斂條件無成立可能也．惟此必要條件決非充分，可以斷言．何則，吾人不難例舉一無盡級

數，其 a_n 雖隨 $n\to\infty$ 而趨於0，然其和無存在可能，因 s_n 隨 $n\to\infty$ 而無限制趨大也；故此條件之未能充分，可由是以識之。

如
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$
雖其第 n 項隨 $n\to\infty$ 而趨於0，但
$$s_n>\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$
實隨 $n\to\infty$ 而無限制趨大，故為一發散級數。他如
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$
即世所慣稱之調和級數(1)，雖亦 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，然其為發散級數亦可見，蓋因
$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$
之故，當 n 及 $m=2n$ 任意變大時，該各項均為正數，其最前 n 項之和將無限制趨大也。所當注意者，苟此級數中正負項交相出現如
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\mp\cdots,$$
即所謂交錯級數(2)者，則為一斂級數；據第六章第一節所述，此級數實斂於 log2.

最後尚有兩事，擬附述於此。其一，所謂發散級數，其 s_n 未必隨 $n\to\infty$ 而無限制趨大，如
$$1-1+1-\cdots+1-\cdots,$$
其 s_n 為1或為0，固未嘗因 $n\to\infty$ 而趨大，惟其無極限存在，故為一發散級數。其二，級數之收斂與否，決不因其中棄去或加入有盡項而有所變更。故專就收斂或發散性而論，可任意删去其前數項，如由 a_1 或 a_5 或任何一項開始，作為首項而研討之，或為推理之便，竟加入數項於其前，諸如此類之更動，對於結果絕無影響也。

8.1.2. 絕對收斂與相對收斂

吾人既知調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 之發散性，然同一級數，苟其中各項交為正負，如
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

(1) harmonic series; série harmonique, harmonische Reihe.

(2) alternating series; série alternée; alternierende Reihe.

者,則為一斂級數.復觀一幾何級數:

$$1-q+q^2-q^3+\cdots$$

在 $0\leqq q\leqq 1$ 條件下斂於 $\frac{1}{1+q}$,而其中各項若均為正數如

$$1+q+q^2+q^3+\cdots$$

則斂於 $\frac{1}{1-q}$;觀此各例,乃知級數之收斂與否及斂於何數,全視其中各項之性質而定;級數中各項有全為正數者,有正負互見者,不可不分別研討,詳察而深考之也.

級數中之項全為正數者,其情形不出兩種:此級數或有收斂性,或其 s_n 隨 $n\to\infty$ 而無限制趨大耳.考 s_n 既為一獨升數序,則其收斂可由其有涯性以推知之.苟其第 n 項在 $n\to\infty$ 時趨 0 甚速,則其收斂可必.反之,苟其不趨於 0,或趨 0 而過於遲緩者,則其結果必致發散,可斷言也.至於級數中之正負項並見者,雖其中正項趨 0 甚緩,正項之和或竟愈趨愈大,而負項之出現,足以調節於其間,致有一極限可趨者,亦數見不鮮.例如調和級數:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之所以不斂,由於其項趨 0 之過緩,惟然,其 s_m-s_n 將隨 $m>n\to\infty$ 而愈趨愈大;然一觀

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

其中負項適足以調節此趨勢,使其為一斂級數.吾人有鑒於此,在討論級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 時,其中正負項並見者,必同時注意其絕對值所組成之級數,即

$$|a_1|+|a_2|+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|,$$

簡稱為 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 之**絕對值級數**(1).假定其絕對值級數果有收斂性,換言之,

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_m|$$

當 n 及 $m>n$ 趨大時果為任意小,則因

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|\leqq|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_m|$$

(1)absolute sereies; série absolue; Reihe der absoluten Beträge.

之故,可知此式之左方亦為任意小,是即 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 收斂之謂. 如是者,謂之**絕對收斂**[1],其收斂乃由於各項絕對值趨小之本質,與其正負無關者. 苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 為一斂級數而其絕對值級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ 未能收斂者,則謂之**相對收斂**[2];推原其所以收斂之故,實由於其中正負之互為消長耳.

欲決定一級數之是否相對收斂,有一簡易之法,世常以 Leibniz 審斂法稱之者,其言曰:**苟一級數中之項交為正負(即所謂交錯級數者),又其項之絕對值有獨降性,即不論 n 為任何正整數,必合於 $|a_{n+1}|<|a_n|$,且隨 $n\to\infty$ 而趨於 0 者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 必為一斂級數.** 欲證之,可假定 $a_1>0$,並將此級數寫如

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots,$$

其中 b_n 均為正數,滿足 $b_{n+1}<b_n$,且隨 $n\to\infty$ 而趨於 0 者. 試將此分寫如下列兩種形式

$$b_1-(b_2-b_3)-(b_4-b_5)-\cdots$$

及
$$(b_1-b_2)+(b_3-b_4)+(b_5-b_6)+\cdots$$

即可從而推知

$$s_1>s_3>s_5>\cdots>s_{2n+1}>\cdots,$$
$$s_2<s_4<s_6<\cdots<s_{2n}<\cdots$$

之成立. 復因 $s_{2n}<s_{2n+1}<s_1$ 及 $s_{2n+1}>s_{2n}>s_2$ 之故,可知 $s_1,s_3,s_5,\cdots$ 為一獨降數序,以 s_2 為其下界者,故必有一極限 L 無疑; 又 $s_2,s_4,s_6,\cdots$ 為一獨升數序,以 s_1 為上界者,故亦必有一極限 L'. 復次,s_{2n} 與 s_{2n+1} 相差為 b_{2n+1},而 b_{2n+1} 既隨 $n\to\infty$ 而趨於 0,其意無異



圖8.1

謂 s_{2n} 及 s_{2n+1} 有一共同極限,故此級數之收斂,從可識矣.

絕對與相對收斂,就其性質論之,有根本不同之處,不可不注意者.

(1) absolute convergence; convergence absolue; absolute Konvergenz.

(2) conditional convergence; convergente conditionnelle; bedingte Konvergenz.

試以 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 表一斂級數，其中正項爲 $p_1, p_2, p_3, \cdots$，負項爲 $-q_1, -q_2, -q_3, \cdots$，復就其最初 n 項之和 $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ 言之，可假定其中正項有 n' 項，負項有 n'' 項，於是 $n'+n''=n$，且 n' 及 n'' 必隨 n 而趨大。復次，

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu - \sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$$

之成立，亦顯而可見。苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 之收斂爲絕對，則 $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ 及 $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ 必各自收斂，何則，$\sum_{\nu=1}^{m} p_\nu$ 及 $\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu$ 均爲獨升數序，且不能超過 $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ 故也。**由是以論，凡絕對收斂之級數可視爲兩斂級數之差，而此兩級數全爲正項所組成者，於是其形式可謂整潔極矣。**

試一考相對收斂之級數，其情形有判然不同者。苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 之收斂爲相對，則吾人不難證明 $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ 及 $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ 非各自發散不可。何以言之？倘兩者俱斂，則 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 將因之而絕對收斂，與假定不符。倘兩者之一如 $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ 爲斂，其他爲散，則據 $s_n = \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu - \sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$，可知 s_n 當 $n\to\infty$ 時必無極限可趨；因 $\sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu$ 及 n' 既隨 n 無限制趨大，而 $\sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$ 在 $n\to\infty$ 時實有一極限，如是則 s_n 將隨 $n\to\infty$ 無限制趨大，與初所假定者又不相符。**由是言之，在 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 相對收斂之假定下，$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ 及 $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ 必各自發散；如是而欲將一相對收斂級數化爲兩斂級數之差如前之絕對收斂級數者，爲事理所不許；**此爲兩者根本不同之所在，其他不同性質皆由是而生也。

8.1.3. 級數項之易位

與上述之理發生密切關聯者，有所謂級數中各項所處位置之問題。試求有盡個數之和，其間位置之先後對於加得結果絕無影響，是乃基本原理之必然性，無可致疑者。今欲顛倒一無盡級數中各項之次序，其意果何所指，尙非明定不可；蓋無盡級數既無最後一項可言，通俗所謂顛倒，自不能應用於此。因之有所謂易位(1)之義。一級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots$

(1) rearrangement of terms; arrangement des termes; Umordnung der Reihenglieder.

易位後變為 $b_1+b_2+b_3+\cdots$ 者，乃每一 a_i 必有一 b_k 且任何 b_k 必可求得一 a_i 與之相應之謂（如 $i<k$，則其位移後，反之移前）．例如

$$1+q+q^3+q^2+q^5+q^4+q^7+\cdots$$

為一級數，由幾何級數 $1+q+q^2+q^3+\cdots$ 易位而得者．

既明易位之義，乃可討論級數易位，對其收斂性有無影響之問題．**苟一級數之收斂為絕對，則其項雖任意易位，其收斂依然，且其所趨極限亦不變**．何以證之？試先假定

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

中各項均為正數，吾人必可使 $s_n=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu$ 中各項，復一一出現於易位後之 $t_m=\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu$，其法無他，但令 m 相當大即可，從而得知 $t_m\geqq s_n$ 之成立．然後更求一 n'，使其中 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 又一一出現於 $s_{n'}=\sum_{\nu=1}^{n'}a_\nu$，故有 $s_{n'}\geqq t_m$．惟如是，若以 A 表其當初所趨之極限 $\lim s_n=\lim s_{n'}=A$，則 $t_m\leqq s_{n'}\leqq A$，從而復有 $s_n\leqq t_m\leqq A$，故 t_m 在 $m\to\infty$ 時之趨於 A，於是得證．

至於級數中正負項並見者，苟其絕對收斂，可視為兩斂級數之差，其項全為正者．此由正項所組成之級數既不因易位而變其斂性或其所斂之極限，則其差亦必如是．**由是以論，級數之絕對收斂者，決不因其項易位而有所影響，可斷言矣**．

初學者閱此，或以為其亦當然，無足深論．殊不知上述證明，必根據於絕對收斂之假定而後可．苟為相對收斂，其事將完全改觀．例如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

之收斂為相對，且其和為 $\log 2$，吾人前已知之．試以 $\frac{1}{2}$ 乘之．

$$\frac{1}{2}\qquad-\frac{1}{4}\qquad+\frac{1}{6}\qquad-\frac{1}{8}+-\cdots=\frac{1}{2}\log 2$$

復以此加於上式，則有

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+-\cdots=\frac{3}{2}\log 2;$$

此結果可視為由上式易位而得者，雖依然收斂，惟斂於 $\frac{3}{2}\log 2$，而不斂於 $\log 2$．此事之發見，

在當時自引起絕大衝動.由是知無盡級數之運用,不可不致其深思明辨之功,毫釐之差,可發生千里之謬也.

觀於是例,吾人擬建立一重要定理;從事證明級數之相對收斂者,可因其項之易位而任意變更其極限,或竟一變而為發散,亦無不可.試假定 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 為相對收斂,其中正項以 p_1, p_2, p_3, $\cdots$ 表之,負項以 $-q_1, -q_2, -q_3, \cdots$ 表之.因 a_n 隨 $n\to\infty$ 而趨 0,故 p_n 及 q_n 亦必隨之而趨 0;又 $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ 及 $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ 各為散級數,已如前所證.惟其如是,吾人不難以易位之法,使其斂於一任何極限 a.何以言之?先將如許正項相加,使 $\sum_{\nu=1}^{n_1} p_\nu$ 之值超過於 a,因 $\sum_{\nu=1}^{n_1} p_\nu$ 隨 n_1 而趨大,其事之可能,自無疑義;然後加入如許負項 $-\sum_{\nu=1}^{m_1} q_\nu$ 使其和降於 a 之下,其事因 $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ 之發散而必能實現.自此所後,復加入 $\sum_{\nu=n_1+1}^{n_2} p_\nu$ 以求超過 a,更加入 $-\sum_{\nu=m_1+1}^{m_2} q_\nu$ 使重降於 a 之下.如是繼續行之,永無盡期,必可周旋於 a 之鄰近而趨於 a,蓋 p_n 及 q_n 皆隨 $n\to\infty$ 而趨 0 故也.於是吾人欲證之理,已在乎是.據是以推,吾人不難將一相對收斂之級數易位而變為發散,其法無他,取極多正項一一相加,同時使負項不常出現,則負項不足調節正項,其結果必致發散無疑.

8.1.4. 無盡級數之運算

設有兩無盡級數 $a_1+a_2+\cdots=S$ 及 $b_1+b_2+\cdots=T$,分別收斂於 S 及 T 者,則將其逐項相加,組成另一級數,其項為 $c_n=a_n+b_n$ 者,必斂於 S 及 T 之和:$S+T$,蓋

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu+\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\to S+T$$

之真確,基於極限之理,顯而可見者.復次,若將一斂級數之各項乘以一數 r,苟其原斂於 S,則乘之之後,必斂於 rS.此皆淺顯之理,不論其收斂為絕對或相對,皆可行之.

然欲將兩無盡級數之收斂者以有盡級數互乘之法彼此相乘,其結

果是否收斂,爲一頗費研討之問題,當於本章附錄中略及之.

例　題

1. 試證 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ [illegible]

2. 試證 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$ [illegible]

3. 試證 $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}$ [illegible]

4. 問 α 必如何始使 [illegible] 收斂?

5. 苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu}$ 有收斂性,又 S_n [illegible],則

[illegible]

亦有收斂性,且斂於 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu}$. 試證之.

6. 試考 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right.$ [illegible] $\left.\right)$ 之斂散性.

7. 試考 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\nu}{\nu+1}$ 之斂散性.

第二節　絕對收斂之充分條件

前節中既建立一具有相當普遍性之定理,即所謂 Leibniz 定理者,藉以決定一交錯級數在何種條件下得相對收斂.繼此所欲論述者,爲絕對收斂之充分條件.

8.2.1. 比較檢驗法.

絕對收斂之所要求者,遠較相對收斂爲苛,觀於前節所述,已可概見.然則一級數果在何種條件下始能絕對收斂,實爲一亟待解決之問題.由原則上言之,有所謂**比較檢驗法**[1]者,其言曰: **苟有一斂級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}b_{\nu}$ 可尋,其中各項 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 全爲正數,且不論 n 爲任何正整數,又有**

$$|a_n| \leqq b_n$$

一式之成立者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu}$ 必絕對收斂.此理自淺顯而易明;蓋據 Cauchy 審斂法言之,因

(1) comparison test; prinzip der Reihenvergleichung.

$$|a_n+\cdots+a_m|\leqq|a_n|+|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|\leqq b_n+\cdots+b_m$$

之故,在 $\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu$ 爲一斂級數之條件下,此式之左方自隨 n 及 m 之趨大而爲任意小,從而知 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|$ 之收斂,是即 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 絕對收斂之謂.由是以論,如欲審定 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 之絕對收斂性,但設法求得一其他斂級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu$,其項盡爲正數,又一一不小於原有級數項之絕對值 $b_n\geqq|a_n|$ 者可矣.

循是以論,苟 $$|a_n|\geqq b_n>0,$$
而 $\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu$ 爲一散級數者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 必無絕對收斂之望;其理甚顯,讀者可自證之.

8.2.2. 與幾何級數相比較

欲望比較檢驗法之成功,必先有一斂級數,藉資比較而後可.其最便於比較者,爲幾何級數.因此之故,遂有如下定理之成立:

苟一級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 自其中隨於某確定項以後之 a_n 均滿足

$$|a_n|<cq^n, \tag{I}$$

假定 q 爲任何小於1之固定正數,c 爲一正數,與 n 及 q 無關者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 必絕對收斂.

此定理可在較寬之假定下以下列兩種形式出之.一級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 絕對收斂之條件爲:(一)自某確定項以後之 a_n 均滿足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q, \tag{IIa}$$

其中 q 爲小於1之一正數,與 n 無關者.(二)自某確定項以後之 a_n 均滿足 $$\sqrt[n]{|a_n|}<q, \tag{IIb}$$
其中 q 爲小於1之一正數,與 n 無關者.前者謂之**檢比法**[1],後者謂之**檢根法**[2].試假定某確定項爲第 n_0 項,凡 $n>n_0$ 者,其 a_n 皆滿足上述條件.爲求符號之簡潔,姑名 $a_{n_0+m+1}=b_m$,如是則

$$|b_1|<q|b_0|,\quad |b_2|<q|b_1|<q^2|b_0|,\quad |b_3|<q|b_2|<q^3|b_0|,$$

(1)ratio test; règle de d'Alembert; Quotientenkriterium.

(2)root test; règle de Cauchy; Wurzelkriterium

依此類推，乃知 $|b_m| < q^m |b_0|$.

故檢比法於是得證．復次，據檢根法所假定，可知 $|a_n| < q^n$，故其眞確，顯而可見．不寧唯是，欲求上述兩法中假定之成立，但求

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k < 1, \qquad \text{(III}a\text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k < 1, \qquad \text{(III}b\text{)}$$

足矣．蓋此關係如能成立，當 n 相當大時 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\sqrt[n]{|a_n|}$ 與 k 相差甚微，則以 q 表任何一數如 $k<q<1$，必有一 n_0 存在，凡 n 之大於 n_0 者，皆足致 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ 或 $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ 之成立也．明乎是，可知若有一 n_0，當 $n > n_0$ 時，

$$|a_n| > c,$$

其中 c 爲一確定正數；或 $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$，

或 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k > 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k > 1,$$

則其級數必發散，其理甚明，無待詳矣．

所當注意者，上述各法不能認爲彼此意義相等，且與最初之條款 $|a_n| < cq^n$ 亦不盡同，蓋其一滿足時，其他未必成立也①．復次，上述諸法均爲絕對收斂之充分條件；苟其中之一滿足時，其級數誠能收斂，然絕對收斂之級數未必滿足此種條件；要而言之，其條件僅爲充分而非必要耳．如滿足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

之級數，其收斂與否竟未能決．例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 滿足 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ 及 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，爲一散級數，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 雖亦同時滿足此兩條件，然爲一斂級數．於是上述兩法之非必要條件，可以見矣．

茲更舉例以明其用．設有

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n + \cdots,$$

應用檢根法，得 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |q| \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = |q|,$$

①由 IIIa 可推 IIa，由 IIIb 可推 IIb，由 IIIa 可推 IIIb，由 IIa 可推 IIb，更由其中任何一理可以推 I，惟欲逆推之則均不可．

或用檢比法,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = |q|;$

由是知 $|q|<1$ 時,必絕對收斂.

更就 $$1+2q+q^2+2q^3+\cdots+q^{2n}+2q^{2n+1}+\cdots$$

論之,如用檢比法,則在 $\frac{1}{2}\leqq|q|<1$ 時,因 $\left|\dfrac{2q^{2n+1}}{q^{2n}}\right|=2|q|\geqq1$ 之故,其斂否未能決定. 苟用檢根法,則因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|q|$,其在 $|q|<1$ 之收斂確定.

8.2.3. 與定積分相比較

試假定 α 為一正數,一考下列級數之性質:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots,$$

欲知其是否收斂,可先標繪 $y=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ 之圖形,並在 x 軸上取 $x=1,2,\cdots$ 諸點,復在每兩毗鄰之變程中,即在 $n-1\leqq x\leqq n$ 及 $n\leqq x\leqq n+1\ (n>1)$ 中作兩長方形,其底之長為1,其高為 $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 者,如圖 8.2 所示,則必有 $$\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x^{\alpha}}<\frac{1}{n^{\alpha}}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$

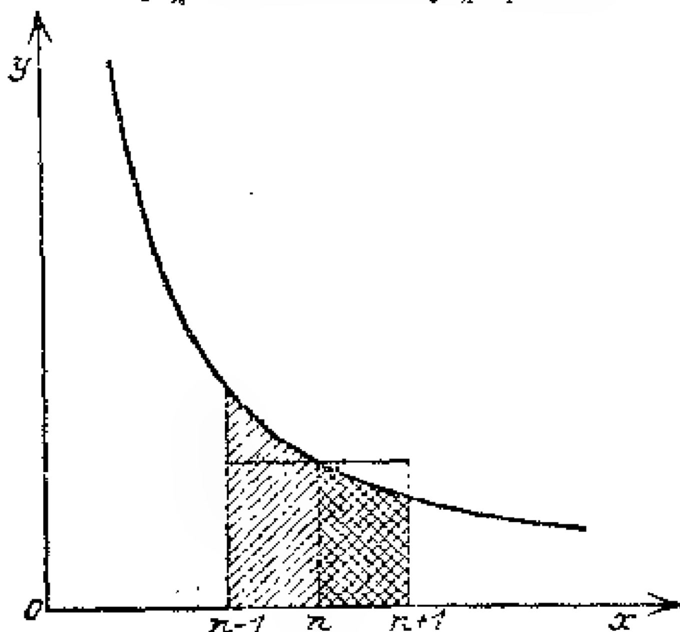


圖8.2

一式之成立. 令其中 n 相繼取得 $n=2,3,4,\cdots m$ 諸值,然後一一相加,即可測知 $S_m=\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 之上下涯①如下:

---

① 由此關係,可知 $\alpha=1$ 時,數序 $C_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ 必有一下涯. 復由 $\dfrac{1}{n+1}<\int_{n}^{n+1}\dfrac{dx}{x}=\log(n+1)-\log n$,知其數序必有遞降性,故在 $n\to\infty$ 時必趨一極限 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n\right)=C$. 此極限 C,其值約為 0.5772 ⋯ 者,世常以 Euler 常數稱之.

$$1+\int_{1}^{n+1} [illegible] < s_n < 1+\int_{1}^{n} [illegible]$$

惟 $m\to\infty$ 時，$\int_1^m \frac{dx}{x^\alpha}$ 之有無極限，僅視 $\alpha>1$ 或 $\alpha\leq 1$ 而定（參§1.7.1）。因此之故，當 $\alpha>1$ 時 s_m 既為單升，必有一極限；在 $\alpha\leq 1$ 時，則當 $m\to\infty$ 而無限制增大，於是得一定理：

級數 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots$$

收斂（當然絕對收斂）之必要與充分條件非他，即 α 大於 1 是也。

此理既證，調和級數之所以發散，乃為當然之事，毋不足怪。既知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 在 $\alpha>1$ 之收斂性，吾人常可用之以與其他級數相比較，從而決定其斂散；如 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu^\alpha}$ 在 $\alpha>1$ 及 $|c_\nu|<M$（M 為一與 ν 無關之數）時必絕對收斂，即可由是而判。諸如此類問題，在乎讀者善自體會運用之耳。

例題

試考下列各級數（1—6）是否收斂？

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.
4. * $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^\alpha}$，$\alpha$ 為固定。
5. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^{1+[illegible]}}$.
6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$.

試估計下列各級數（7—10）n 項以後之誤差：

7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.
8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$.
9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$.
10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$.

11. 試證 $\sum_{k=1}^{\infty}\sin^2\left[\pi\left(k+\frac{1}{k}\right)\right]$ 為收斂。

12. 問 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-k^2}\left(\text{即 } 1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2}\right)$ 是否收斂？

13. *試證 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^\alpha}$ 於 $\alpha>1$ 時為收斂，$\alpha\leq 1$ 時為發散。

14. *試證 $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\log k(\log\log k)^\alpha}$ 於 $\alpha>1$ 時為收斂，$\alpha\leq 1$ 時為發散。

15. 試證若 $u_i\geqq 0\ (i=1,2,3,\cdots)$ 而 $\sum_{i=1}^{\infty}u_i$ 為收斂，則 $\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2$ 亦為收斂。

16. 試示若 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$ 均為收斂，則 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 亦為收斂。

17. 試證

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}+\cdots=\log 3.$$

18.*設 n 爲大於 1 之任意整數,試證

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{\,n}}{k}=\log n,$$

其中 $a_k^{\,n}$ 之定義如下:

$$a_k^{\,n}=\begin{cases}1, & \text{苟 } n \text{ 非爲 } k \text{ 之因數},\\ -(n-1), & \text{苟 } n \text{ 爲 } k \text{ 之因數}.\end{cases}$$

第三節　函數組成之級數

觀以前所論級數,其項皆爲常數;因此之故,苟其斂於一極限,其極限亦必爲一常數.惟級數之項爲函數者,其重要遠過於此,如 Taylor 級數卽爲其中之一例.吾人在本節中所欲研討者爲:

$$g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+\cdots,$$

其中 $g_n(x)$ 在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中爲確定函數;其最初 n 項之和

$$g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)$$

以 $f_n(x)$ 表之.苟 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 果能存在,則此級數 $g_1(x)+g_2(x)+\cdots$ 謂有收斂性,而 $f(x)$ 卽稱之爲此斂級數之和.

據是以論,可見一斂級數 $g_1(x)+g_2(x)+\cdots$ 之和 $f(x)$ 卽爲函數序 $f_1(x),f_2(x),\cdots$ 之極限.倒論之,設有函數序 $f_1(x),f_2(x)\cdots$ 於此,必可獲得一意義與此相等之級數,如 $n=1$ 時,令 $g_1(x)=f_1(x)$,又 $n>1$ 時,令 $g_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$ 可矣.因此若任擇其一而討論之,關於其他之理亦隨之而自明.

8.3.1. 論函數序與曲線族之極限

所謂 $f(x)$ 爲 $f_1(x),f_2(x),\cdots$ 之極限,假定其變程爲 $a\leqq x\leqq b$ 者,其意無他,$f_n(x)$ 在規定變程中之每一點 x 當 $n\to\infty$ 時趨於 $f(x)$ 耳;因此得以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 表而出之.$f(x)$ 之果爲何種函數爲另一問題;苟其有存在可能,換言之,苟 $f_n(x)$ 果有收斂性,則據 Cauchy 審斂法所論,其必要與充分條件無他,不論 x 爲規定變程中之任何一點,

試隨意選擇一任何小之正數 ε，必有一 $N(\varepsilon)$ 可尋，凡 m 及 n 之大於 $N(\varepsilon)$ 者，皆足致 $|f_n(x)-f_m(x)|$ 之小於 ε，此 **$N(\varepsilon)$ 不特隨 $\varepsilon\to 0$ 而無限制趨大，且隨 x 而異**，是又不可不注意者。

函數序之斂於極限者，前已數見不鮮。如冪函數 x^{α} 在 α 爲一無理數時曾以

$$x^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}x^{r_n}$$

規定之，其中 r_n 爲一有理數所組成之數序，當 $n\to\infty$ 時斂於 α 者。復一考 e^x，則有

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

列於右方之 $f_n(x)$ 固爲 n 次之多項式也。

試爲一函數序標繪其中各函數之圖形。如標繪 x^{r_n} 或 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，即可從而得一**曲線族**。惟如是，函數序之斂於一極限，未始不可由其圖形之變化中明察之。雖然，函數序與曲線族之趨於極限，其間有不可混而不析者。是乃由於觀覺與推理根本性質之不同，直至十九世紀中葉，其理始大昌。茲特舉一例於後以明其說。

試就 $$f_n(x)=x^n \qquad (n=1,2,3,4,\cdots)$$

而討論之，其變程假定爲 $0\leqq x\leqq 1$。考此一切函數無不連續，且有一極限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，惟此極限函數則無連續性。何則，不論 n 爲任何正整數，必有 $f_n(1)=1$，故其極限爲 $f(1)=1$，復考 x 在 $0\leqq x<1$ 間變化時，其極限爲 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，由是知 $f(x)$ 爲一間斷函數，其值在 $x=1$ 時爲 1，在變程中其他一切點上均爲 0 也。

更標繪 $f_n(x)$ 之圖形 C_n 而觀察之（圖 8.3），則見 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 無一非連續曲線，且無一不經過原點及 $x=1, y=1$ 點，此種連續曲線當 $n\to\infty$ 時逐漸接近於橫軸，且斂於一極限曲線。此極限曲線實爲一折線，爲橫軸上由 $x=0$ 至 $x=1$ 之一段及直線 $x=1$ 上由 $y=0$ 至 $y=1$ 之一段所連成者，故爲一連續曲線，其中有一段垂直於橫軸而已。循是以論，此種曲線 C_n 雖斂於一連續曲線，然其所表函數未能斂於一連續之極限。推原其故，因由於極限曲線有一段線垂直於橫軸，然此垂直之線段卻所以表示極限函數之間斷性。惟其如是，

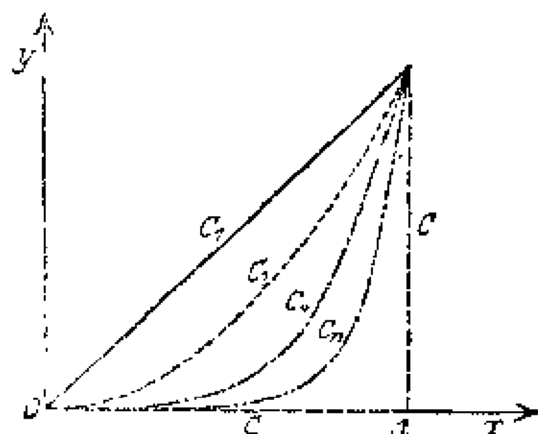


圖8.3

此極限曲線不能卽視爲 $f(x)$ 之圖形，因其旣有一豎直線段，凡有豎直線段之曲線均不能用以表達一單值函數；故 $f_n(x)$ 之圖形所斂之極限曲線，與 $f(x)$ 之圖形不可混而爲一，至此可以恍然矣．

以上專就函數序言之；若以論函數所組成之級數，其理亦同．

8.3.2. 勻斂性

觀於前例，乃有所謂**勻斂性**(1)之義．其義異常重要，而初學每以爲難，故擬詳加論列於此，甚望讀者深思明辨而自得之．

假定 x 之變程爲 $a \leqq x \leqq b$，所謂 $f(x)$ 爲 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在其規定變程中之極限者，就其定義言之，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 在每一 x 點上均能成立而已．惟如是，苟對於近似之準確程度，隨意有所要求，如任意選擇 $\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$ 或 $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$，則必有一 $f_N(x)$ 可尋，其中下標卽所以表其所屬位置之先後者，自此以後，所有 $f_n(x)$，不論 x 如何變化，必自限於 $f(x)+\varepsilon$ 及 $f(x)-\varepsilon$ 之間，換言之，$f_n(x)$ 之圖形，其中 n 大於 N

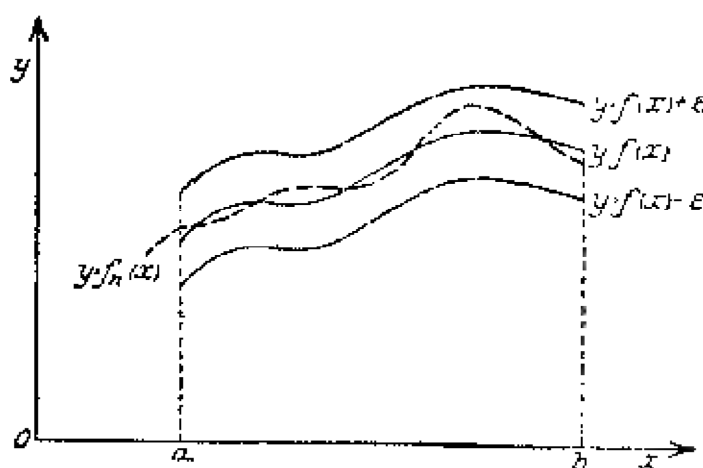


圖8.4

者，皆居於圖 8.4 所示帶形之內而不能出此以外．此意卽謂 ε 無論爲任何正數，旣定之後，必有一 $N(\varepsilon)$ 存在，卽隨 $\varepsilon\to 0$ 而無限制趨大之 $N(\varepsilon)$，不論 x 爲其變程中任何一值，凡 n 之大於 N 者皆足致

$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 之成立（果如是，則不論 x 爲任何一值，但求 m 及 n 大於 N，必有 $|f_n(x)-f_m(x)|<2\varepsilon$.）．當所擇之 ε 愈小，則 N 愈大，N

(1)uniform convergence; convergence uniforme; gleichmässige Konvergenz.

與 ε 間，自有相倚爲變之關係；惟 ε 既定之後，尚應考與之相應之 N 是否可以適用於任何 x，或隨 x 而尚有伸縮之餘地；換言之，N 是否僅隨 ε 而變，或尚可視 x 而異．苟其僅隨 ε 而變，而與 x 所處地位無關，則 N 得隨 ε 而完全確定，於是同一 N 得在在適用．意即 $f_n(x)$ 處處以同等準確程度收斂於 $f(x)$，是謂勻斂．苟其不然，即 N 不特隨 ε，且隨 x 而異者，謂其斂不勻．

勻斂之義略如上述．初學不加深辨，以為斂者無不勻斂，殊不知事有大謬不然者．收斂之不勻者屢見不鮮，略舉數例於後，藉備考覽．

［例一］　前段所論之 $f_n(x)=x^n$，在 $0\leqq x\leqq 1$ 中之收斂實爲不勻；其極限 $f(x)$ 在 $x=1$ 時爲 $f(1)=1$，在 $0\leqq x<1$ 時 $f(x)=0$．設 ε 爲任何正數，又 $x=\xi$ 爲變程中任何固定點，但令 n 相當大，必可使成 $|\xi^n-f(\xi)|<\varepsilon$ 之關係，故其爲收斂，自無疑義．惟細察之，可見其斂之不勻．何以言之？試令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，則不論 n 如何大，必可在 $x=1$ 點鄰近求得一點 η 如 $1>\eta>\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ 者，代入於 $|\eta^n-f(\eta)|=\eta^n>\frac{1}{2}$，其結果必將大於 $\varepsilon=\frac{1}{2}$；故欲求得一適用於變程中任何一點 x 之 n，足致 $|f(x)-f_n(x)|$ 小於 $\frac{1}{2}$ 者而不可得，故其斂之不勻，從可識矣．此事由其圖形中亦可直接見之．觀圖 8.3，可知 n 無論如何大，若 ξ 與 1 相去甚近時，其 $f_n(\xi)$ 與 1 相差甚微，因之不能謂其接近於 $f(\xi)=0$ 也．

假如
$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$$
在 $x=1$ 及 $x=-1$ 鄰近之情形亦復相似，讀者可參閱 §1.6.2 所論，細考而自得之．

［例二］　觀上述兩例，可知收斂之不勻，似與極限之不連續有關．然亦有連續函數向連續極限收斂而其斂仍爲不勻者．如假定在變程 $0\leqq x\leqq 1$ 中有一函數：

$$f_n(x)=xn^{\alpha},\qquad 0\leqq x\leqq\frac{1}{n},$$

$$f_n(x)=\left(\frac{2}{n}-x\right)n^{\alpha},\qquad \frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{2}{n},$$

$$f_n(x)=0,\qquad \frac{2}{n}\leqq x\leqq 1,$$

其中 $n\geqq 2$，而 α 爲一任意確定之正數．試標繪其圖形，則得種種折線，形似屋頂者，聳立於 $0\leqq x\leqq\frac{2}{n}$ 之上，而在 $x=\frac{2}{n}$ 之右，則與橫軸相合，觀圖 8.5 自明．苟 $\alpha<1$，則其頂之高爲 $n^{\alpha-1}$ 自隨 $n\to\infty$ 而趨於 0．由是以觀，此種折線逐漸接近於橫軸，而 $f_n(x)$ 則勻斂於 $f(x)=0$．

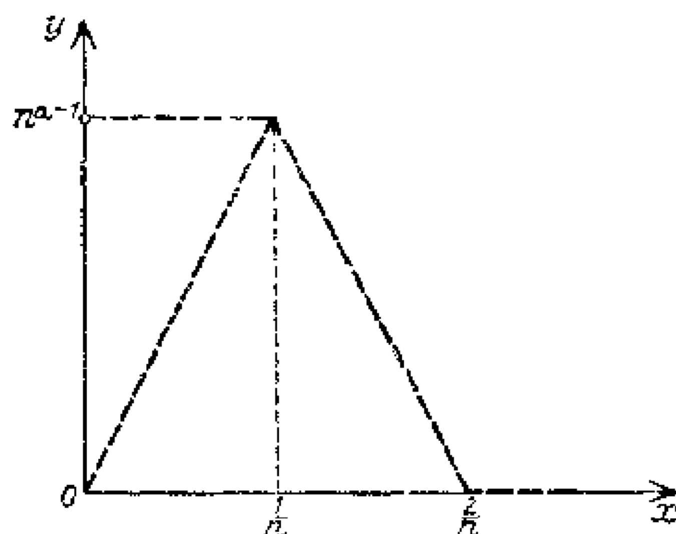


圖3.5

更就$a\geqq1$觀之.苟$a=1$,則其頂之高,不論n為何如,均等於1.當$a>1$時,其頂之高將隨$n\to\infty$而無限趨大.惟無論如何,其頂必隨$n\to\infty$而左移,於是對於x之為正數者,必可令n如是大,使$\frac{2}{n}<x$,故有$f_n(x)=0$,至於$x=0$時,$f_n(x)$本為0,由是知$f_1(x),f_2(x),\cdots$實斂於$f(x)=0$.然欲在$a\geqq1$條件下求得一如是大之n,足致$|f(x)-f_n(x)|=f_n(x)$處處小於$\frac{1}{2}$者爲不可能之事.

[例三] 與前例頗相似者爲

$$f_n(x)=xn^a e^{-nx},$$

其中a亦假定爲一確定正數.因e^{-nx}隨$n\to\infty$趨0之數量級大於$\frac{1}{n}$之任何冪,故x爲正數時必有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$;至$x=0$時,既有$f_n(0)=0$,由是知$a$若爲任何正數,當$x$在$0\leqq x\leqq a$中變化時$f_n(x)$必斂於$f(x)=0$.惟其斂之不勻,不難見之.蓋在$x=\frac{1}{n}$(即$f_n(x)$有其大值之點)既有

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^{a-1}}{e},$$

從而知$f_n(x)$在$a\geqq1$時高聳於$x=\frac{1}{n}$點如圖3.6所示,且其高未能隨$n\to\infty$而趨0.故不

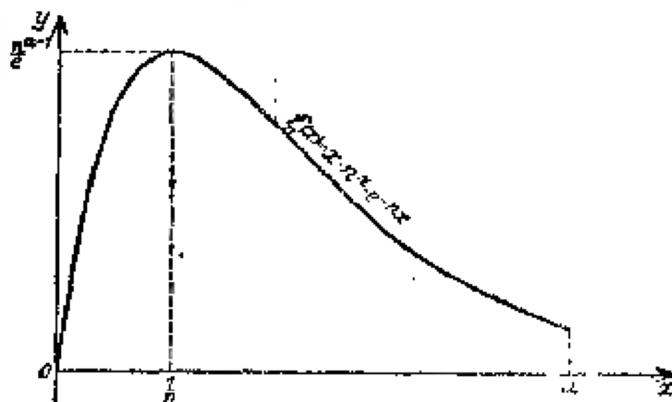


圖3.6

論 n 如何大，在 $x=\frac{1}{n}$ 或在其鄰近必有如是之 x，其上之 $f_n(x)-f(x)=r_n(x)>\frac{1}{2e}$，其斂之不勻，由是可以想見矣.

［例四］ 級數之收斂，亦有勻與不勻之別．一級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

收斂之勻否，當觀其最前 n 項之和 $f_n(x)$ 而定；倘後者勻斂，則前者亦稱之為勻斂，否則為不勻．例如

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}+\cdots$$

之收斂即為不勻．何以言之？當 $x=0$ 時，不論 n 為任何正整數，$f_n(x)=x^2+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 皆等於0，是以 $f(0)=0$. 若 $x\neq 0$，此級數當為一幾何級數．其前後每二緊接項之比據檢比法為 $\frac{1}{1+x^2}<1$，故必斂於 $\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$.

因此之故，此級數之極限除在原點為 $f(0)=0$ 外為 $f(x)=1+x^2$，故在原點實有一間斷點也.

明乎是，乃知此級數在任何含有原點之線段內必無勻斂之可能．蓋 $x=0$ 時，$f(x)-f_n(x)=r_n(x)$ 始終為0；若 $x\neq 0$，則 $r_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$．欲求此 $r_n(x)$ 小於 $\frac{1}{2}$，必令 n 相當大，惟 n 無論如何大，但令 x 接近於0，又足致 $r_n(x)$ 大於 $\frac{1}{2}$．故在此自無勻斂可言．試圖示之，其理愈顯．觀圖 8.7，可見 $f_n(x)$ 之圖形除在原點 $x=0$ 外，皆隨 $n\to\infty$ 而逐漸趨近於

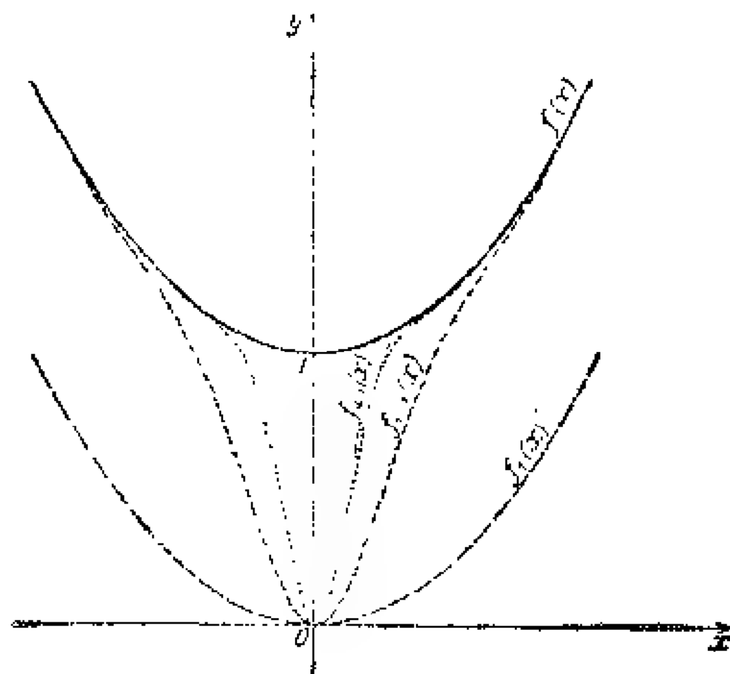


圖 8.7

$y=1+x^2$，惟在原點鄰近，向原點伸下，其伸下部分又隨 $n\to\infty$ 而接近於豎直縱軸之介於原點及 $y=1$ 點之間者．故就 $f_n(x)$ 所斂之極限曲線而言，為一拋物線 $y=1+x^2$，又附帶一直線，自 $x=0$，$y=1$ 點沿縱軸豎直向下訖於原點，觀圖 8.7，可以瞭然．因其有一線段豎直於橫軸，於是在其所斂之極限 $f(x)$ 中乃有一間斷點可見，亦勢使然也．

最後吾人舉一級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$，其中 $g_\nu(x)$ 在 $0\leqq x\leqq 1$ 中當 $\nu=0$ 時為 $g_0(x)=1$，$\nu\geqq 1$ 時為 $g_\nu(x)=x^\nu-x^{\nu-1}$ 如是則其最前 n 項之和 $f_n(x)$ 即為 x^ν，如例一所述者，故其收斂之不勻，可以概見

8.3.3. 勻斂之條件

勻斂現象，觀於上述各例，已可概見．要而言之，設有一斂級數

$$g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+\cdots,$$

其所斂極限為 $f(x)$，苟吾人在其變化全程中，無論何處，取其中最前 n 項之和，但令 n 相當大，皆足致其接近於 $f(x)$ 之誤差小於任意指定之 ε 者，則其斂謂之勻斂．精言之，**假定 $g_1(x)+g_2(x)+\cdots$ 在規定變程中之每一點均斂於 $f(x)$，其最前 n 項之和以 $f_n(x)=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)$ 表之，其 n 項以後之餘項以 $R_n(x)$**

$$R_n(x)=f(x)-f_n(x)$$

表之．如是則所謂勻斂性，其義如下：試任意指定一正數 ε，必有一 N 存在，一僅隨 ε 而變，不因 x 而異之 N，凡 n 之大於 N 者，皆足致 $|R_n(x)|=|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 在 x 無論如何變化時（在規定變程中）**均能成立．**更就 Cauchy 審斂法言之，勻斂之必要與充分條件無他，**任意選擇一 ε 之後，必有一 N 可求，僅隨 ε 而變，不因 x 而異者，當 n 及 m 大於 N 時，足致 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ 在規定變程中處處成立而已．**

以上就級數之勻斂論之．若有一函數序 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 勻斂於 $f(x)$，其意即 $|f(x)-f_n(x)|$ 在其規定變程中處處小於 ε，但令 n 相當大可已．其必要與充分條件為：必有一 N 存在，凡 m 及 n 之大於 N 者皆足致 $|f_n(x)-f_m(x)|$ 在其變程中處處小於任意選定之 ε，其中 N 僅隨 ε 而變，不因 x 而異者．

欲審定匀斂,有一法殊覺簡便可用,其言曰:**苟一級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$ 中各項均滿足 $|g_\nu(x)|\leqq a_\nu$,其中 a_ν 爲常數而 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 爲一斂級數者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$ 必匀斂(自亦絕對收斂)**。蓋由

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} g_\nu(x)\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{m} |g_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu,$$

因 $\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu$ 在 n 及 $m>n$ 趨大時爲任意小之故而可以推斷之也。循是以言,吾人如能獲得一常數所組成之斂級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$,如 $|g_\nu(x)|\leqq a_\nu$ 者,則 $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$ 之匀斂,從可知矣。

例如幾何級數 $1+x+x^2+\cdots$,其中 x 之變値限於 $|x|\leqq q$,q 假定爲小於 1 之一正數,必匀斂無疑,蓋其各項之絕對值皆小於一斂級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ 之相當項故也。

復次,試觀下列級數

$$\frac{c_1\sin(x-\delta_1)}{1^2}+\frac{c_2\sin(x-\delta_2)}{2^2}+\frac{c_3\sin(x-\delta_3)}{3^2}+\cdots$$

假定 $|c_n|<c$,其中 c 爲一常數,與 n 無關者。因

$$g_n(x)=\frac{c_n\sin(x-\delta_n)}{n^2},\quad 故\quad |g_n(x)|<\frac{c}{n^2},$$

之故,其匀斂及絕對收斂乃得由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^2}$ 推知之。

8.3.4. 匀斂級數之特性

級數之匀斂者,論其性質,較尋常斂級數爲簡明,且與有盡級數頗多相似之處;緣此之故,在解析學中乃佔一重要地位。如有盡個連續函數之和復爲一連續函數,吾人已知之矣;與此極相似者,則有下列關於匀斂級數之定理:

連續函數所組成之級數,苟其在規定變程中匀斂於一極限,則其極限亦爲一連續函數。

此理之證明,殊爲易易。將

$$f(x)=g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+\cdots$$

分爲最前 n 項之和 $f_n(x)=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)$ 及其餘項 R_n,則據匀斂之義,試選擇一任意小之正數 ε,必可求得如是大之 n,足致

其餘項 $R_n(x)$ 在 x 之變化全程中均小於 $\frac{\varepsilon}{4}$. 因此若以 x 及 $x+h$ 表其變程中之任何兩值,必更有

$$\left|R_n(x+h)-R_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立無疑. 惟考 $f_n(x)$, 既爲有盡個連續函數之和, 必爲一連續函數, 換言之,不論 x 爲變程中之任何一點,必有一 δ 可尋,當 $|h|<\delta$, 且 x 及 $x+h$ 同屬於變程中時,必有

$$\left|f_n(x+h)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

明乎是,遂有

$$|f(x+h)-f(x)|=|f_n(x+h)-f_n(x)+R_n(x+h)-R_n(x)|$$
$$\leqq|f_n(x+h)-f_n(x)|+|R_n(x+h)-R_n(x)|<\varepsilon,$$

是卽 $f(x)$ 連續之謂,故欲證之理,已在於是.

吾人試一回憶前段中所論之例,凡連續函數所組成之級數,苟其斂不勻者,其所斂極限未必爲一連續函數,卽可從而知此定理之重要爲何如矣. 自此理得證之後,復可知所斂極限苟有一間斷點, 則在此間斷點鄰近,其斂必不能勻. 據是以論, 吾人得將一具有間斷點之函數由連續函數所組成之級數表而達之,但令其斂在間斷點鄰近之不勻可矣.

此外復有一重要特性, 爲勻斂級數及有盡級數所共有者. 據前所述,欲將有盡個函數相加後求其積分,可分別先求各函數之積分而後加之,結果必相等, 是卽所謂**逐項求積分**[1]. 級數之勻斂者亦有此特性, 換言之,如欲求其和之積分,可逐項求之. 設 $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)=f(x)$ **在一規定變程中有勻斂性, 假定 a 及 x 爲其變程中任何兩值, 則不論 x 如何變化, a 爲任何固定之數**, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^x g_\nu(t)dt$ **必勻斂於** $\int_a^x f(t)dt$.

此理可證之如下:因

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)=f_n(x)+R_n(x),$$

既假定其勻斂性,而其中各項又可假定爲連續函數,故據上所述, $f(x)$

[1] term-by-term integration; gliedweise Integration.

亦必連續．因之亦可求其積分．設 ε 為任何正數，自可覓得一如是大之 N，當 n 大於 N 時足致 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 在變程中任何一點 x 均能成立．於是據積分之第一中值定理，乃有

$$\int_a^x |f(t)-f_n(t)|dt<\varepsilon l,$$

其中 l 為積分變程之長．惟 $f_n(x)$ 為有盡個函數之和，自可逐項求積分，從而得知

$$\left|\int_a^x f(t)dt-\sum_1^n\int_a^x g_\nu(t)dt\right|<\varepsilon l.$$

由是令 $n\to\infty$，則 ε 隨之而任意小，吾人欲證之理已在是矣．

明乎上述之理，復可應用之以論函數序．設有一函數序如 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots$ 勻斂於其極限 $f(x)$，假定 a 及 b 為其勻斂變程中任何兩點，則必有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

由是以觀求積分與求極限在勻斂條件下可互易先後而其結果不變．

此事在十九世紀以前皆認為當然無足深論．其實不然．試觀§8.3.2所述例二，其極限之積分為0，而 $f_n(x)$ 由0至1之定積分(即圖8.5中三角形之面積)為

$$\int_0^1 f_n(x)dx=n^{\alpha-2},$$

在 $\alpha\geqq 2$ 時自不趨於0．由是知 $\int_0^1 f(x)dx$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 之不同，實由於其收斂之不勻也．

然假定 α 為小於2，不小於1之一數：$1\leqq\alpha<2$，則其斂雖不勻，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$ 未始不能成立．復考 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(x)$，其中 $g_n(x)$ 當 $n=0$ 時為 $g_0(x)=1$，當 $n\geqq 1$ 時為 $g_n(x)=x^n-x^{n-1}$，雖其斂不勻，未始不可逐項求積分．故勻斂者，為逐項求積分之充分條件而非必要條件，可以見矣．

8.3.5. 無盡級數之導數問題

更進而論求導數之可能性，其情形有深足注意者．試觀 $f_n(x)=\dfrac{\sin n^2x}{n}$，雖勻斂於 $f(x)=0$，然其導數 $f_n'(x)=n\cos n^2x$ 未能處處斂於 $f'(x)=0$，但觀 $x=0$ 一點即知．**故在勻斂之條件下，求導數與求極限固未可互易先後也**．復就無盡級數論之，如

$$\sin x+\frac{\sin 2^4 x}{2^2}+\frac{\sin 3^4 x}{3^2}+\cdots,$$

因其中每項之絕對值較一斂級數 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 之相當項爲小，故必勻斂無疑(亦必絕對收斂).然逐項求其導數：

$$\cos x+2^2\cos 2^4 x+3^2\cos 3^4 x+\cdots,$$

竟得一散級數，蓋此級數在 $x=0$ 之發散顯然可見也.

然則一無盡級數果在何種條件下始能逐項求導數？吾人對此問題未能有普遍之解決；所可據爲推理者，僅下列定理而已：

苟將一斂級數 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}G_\nu(x)=F(x)$ 逐項求導數，從而得一連續函數所組成之級數，勻斂於 $f(x)$ 者，即 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(x)=f(x)$，則 $f(x)$ 必爲 $F(x)$ 之導數. 蓋在 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(x)=f(x)$ 勻斂之假定下，可逐項求積分而得

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(t)\right)dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_a^x g_\nu(t)dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}[G_\nu(x)-G_\nu(a)]=F(x)-F(a).$$

此關係既在勻斂變程中任何 x 點均能成立，即可從而推知 $f(x)=F'(x)$，是即欲證之理.由是以論，已爲一無盡級數逐項求得導數，則如是求得之級數，必更證其有勻斂性而後可；反觀逐項求積分之條件，前後判然不同矣.

例　　題

1.試與常數所組成之級數比較，以定下列級數在所示變程中之勻斂性：

(a) $x-x^2+x^3-x^4+\cdots$, $\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$.

(b) $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{8}\sqrt{1-x^8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\sqrt{1-x^{2n}}+\cdots$,

$(-1\leqq x\leqq 1)$.

(c) $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2}+\cdots$

(d) $e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}+\cdots$, $(-2\leqq x\leqq -1)$.

2.試證 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，其中 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$，$-1\leqq x\leqq 1$.並證其爲不勻收斂.

3.*(a)試求 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，其中 $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$，$-1\leqq x\leqq 1$.並證其爲不勻收斂，但

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx \neq \int_{-1}^{1}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

(b)試討論函數序 $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+nx^2}$ 關於收斂、連續及逐項積分之性質.

4.試草繪曲線 $y=f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$，$-2\leqq x\leqq 2$，令 $n=1,3,10$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，並證其爲不勻收斂.

5.試示 $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\nu)^2}$ 在任何固定之變程 $a\leqq x\leqq b$ 中爲勻斂.

6.試示在變程 $0\leqq x\leqq\pi$ 中下列函數序爲收斂，但非勻斂：

(a)$\sqrt[n]{\sin x}$.　　(b)$(\sin x)^n$.　　(c)$\sqrt[n]{x\sin x}$.

(d)$[f(x)]^n$，其中 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f(0)=1$.

(e)$\sqrt[n]{f(x)}$，其中 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f(0)=1$.

7.設函數序 $f_n(x)$，$n=1,2,\cdots$ 在變程 $0\leqq x\leqq 1$ 中係由下列方程式所規定：

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}.$$

(a)試證在此變程中，$f_n(x)$ 向一連續極限收斂.

(b)*試證其爲勻斂.

8.*設 $f_0(x)$ 在變程 $0\leqq x\leqq a$ 中爲連續，而函數序 $f_n(x)$ 有如下之定義：

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,\ n=1,2,\cdots$$

試證在變程 $0\leqq x\leqq a$ 中，此函數序勻斂於 0.

9.試草繪曲線 $x^{2n}+y^{2n}=1$，令 $n=1,2,4$. 問 $n\to\infty$ 時，此等曲線趨何極限？

10.*設 $f_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，爲在變程 $a\leqq x\leqq b$ 中有連續導數之函數序. 若 $f_n(x)$ 在變程之稠點上均爲收斂，而不等式 $|f'_n(x)|<M$（此處 M 爲一常數）又於 n 及 x 之一切值均很滿足者，則其收斂也必勻；試證之.

第四節　冪級數

無盡級數中之最重要者，莫如冪級數. 冪級數者，爲如下形式之級數：

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu,$$

其中各項爲 x 之冪；或

$$P(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(x-x_0)^\nu,$$

其項爲 $(x-x_0)$ 之冪，其中 x_0 假定爲一固定之數．若以 $\xi=x-x_0$ 作新變數，此級數可化爲 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$．故吾人研討冪級數，可限於 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ 之形式．

在第六章中討論函數之展開問題時，已知有所謂 Taylor 級數者，卽爲冪級數之一例．在本節中擬將前節之普遍理論應用於冪級數，藉以考驗其特性．

8.4.1. 冪級數之收斂性

冪級數有除 $x=0$ 一點外無處收斂者，如

$$x+2^2x^2+3^3x^3+\cdots+n^nx^n+\cdots,$$

蓋 $x\neq 0$，則必有一整數 N 者如 $|x|>\frac{1}{N}$，於是當 $n>N$ 時，其中各項 n^nx^n 之絕對值皆大於 1，且隨 $n\to\infty$ 而無限制趨大也．亦有 x 之值無論如何變化，無不收斂者，如

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

蓋第 $n+1$ 項除以第 n 項之商爲 $\frac{x}{n}$，故不論 x 爲何如，必隨 $n\to\infty$ 而趨 0，於是據檢比法而可知其收斂也．

然則冪級數何時收斂，何時發散，必設法審定之而後可．欲解決此問題，有下列重要定理：**苟一冪級數 $P(x)$ 在 $x=\xi$ 時收斂，則在 x 之滿足 $|x|<|\xi|$ 者必絕對收斂，且在變程 $|x|\leqq\eta$ 中，假定 η 爲任何小於 $|\xi|$ 之正數，必有勻斂性．**何以言之？旣假定 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$ 之收斂，其項必隨 $n\to\infty$ 而趨於0，如是自更不能超過一與 ν 無關之上涯 M，換言之，$|c_\nu\xi^\nu|<M$．試以 q 表一小於 1 之正分數，卽 $0<q<1$，專就 x 之滿足 $|x|\leqq q|\xi|$ 者言之，必有 $|c_\nu x^\nu|\leqq|c_\nu\xi^\nu|q^\nu<Mq^\nu$．於是在此變程中，$\sum\limits_{0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ 中各項絕對值皆小於 $\sum Mq^\nu$ 各項之值，而 $\sum Mq^\nu$ 爲一幾何級數之收斂者，故 $\sum c_\nu x^\nu$ 在 $-q|\xi|\leqq x\leqq q|\xi|$ 之勻斂及絕對收斂，遂得證矣．

明乎是，可知一冪級數苟不處處收斂，卽在 $x=\xi$ 如有發散性，則在 x 之滿足 $|x|>|\xi|$ 者亦必發散無疑．何則，倘其收斂，則因 $|\xi|<|x|$ 之故，

據上述之理，亦將在 $x=\xi$ 收斂，是與假定牴牾矣。

據是以論，冪級數除其處處收斂或處處發散而僅 $x=0$ 時收斂者為兩種特殊情形暫置不論外，皆有一確定斂程[1]之可言；意即必有一確定之正數① ρ 存在，在 $|x|>\rho$ 時為發散，在 $|x|<\rho$ 時為收斂者。由 ρ 之大小，可明其收斂之範圍，惟在 $|x|=\rho$ 時，其斂否不可決定。此義既明，吾人可將上舉兩種特殊情形包括於此，謂級數之僅在 $x=0$ 收斂者，其 ρ 為 0，其處處收斂者，其 ρ 為 ∞ 可也。

例如幾何級數 $1+x+x^2+x^3+\cdots$，考其斂程，知 $\rho=1$，惟在斂程之兩端，不復收斂。他如

$$\operatorname{arc\,tan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$$

之 $\rho=1$，且在此斂程之兩端，即 $x=\pm 1$ 依然收斂，蓋由 §8.1.2 所述之 Leibniz 定理可以知之也。

8.4.2. 冪級數之積分與導數

冪級數既在其斂程之內勻斂於一極限

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

則據前所論，**自可逐項求其積分**，從而得

$$F(x)=c+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1},$$

其中 c 為一任意常數，而兩者之和必滿足

$$F'(x)=f(x).$$

復因 $\left|\frac{c_\nu}{\nu+1}\right|\leq|c_\nu|$ 在 ν 為任何正整數時均能成立，可知求積分後所得級數較原有級數收斂更速也。

復次，吾人得將一冪級數在其斂程之內逐項求導數，蓋如是獲得之

$$f'(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu c_\nu x^{\nu-1}$$

---

(1) interval of convergence; intervalle de convergence; Konvergenzstrecke.

① ρ 可由級數之係數規定。蓋 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ 如存在，則 ρ 為：

$$\rho=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

否則 $\rho=\dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$，其中 $\overline{\lim}$ 係表示最大聚點，如第一章附錄中所述者。

在原有斂程內亦有勻斂性.試以 ξ 表一數,與 ρ 甚近,且 $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$ 有斂性者,如是則一切 $|c_\nu \xi^\nu|$ 自不能超過一與 ν 無關之上涯 M.由是以論,必有 $|c_\nu \xi^{\nu-1}| < \dfrac{M}{|\xi|} = N$.復以 q 表一小於1之正分數: $0<q<1$,並就 x 之滿足 $|x| \leqq q|\xi|$ 者而細考之,可見在此變程之中,$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1}$ 中各項必不大於 $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu c_\nu q^{\nu-1} \xi^{\nu-1}|$ 之各項,而後者各項復小於 $\sum_{\nu=1}^{\infty} N\nu\, q^{\nu-1}$ 之各項.然一考此級數中第 $n+1$ 項與第 n 項之比為 $\dfrac{n+1}{n}q$,故隨 $n\to\infty$ 而趨於 q.因 $0<q<1$ 之故,欲證之勻斂性,即可由是以識之.於是據§8.3.5所證之理,可知 $\sum \nu c_\nu x^{\nu-1}$ 所趨之極限即為 $f(x)$ 之導數,而冪級數在其斂程中得逐項求導數,至是遂得一根據.

明乎上述之理,又可應用於

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1},$$

逐項求導數而得 $$f''(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) c_\nu x^{\nu-2},$$

依此類推,更可求其高重導數.由是以觀,**任何函數之由冪級數表達之者可在其斂程中任意求高重導數,且可逐項求得之**①**也**.

8.4.3. 冪級數之運算

觀於前段所論,乃知冪級數之所以特殊重要,自有其原因可溯.冪級數之性質,簡單明晰,無以復加,故運算之時,幾與多項式無異.如欲將兩冪級數相加相減,但將其中同次冪之係數相加相減即得.又如欲將一冪級數乘以一常數,但將其中各項乘以該常數可矣.諸如此類,在原則上固與多項式無甚差異可言也.不啻唯是,設有兩冪級數如

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,$$

①其第 k 重導數為 $f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1) c_\nu x^{\nu-k}$ 或簡寫如

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} c_\nu x^{\nu-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu}{k} c_{\nu+k} x^\nu.$$

欲相乘而求其積，其法與多項式相乘亦無異．蓋其積在其公共斂程之內為一收斂冪級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$，其係數為

$$c_0 = a_0 b_0,$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

讀者可參閱本章附錄，在此不復贅證．

8.4.4. 用冪級數表達之唯一性

設有兩冪級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ 及 $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$，在含有原點 $x=0$ 之斂程中同斂於一函數 $f(x)$，則吾人可證其為同一級數，即 $a_n = b_n$．此事在冪級數理論中甚為重要；精言之，**一函數 $f(x)$ 若可以用 x 之冪級數表達之者，僅有唯一冪級數表達之**；是即所謂冪級數表達之**唯一性**[1]．欲證其理，但注意兩冪級數之差 $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$，即其係數為 $c_\nu = a_\nu - b_\nu$ 者必表達

$$\phi(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

換言之，在其斂程中處處斂於0．故在 $x=0$ 時，其和亦為0，因之 $c_0 = 0$，是即 $a_0 = b_0$ 之意．試更在其斂程之內，逐項求導數，則有

$\phi'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1}$，惟此 $\phi'(x)$ 在其斂程中處處為 0，故在 $x=0$ 時復有 $c_1 = 0$，從而知 $a_1 = b_1$．依此類推，乃知 n 無論為何正整數，必有 $a_n = b_n$，是即欲證之理．

明乎此理，即可據之以定 $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ 之係數果為何如．試在其斂程中逐項求導數，求之又求，直至第 n 重導數後，令 $x=0$，即可獲得

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0),$$

然此實為 Taylor 級數之係數．由是以論，**任何冪級數之不僅在 $x=0$ 收斂，此外僅有一確定斂程者，必為其所斂函數之 Taylor 級數**．故用以

(1) uniqueness; Eindeutigkeit.

表達 $f(x)$ 之冪級數，苟其有表達之可能者，惟有其 Taylor 級數而已. 然則所謂表達之唯一性，即其係數完全由 $f(x)$ 本身決定之意耳.

第五節 再論函數之展開

冪級數在其斂程之內可用以表達連續函數之任意連續可導者（意即其一切高重導數亦均連續者），觀於以上所論，已瞭然無餘蘊矣.細考其意，實與函數展開之問題相對峙.欲將一函數展開爲一冪級數，已有 Taylor 定理可據，惟在實際上欲計算其 n 重導數，更估計其餘項，其事甚繁.於是擬利用前段之理，創所謂**待定係數法**(1)者以簡化之，其法如下：欲展開 $f(x)$，先令 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$，其中 c_k 爲未知係數，據 $f(x)$ 之特性而規定之；待 c_k 一一規定之後，考其級數是否收斂.苟其果有一確定斂程，則必有一極限，然後證此極限即爲 $f(x)$.於是據表達之唯一性，知唯有此收斂級數可用以表達 $f(x)$，而 $f(x)$ 之展開，至是始告成功.特舉數例於後，藉明其用.

〔例一〕 指數函數 在此所欲求者爲一函數 $f(x)$，滿足 $f'(x)=f(x)$ 及 $f(0)=1$ 兩條件；試令

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

以此條件規定其中之未知係數 $c_0,c_1,c_2\cdots$.先逐項求導數，得

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots,$$

故要求 $f(x)=f'(x)$，無異欲求 $n\geqq 1$ 時

$$nc_n=c_{n-1}$$

之成立.復因 $f(0)=1$，故必 $c_0=1$ 而後可.由是遂得

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

然後用檢比法，可知此級數在 x 無論如何變化時均有收斂性，故其斂於一 $f(x)$，具有 $f'(x)=f(x)$ 及 $f(0)=1$ 之特性者，無疑義矣.

現欲證者，此 $f(x)$ 即爲 e^x 而決非其他函數.試令 $\phi(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，求其導數，則有

(1) method of undetermined coefficients; méthode des coefficients indeterminées; Methode der unbestimmten Koeffizienten.

$$\varphi'(x)=\frac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{e^{2x}}=0.$$

由是知$\varphi(x)$必爲一常數,復因$\varphi(0)=1$之故,可知此常數必爲1.準是以論,上列級數爲唯一表達e^x之級數,換言之,爲e^x之Taylor級數,可以無疑.

〔例二〕 二項式級數 二項式級數,前已論及之.茲用待定係數法以展開$f(x)=(1+x)^{\alpha}$,

先令
$$f(x)=(1+x)^{\alpha}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

其中c_k爲待定之係數.惟考$f(x)$之性質,實滿足

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha c_k x^k;$$

復將$f(x)$之級數逐項求導數後乘以$(1+x)$,即得

$$(1+x)f'(x)=c_1+(2c_2+c_1)x+(3c_3+2c_2)x^2+\cdots.$$

由是知

$$\alpha c_0=c_1,\quad \alpha c_1=2c_2+c_1,\quad \alpha c_2=3c_3+2c_2,\quad \cdots.$$

惟因$f(0)=1$之故,可知$c_0=1$;於是各係數一一規定如

$$c_1=\alpha,\quad c_2=\frac{(\alpha-1)\alpha}{2!},\quad c_3=\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha}{3!},\quad \cdots,$$

其形式可由

$$c_k=\frac{(\alpha-k+1)(\alpha-k+2)\cdots(\alpha-1)\alpha}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}=\binom{\alpha}{k}$$

包括盡之.現所欲證者,此級數$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$之收斂性,及其所斂函數確爲$(1+x)^{\alpha}$而已.

應用檢比法,可知α若非正整數,則此級數在$|x|<1$時爲收斂,在$|x|>1$時爲發散,因其第$n+1$項與第n項之比爲$\frac{\alpha-n+1}{n}x$,其絕對值在$n\to\infty$時趨於$|x|$也.由是以觀,在$|x|<1$時,此級數必爲斂於$f(x)$,滿足$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$及$f(0)=1$兩條件者,而此兩條件適足以保障$f(x)$之必爲$(1+x)^{\alpha}$,蓋令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}},$$

其導數$\varphi'(x)$爲 $$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^{\alpha}f'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}}=0,$$

復因$\varphi(0)=1$,可斷定$f(x)\equiv(1+x)^{\alpha}$也.由是知

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,$$

即所謂二項式級數是矣.

茲特舉實用上時常遇見之二項式級數數種於後,藉備考查.如$\alpha=-1$,即得一幾何級數:

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k.$$

如 $\alpha=-2$, 則

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

是亦可由幾何級數逐項求導數而得之者. 復次,若 $\alpha=\frac{1}{2}$,或 $\alpha=-\frac{1}{2}$,則有

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+-\cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-+\cdots.$$

［例三］ arc sin x 之級數 試將 $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ 視作二項式級數而展開之,則有

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\cdots,$$

此級數在 $|t|<1$ 時必收斂,故在 $|t|\leqq q<1$ 必爲均斂. 因此吾人得逐項求其自 0 至 x 之積分,從而得知

$$\text{arc}\sin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots.$$

應用檢比法,可知此級數在 $|x|<1$ 必收斂,在 $|x|>1$ 必發散. 又此級數若應用 Taylor 定理求之,必不若是之簡捷,可想見也.

［例四］ $\text{ar}\sinh x=\log[x+\sqrt{1+x^2}]$ 之級數 處理例三之法亦可應用於此. 先據二項式級數之公式,展開 ar sinh x 之導數如

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+-\cdots,$$

而後逐項求積分,即得

$$\text{ar}\sinh x=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-+\cdots,$$

其斂程爲 $-1\leqq x\leqq 1$.

［例五］ 級數相乘 欲展開 $\frac{\log(1+x)}{1+x}$,可將

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots$$

與

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+-\cdots$$

相乘,而得

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+-\cdots.$$

考其斂輻，實爲 $|x|<1$. 是爲級數稍深之一佳例.

［例六］ 橢圓積分 前在§5·3·2中，已知有所謂橢圓積分者

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad (k^2<1).$$

欲求其值，可據二項式級數公式展開 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ 如.

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\phi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\phi+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\phi+\cdots.$$

考其中 $k^2\sin^2\phi$ 無論如何不能大於 k^2，故此級數在 ϕ 爲任何值時均有均斂性. 因此可逐項求積分而得

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi d\phi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\phi d\phi+\cdots.$$

由是知

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right].$$

以上僅就其最淺顯重要之函數而展開之，藉以明待定係數法之用常較直接應用 Taylor 定理爲簡捷. 如是之例，言之甚多，讀者可於本章附錄或例題中求之.

例 題

試爲下列冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 定其斂輻，其中係數 a_n 爲

1. $\frac{1}{n}$.
2. n.
3. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
4. $\sqrt{n}$.
5. $\frac{1}{n^2}$.
6. $\frac{n}{n!}$.
7. $\frac{1}{a+n}$.
8. $\frac{1}{an+b}$.
9. $\frac{1}{\log(n+1)}$.
10. $\frac{1}{\log\log 10n}$.
11. $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
12. a^n.
13. $2^{\sqrt{n}}$.
14. $2^{\log n}$.
15. $(\sqrt[n]{n}-1)^n$.
16. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
17. $\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$.
18. $\frac{1}{1+a^n}$.
19. $\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}$.
20. $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

試將下列函數(21－26)展開爲冪級數：

21. a^x.
22. $\frac{x+\log(1-x)}{x^2}$.
23. $\sin^2x$.

24. $\cos^2 x$.　　25. $\sin^3 x$.　　26. $\arcsin x^3$.

27. 應用二項式級數,算$\sqrt{[illegible]}$至小數四位.

28. 試將被積函數展開爲冪級數而逐項積分之,以求下列積分之近似值:

(a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.　　(c) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx$.

(b) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.　　(d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$.

29. 試藉冪級數之相乘求下列各函數之展開式至含 x^4 之項:

(a) $e^x \sin x$.　　(c) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $[\log(1+x)]^2$.　　(d) $\sin^2 x$.

30. *試藉冪級數之相乘,證

(a) $e^x e^y = e^{x+y}$　　(b) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

31. 設冪級數 $\Sigma a_n x^n$ 之斂程爲 $|x|<\rho$, $\Sigma b_n x^n$ 之斂程爲 $|x|<\rho'$, 其中 $\rho<\rho'$, 問 $\Sigma(a_n+b_n)x^n$ 之斂程爲何?

32. 用待定係數法,試求滿足下列條件之函數 $f(x)$:

(a) $f(0)=3$;　　(b) $f'(x)=f(x)+x$.

第六節　複變數函數理論一瞥

8.6.1. 複數略說

初步微積分學所研討之函數,皆爲實變數函數,其變數在實數之變程中變化者.苟其變程包羅複數(1)於其中,從而創建複變數函數之微積分學,未始非理論前途之一新蹊徑;惟其計劃浩大,非本書所能詳論.然複數之應用,在代數學中既爲必要之事,在其他科學中殊無避免之理,故大勢所趨,當視複數爲實數之必然擴張,實數爲複數之特殊情形而後可.所謂複數 c,爲兩實數 a 及 b 所聯成:$c=a+bi$,可以運算(加減乘除),且其運算法則與實數運算之法則完全相同者,讀者已知其詳,無待贅述.茲欲講明者,爲其幾何意義,並由是推演之重要關係數則,藉備應

(1)complex number; nombre complexe, komplexe Zahl.

用而已．

吾人常將複數 $c=x+iy$ 由平面中一點 P，其橫坐標爲 x，縱坐標爲 y 者，表而達之．或用極坐標 r,θ，則因 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 之故，複數 c 之形式可化爲

$$c=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

其中 θ 爲正橫軸與矢徑 OP 所成之角，稱之爲複數 c 之**幅角**[1]；而 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 爲 P 點與原點相去之距離，稱之爲複數 c 之**絕對值**，常以 $|c|$ 表之．所謂 $c=x+iy$ 之**共軛複數**[2] $\bar{c}=x-iy$ 爲一如是之複數，與 c 有相等之絕對值，而其幅角爲 $-\theta$ 者．於是 $|c|=r$ 乃得由下式表出之：

$$r^2=|c|^2=c\bar{c}=x^2+y^2.$$

根據上述表達法，兩複數 $c=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 及 $c'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ 相乘之積遂有如下化簡形式：

$$c\cdot c'=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')].$$

復據正弦餘弦之相加定理，得知

$$c\cdot c'=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')],$$

故欲將兩複數相乘，但將其絕對值相乘，幅角相加可矣．令上式中 $r=r'=1$，從而獲得之關係

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'),$$

常稱之爲 De Moivre 定理．由是推廣，可知

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

其中 n 爲任何正整數．試將此式左方依二項式定理展開，復將實數與虛數分離，則 $\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$ 即可由 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之冪表而達之．又此關係可利用之以求 $x^n=1$ 之解，得其 n 個根如

(1)amplitude (of the complex number); argument, Zur komplexen Zahl gehörigen Winkel oder Arcus.　(2)conjugate complex number, nombre conjugué(complexe); konjugiert komplexe Zahlen.

$$\varepsilon_1=\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\quad \varepsilon_2=\varepsilon^2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\ \cdots,$$

$$\varepsilon_{n-1}=\varepsilon^{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n},\quad \varepsilon_n=\varepsilon^n=1.$$

8.6.2. 冪級數之由複數組成者

前所論述之各種冪級數皆爲實數或實變數所組成，因之其收斂者皆斂於實數或實變數函數.其間有一事最足令人注意者，貌似無甚關係之函數展開爲冪級數之後，其組織頗多類似者；其所以然之故殊難索解.昔 Euler 獨憑其慧覺，神悟其間之關係，其意謂當包羅複數於變程之中，令 x 取得複數或虛數值，則其間純粹形式上之關係，即可以發見.此事在理論上之根據暫置不論，吾人不妨從 Euler 之後，一考其成效爲何如.

試就 e^x 所展開之級數言之，許其中 x 爲一虛數 $i\phi$(ϕ 爲一實數)，代入之後，將實項虛項分離，則有

$$e^{i\phi}=\left(1-\frac{\phi^2}{2!}+\frac{\phi^4}{4!}-\frac{\phi^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\phi-\frac{\phi^3}{3!}+\frac{\phi^5}{5!}-\cdots\right)$$

或 $$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi,$$

是即所謂 Euler 公式.考其意義，自與前證之 De Moivre 定理：

$$(\cos\phi+i\sin\phi)(\cos\psi+i\sin\psi)=\cos(\phi+\psi)+i\sin(\phi+\psi)$$

相符.此公式如由 Euler 公式表達之，無異謂下列指數函數之關係

$$e^x\cdot e^y=e^{x+y}$$

在 x 及 y 爲虛數時依然有效也.

復次，若就 $\cos x$ 之級數中，令 x 代以 ix，即得 $\cosh x$ 之級數，故有

$$\cosh x=\cos ix,$$

繼此更有 $$\sinh x=\frac{1}{i}\sin ix.$$

據 Euler 公式，既知 $e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$，從而得知指數函數與三角函數間之關係爲

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

明乎是,試與雙曲函數之公式

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

並觀而比較之，其間關係為 $\cosh x=\cos ix$, $\sinh x=\frac{1}{i}\sin ix$，更昭然矣．至於 $\tan x$, $\tanh x$, $\cot x$, $\coth x$ 間，有 $\tanh x=\frac{1}{i}\tan ix$ 及 $\coth x=i\cot ix$ 之成立,讀者可依法求之．又三角及雙曲函數之逆函數間,亦有關係可尋．例如由

$$y=\tan x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}=\frac{e^{2ix}-1}{i(e^{2ix}+1)},$$

可知
$$e^{2ix}=\frac{1+iy}{1-iy}.$$

更求兩方之對數,復將 y 改寫為 x、x 改寫為 $\arctan x$，即得

$$\arctan x=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}.$$

然據第六章第一節所論，知 $\operatorname{ar\,tanh} x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$．遂得 $i\arctan x=\operatorname{ar\,tanh} ix$．試令 $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ 中之 x 為 ix,其結果確為 $\arctan x$ 之級數：

$$\arctan x=\frac{1}{i}\left[ix+\frac{(ix)^3}{3}+\frac{(ix)^5}{5}+\cdots\right]$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\cdots.$$

以上係專就形式上計算得之．其結果殊堪注意，惟其根據尚付闕如．然則其在理論上之根據果為何如,當於下段中略及之．

吾人在本書下章中所欲應用者，僅 Euler 公式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ 而已．此公式專就其形式言之,可視 $e^{i\varphi}$ 為 $\cos\varphi+i\sin\varphi$ 之一種縮寫符號，於是 De Moivre 公式 $e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}=e^{i(\varphi+\psi)}$ 遂為三角函數加法定理之必然結論．故純粹由形式觀點立論,欲求 $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$ 在複數變程內之有效,必立一定義,謂 x 為複數 $x=\xi+i\eta$ 時,所謂 e^x，其意乃

$$e^x=e^\xi(\cos\eta+i\sin\eta),$$

此僅可作為定義觀之,未可視為推理之結果也．

8.6.3. 關於複冪級數之一定理

欲創建複變數函數之理論,必先對複變數之義,及複數變程中之所謂極限者有精確之規定,其事可依實變數之先例,加以應有擴張而次第實現之.自極限概念既定之後,複冪級數之斂散亦有意義可言.所謂複冪級數者,為複變數之冪及複數係數所組成之冪級數.論其斂性,則有如下定理,其實即為第四節所述定理之擴張,其言曰: **苟一複冪級數在 $x=\xi$ 時有收斂性,則在 x 之滿足 $|x|<|\xi|$ 者必絕對收斂; 反之,苟其在 $x=\xi$ 有發散性,則在 x 之滿足 $|x|>|\xi|$ 時必發散.復次,苟一複冪級數不能處處收斂,但除 $x=0$ 外能在其他之點收斂者必有一確定斂程,在此為一斂圓[1],換言之,必有一正數 ρ,在 $|x|<\rho$ 時為收斂,在 $|x|>\rho$ 時為發散.其斂圓之半徑得由級數之係數明確決定之.無論何種複冪級數,在其斂圓之內,必可用以表達一連續之複變函數(且有連續導數者).**

此理之證明雖不甚難,惟在此不得不從略.自是以後,吾人乃得創立各種複變函數,從而研討其特性.如將 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\cdots$ 之級數,其中 x 本為實數者,改令為複變數,如是所得之複冪級數在其斂圓中即可作為複變函數之定義,所謂 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\cdots$ 其中 x 為複變數者,乃得隨之而定.於是以複冪級數之理論為基礎,可為複變函數建立一圓滿之微積分學,豈不偉歟!

更返觀上段所述各種關係,由此新理論之立場觀之,皆根於精密理論之推演,不徒為形式計算之結果;故其所以然之故,可以闡發無餘矣.

茲舉兩例以明複變函數之功用為何如.據前所述,$\dfrac{1}{1-x^2}$ 及 $\log(1-x)$ 之級數在 $x=1$ 時不能收斂,其故由於此兩函數在 $x\to1$ 時無限制趨大,理甚明顯,無待縷述.若一觀 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 及 $\arctan x$ 之級數,在其斂程 $-1\leqq x\leqq1$ 之兩端忽失其斂性,初不明其所以然,蓋此兩函數在此連續如故,且其一切導數亦無不連續也.吾人苟令 x 為一複變數,則 $\arctan x$ 之級數及 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ 在 $|x|\geqq1$ 之所以發散即可以大明.何

(1)circle of convergence; cercle de convergence; Konvergenzkreis.

則，$x=i$ 時，其和無限制趨大，故不能由一收斂級數表而達之．復據上述關於斂圓之定理，其級數在 $|x|\geq 1$ 時必發散無疑；若以 x 為實變數，則其在 $-1\leqq x\leqq 1$ 外之不斂，亦理有固然也．

復觀第三及第六章附錄中所述之

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad x\neq 0,$$
$$f(0)=0,$$

雖無何種特殊性質，惟不能展開為 Taylor 級數，前已論及之．苟令 x 之變程，擴張至複變數，令 $x=i\xi$，可見 $e^{\frac{1}{\xi^2}}$ 若 $\xi\to 0$ 時無限制趨大；故在其鄰近不能由一收斂級數表達之故，實在乎此也．

微積分學之理論，因複變數之引用而得透徹闡發者甚多，本書僅能舉其要點；欲論其詳，當求之專書．

第八章附錄

第一節　級數之相乘相除

A8.1.1.　絕對收斂級數之相乘

設
$$A=\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad B=\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

為兩絕對收斂之級數，其絕對值所組成之級數分別以

$$\bar{A}=\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \qquad \bar{B}=\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$$

表之．又以
$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k,$$
$$\bar{A}_n=\sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad \bar{B}_n=\sum_{k=0}^{n} |b_k|$$

表上述各級數中最前 n 項之和，而以 c_n 表

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0.$$

吾人所欲證者，為 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ 之收斂，及其收斂於 AB 耳．

欲證此理，可設想 A_n 與 B_n，及 $\bar{A}_n$ 與 $\bar{B}_n$ 相乘之結果：

$$A_nB_n=a_0b_0+a_1b_0+a_0b_1+a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$

$$\overline{A}_n\overline{B}_n=|a_0||b_0|+|a_1||b_0|+|a_0||b_1|+|a_1||b_1|+\cdots+|a_n||b_n|;$$

由是令 $n\to\infty$，即於其右方獲得兩級數，其一由 a_kb_μ，其他由 $|a_k||b_\mu|$ 所組成者.惟考後一級數中諸項 $|a_k||b_\mu|$ 既不能爲負數，則其最前 n 項之和必有獨升性，復因 $\overline{A}_n\leqq\overline{A}$，$\overline{B}_n\leqq\overline{B}$ 之故，又不能超過 $\overline{A}\overline{B}$，故其收斂且斂於 $\overline{A}\overline{B}$，可以斷言．明乎是，乃知前一級數之絕對收斂，至其必斂於 AB，自無待論.因其絕對收斂之故，吾人可任意將其中各項易位；然一考 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k$ 之組織，實由此前一級數中之項易位並加括號①而得之，

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots,$$

故欲證之理，已在是矣.

A8.1.2. 冪級數之相乘相除

吾人應用前段所證之理可以推斷兩冪級數

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$$

相乘之結果，在兩者之公共斂程中必可由一冪級數 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 表而達之，其係數 c_k 爲：

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0.$$

更進而論兩冪級數相除之道；如欲將 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 除以 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 之結果由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_kx^k$ 表而出之，必假定其分母之常數項 b_0 不等於0而後可(倘爲0，則其分母在 $x=0$ 時爲0，自無收斂可能，而任何 x 之冪級數在 $x=0$ 皆爲收斂也)．苟其不等於0，則 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_kx^k$ 之係數可由

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_kx^k\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$——規定如下：

$$a_0=q_0b_0,$$

$$a_1=q_0b_1+q_1b_0,$$

$$a_2=q_0b_2+q_1b_1+q_2b_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k=q_0b_k+q_1b_{k-1}+\cdots+q_kb_0.$$

---

①對於一斂級數，吾人可任意將連續各項括爲一項而不變其收斂性或所斂極限，蓋設所括諸項爲 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m)$，直是將 $s_{n+1}, s_{n+2},\cdots s_{m-1}$ 均略而不計耳.

如是獲得之 $\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ 在其分母不等於0，分子分母同時收斂之處必有收斂性，爲篇幅所限，不復詳議.

第二節　關於指數函數之極限

A8.2.1. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ 之勻斂性

前論指數函數時，已知 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 在 $n\to\infty$ 時趨於 e^x. 茲欲講明者，其趨於 e^x，在任何變程 $0\leqq x\leqq a$ 中，假定 a 爲任何正數者，實有勻斂性.何以言之?試考

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}\to e$$

之意義，無異謂指定一任意小之正數 δ 後，必有一相當小之正數 k 可尋，當 $0<h\leqq k$ 時，足致

$$e(1-\delta)<(1+h)^{\frac{1}{h}}<e(1+\delta)$$

之成立.惟在 $h=\frac{x}{n}$ 時，則有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=(1+h)^{\frac{x}{h}}=\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^x,$$

若令 $\frac{a}{n}=k$，則 k 僅隨 n 及 a 而變，與 x 之變無關，且隨 $n\to\infty$ 而趨於 0; 如是在其變化全程中無論如何，就 x 之滿足 $\frac{x}{n}=h\leqq k$ 者而言，試任意選擇一 δ，如 $0<\delta<1$，但令 n 相當大，如大於 $N(\delta)$，必足致

$$e(1-\delta)<(1-h)^{\frac{1}{h}}<e(1+\delta)$$

之成立.由是以觀，不論 $x=nh$ 在變程中所處地位何如，必有

$$e^x(1-\delta)^x\leqq(1+h)^{\frac{x}{h}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq e^x(1+\delta)^x.$$

惟在 $0\leqq x\leqq a$ 中復有

$$(1+\delta)^x\leqq(1+\delta)^a,$$

$$(1-\delta)^x\geqq(1-\delta)^a,$$

從而知　$$e^x(1-\delta)^a\leqq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq e^x(1+\delta)^a,$$

或　$$e^x[(1-\delta)^a-1]\leqq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\leqq e^x[(1+\delta)^a-1],\quad n>N(\delta)$$

因$(1+\delta)^a$及$(1-\delta)^a$在δ相當小時與1甚近，而e^x在$0\leqq x\leqq a$時又復有涯，故任擇一無論如何小之正數δ，不論x在$0\leqq x\leqq a$如何變化，必有一$N(\delta)$存在，當$n>N(\delta)$時足致$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|$之任意小，是即$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$在$0\leqq x\leqq a$中勻斂於$e^x$之謂．據同理，可以證$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$勻斂於$e^{-x}$，茲不縷述．

自上述勻斂性得證之後，吾人乃得由

$$\int_0^x\left(1+\frac{t}{n}\right)^n dt=\frac{n}{n+1}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}-1\right],$$

據§8.3.4所論，在積分符號下令$n\to\infty$，從而得知

$$\int_0^x e^t\,dt=e^x-1,$$

是即指數函數之積分公式也．

A.8.2.2 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$之證明．

據§4.3.4所論之Wallis公式，既知

$$J_n=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx=\sqrt{\pi}\,\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\to\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

若應用交替式，$u=\sin x$，則因$\cos x\,dx=du$，可化為

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1(1-u^2)^n du=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

復令$u=\frac{t}{\sqrt{n}}$，則有　$J_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt\to\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

試以A表一固定正數，小於$\sqrt{n}$者，則J_n可寫如

$$J_n=K_A+R_n,$$

其中K_A及R_n之意為

$$K_A=\int_0^A\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt,\quad R_n=\int_A^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

復次，吾人不難證明　$1-\alpha<e^{-\alpha}$

在$\alpha>0$時之成立，蓋據導數之中值定理，必有

$$e^{-\alpha}-1=e^{-\alpha}-e^0=-\alpha e^{-\theta\alpha}>-\alpha$$

故也．據此，令$\alpha=\frac{t^2}{n}(\leqq1)$，則有

$$1-\frac{t^2}{n}<e^{-\frac{t^2}{n}} \quad 或 \quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n<e^{-t^2}.$$

假定 $A>1$，則當 $t>A$ 時，必有 $e^{-t^2}<e^{-t}$．如是即可設法估定 R_n 的值如下：

$$0<R_n<\int_A^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt<\int_A^{\sqrt{n}} e^{-t}dt=e^{-A}-e^{-\sqrt{n}}.$$

由是知 $0<R_n<e^{-A}$．然後令 $n\to\infty$，因§46.2.1所證之勻斂性，可知 K_A 必斂於 $\int_0^A e^{-t^2}dt$，於是即得

$$0\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\int_0^A e^{-t^2}dt=\lim_{n\to\infty}(J_n-K_A)=\lim_{n\to\infty}R_n\leqq e^{-A}$$

復令 $A<\sqrt{n}$（A 曾假定爲固定，此後令其隨 n 而趨大）隨 n 而無限制趨大，則 e^{-A} 將隨之而趨於0，由是遂知

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

是即欲證之理．惟 e^{-t^2} 既爲一偶函數，此關係亦可寫如

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

第三節　無盡級數與旁義積分

旁義積分，前在第四章中已詳論之；自無盡級數理論成立之後，其理更得一新闡明．茲就旁義積分之積分變程爲無限者言之．設有 $\int_0^\infty f(x)dx$，其積分變程可設想由一無限制獨升之數序 $x_0=0$，x_1，x_2，$\cdots$ 分裂之，於是

$$\int_0^\infty f(x)dx=a_1+a_2+\cdots,$$

其中 a_1，a_2，$\cdots$ 之意爲

$$a_1=\int_0^{x_1}f(x)dx,\quad a_2=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx,\quad \cdots$$

而 x_1，x_2，$\cdots$ 之選擇，可任意爲之．由是見一收斂之旁義積分可用種種不同方法歸併於一無盡級數也．爲研討之便，可選擇 x_ν，使 $f(x)$ 在每一分段中始終爲正或始終爲負．於是 $\int_0^\infty |f(x)|dx$ 可歸於一無盡級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|$，爲由 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 各項之絕對值所組成者．惟如是，一收斂之旁義積分

得有絕對、相對之別；若$\int_0^\infty |f(x)|dx$果能存在，則$\int_0^\infty f(x)dx$之收斂謂之絕對，否則，$\int_0^\infty f(x)dx$如能收斂，其收斂謂之相對.

例如 $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx$

之收斂爲絕對.而 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx$

之收斂爲相對. 試以$x_\nu=\nu\pi(\nu=0,1,2,\cdots\mu_A)$諸點，其中$\mu_A$爲滿足$\mu_A\pi\leqq A$之最大整數者，將自0至$A$之線段分裂之，則$\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx$之形式可化爲$a_\nu=\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

$(\nu=1,2,\cdots)$諸積分之和，更加一餘項R_A： $R_A=\int_{\mu_A\pi}^{A}\frac{\sin x}{x}dx$, $(0\leqq A-\mu_A\pi<\pi)$.

惟各a_ν必交爲正負，蓋$\sin x$在每兩緊接之歷程中交爲正負，故表達此積分之級數實爲一交錯級數. 復次，吾人不難證明$|a_{\nu+1}|<|a_\nu|$之成立；何則，試應用一新變數ξ如$x=\xi-\pi$，則

$$|a_\nu|=\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{|\sin(\xi-\pi)|}{\xi-\pi}d\xi$$
$$=\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{|\sin\xi|}{\xi-\pi}d\xi>\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{|\sin\xi|}{\xi}d\xi=|a_{\nu+1}|.$$

由是根據§8.1.2所述之Leibniz定理，可知Σa_ν之收斂. 更就其餘項R_A觀之：

$$|R_A|=\left|\int_{\mu_A\pi}^{A}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqq\int_{\mu_A\pi}^{(\mu_A+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\leqq\frac{1}{\mu_A\pi}\int_{\mu_A\pi}^{(\mu_A+1)\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\mu_A\pi},$$

知其必隨$A\to\infty$而趨於0. 故令$A\to\infty$，則由

$$\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx=a_1+a_2+\cdots+a_{\mu_A}+R_A,$$

可知其右方趨於Σa_ν，而左方之收斂遂得證矣. 惟其收斂顯非絕對，因

$$|a_\nu|>\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}\frac{|\sin x|}{\nu\pi}dx=\frac{2}{\nu\pi}$$

之故，$\Sigma|a_\nu|$固爲發散也.

第四節 無盡乘積

與無盡級數有密切關係者，有所謂無盡乘積，以累次相乘法，近似表達一極限，已於本章引論中略及之. 前在§4.3.4，已得其一例：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

即所謂Wallis乘積，將$\frac{\pi}{2}$由一無盡乘積表達之者. 所謂無盡乘積

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots,$$

者,其值即爲下列數序(最前 n 項之乘積):

$$a_1,\quad a_1\cdot a_2,\quad a_1\cdot a_2\cdot a_3,\quad a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4,\quad \cdots,$$

在 $n\to\infty$ 時之極限而已(假定其極限果能存在).惟其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 得爲 x 之函數,因此之故,苟其乘積斂於一極限,其極限亦必爲 x 之函數.如

$$\sin\pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots$$

即爲其一例,吾人將於下章中討論之.

在整數理論中,有所謂 ζ 函數之無盡乘積式,請略述之.試以 s 表自變數,藉求與整數理論中所習用之符號相符,則 ζ 函數在 $s>1$ 時之定義爲

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

此級數在 $s>1$ 時之收斂,吾人前已證之.若 p 爲大於 1 之一數,則據幾何級數必有

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots,$$

令 p 爲一切素數,並依其大小次序代入於此,然後將其結果一一相乘,則左方爲一乘積如

$$\frac{1}{1-p_1^{-s}}\cdot\frac{1}{1-p_2^{-s}}\cdot\cdots,$$

而右方各級數相乘(其事之可能,在此不詳論).復注意任何整數 n 之大於 1 者,得以唯一方法析爲素數之乘積,即可見其結果即爲 $\zeta(s)$,於是得

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-p_1^{-s}}\cdot\frac{1}{1-p_2^{-s}}\cdot\frac{1}{1-p_3^{-s}}\cdots,$$

是必爲一無盡乘積,蓋素數之多無盡,吾人固早已知之矣.

討論無盡乘積時,苟其所趨極限爲 0,吾人常認爲一種特殊情形而除外之.因此之故,必假定 a_n 中無一爲 0.欲求其乘積之收斂,必其因數 a_n 在 $n\to\infty$ 時趨於 1 而後可,故不妨假定 $a_n>0$.於是有下列必要與充分條件,可決定其收斂性;**條件無他,$\sum_{k=1}^{\infty}\log a_k$ 之收斂而已.** 蓋 $\sum_{k=1}^{n}\log a_k=\log(a_1a_2\cdots a_n)$ 有一極限之必要與充分條件即爲 $a_1a_2\cdots a_n$ 斂於一正數故也.

復次,若 $a_k=1+\alpha_k$,其收斂與否可用下法(爲一充分條件)審定

之,其言曰:苟 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ 有收斂性,而 $(1+\alpha_k)$ 各數中無一爲 0,則 $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ 必能收斂.欲證其理,可假定在必要時將其中有盡項置諸不論外,其 $|\alpha_k|$ 皆小於 $\frac{1}{2}$:$|\alpha_k|<\frac{1}{2}$.如是即有 $1-|\alpha_k|>\frac{1}{2}$.復據導數中值定理,知必有 θ 如 $0<\theta<1$ 者,滿足 $\log(1+h)=\log(1+h)-\log 1=h\frac{1}{1+\theta h}$,因此之故,遂得

$$\left|\log(1+\alpha_k)\right|=\left|\frac{\alpha_k}{1+\theta\alpha_k}\right|\leqq\frac{|\alpha_k|}{1-|\alpha_k|}\leqq 2|\alpha_k|;$$

由是知 $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\alpha_k)$ 之收斂性可由 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ 推斷之,而欲證之理,即在是矣.

根據適所證明之理,可知上列 $\sin\pi x$ 之無盡乘積,除 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 時其因數爲0置諸不論外,在 x 無論如何變化時皆有收斂性.復次,若 $p\geqq2, s>1$,則

$$\frac{1}{1-p^{-s}}=1+\frac{1}{p^s-1},\quad 0<\frac{1}{p^s-1}<\frac{2}{p^s}$$

當 p 取得一切素數時,$\Sigma\frac{1}{p^s}$ 之收斂,可以斷言,蓋此僅爲收斂級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ 之一部分而已.$\Pi\frac{1}{1-p^{-s}}$ 在 $s>1$ 時之收斂,於是得證.

第五節 無盡級數舉例

A8·5·1. 函數展開舉例

根據本章所論特定係數法,得將下列各函數展開:

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\cdots,\tag{1}$$

$$(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{x^6}{3}+\cdots,\tag{2}$$

$$\cos(\mu\arcsin x)=1-\frac{\mu^2}{2!}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!}x^4-\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{6!}x^6+\cdots,\tag{3}$$

求(3)之導數,更得

$$\frac{\sin(\mu\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\mu}{1!}x-\frac{\mu(\mu^2-2^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{5!}x^5-\cdots,$$

復次,

$$\sin(\mu\arcsin x)=\frac{\mu}{1!}x-\frac{\mu(\mu^2-1^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{5!}x^5-\cdots+\cdots,\tag{4}$$

由是逐項求導數，則有

$$\frac{\cos(\mu\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{\mu^2-1}{2!}x^2+\frac{(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{4!}x^4-\cdots+\cdots$$

以上各級數在 $|x|<1$ 均有收斂性，若將 x 以 $\sin\phi$ 代之，則 $\cos\mu\phi$ 及 $\sin\mu\phi$ 得展開為 $\sin\phi$ 之冪級數，而此兩冪級數在 μ 為整數時，當為多項式，亦可注意之事也。

以上各級數均由待定係數法可以求得之，其法無他，將欲展開之函數 $y=f(x)$ 試令等於一冪級數 $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$，其中 c_k 由 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 之性質，以微分方程式之條件規定之。然後詳考冪級數有如是規定之係數者果有無收斂性；若其收斂於一函數 $\phi(x)$，當證明此 $\phi(x)$ 即為 $f(x)$。所謂待定係數法，其大要步驟，如是而已。

試就級數(1)言之。在此所欲展開者，為 $y=f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$。因此，$y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$，故必求 $y'(1-x^2)-xy-1=0$ 及 $f(0)=0$ 兩條件之成立，藉以規定 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 中之係數。試將 $\sum c_kx^k$ 代入於此，將其左方依其冪之次數整理之，則上述條件無異欲要求下列冪級數

$$(c_1-1)+(2c_2-c_0)x+(3c_3-2c_1)x^2+\cdots+[(k+2)c_{k+2}-(k+1)c_k]x^{k+1}+\cdots$$

不論 x 如何變化時均等於 0，故其係數必一一為 0 而後可，由是 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 皆得賴以確定。復因 $f(0)=0$，故必 $c_0=0$，由是即得 $c_0=c_2=c_4=\cdots=0$，而

$$c_1=1,\ c_3=\frac{2}{3},\ c_5=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5},\ c_7=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7},\ \cdots.$$

於是遂有

$$\phi(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\cdots,$$

其在 $|x|<1$ 之收斂可由檢比法直接審定之。至於 $\phi(x)$ 即為 $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，可證之如下：既知 $\phi(x)$ 滿足 $\phi(0)=0$ 及 $(1-x^2)\phi'(x)-x\phi(x)-1=0$ 兩條件（因其中係數為此兩條件所規定之故），復令 $u(x)=\sqrt{1-x^2}\,\phi(x)$，若其導數 u' 為 $u'(x)=\sqrt{1-x^2}\,\phi'-\frac{x\phi}{\sqrt{1-x^2}}$，從而知 u 必滿足 $u(0)=0$ 及 $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，由是即得 $u(x)=u(0)+\arcsin x=\arcsin x$，故　$\phi(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，同時其展開式皆得證矣。復因 $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\arcsin x)^2$ 之故，級數(2)可由(1)逐項求其自 0 至 x 之積分而證明之。

更就級數(3)論之，在此所欲展開者為 $f(x)=\cos(\mu\arcsin x)$；由是知

$$f'(x)=-\frac{\mu}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\mu\arcsin x),$$

故 $$(1-x^2)f'^2(x)=\mu^2[1-f^2(x)];$$

再求其導數，並將其中 $2f'(x)$ 棄去，即得

$$(1-x^2)f''-xf'+\mu^2 f=0;$$

除此條件外，復有 $f(0)=1$ 及 $f'(0)=0$ 兩條件，為 $f(x)$ 所滿足者．倒論之，凡滿足此三條件之 $f(x)$ 必為 $f(x)=\cos(\mu\arc\sin x)$．何以言之？由上列微分方程，乘以 $2f'(x)$，

得 $$2(1-x^2)f'f''-2xf'^2+2\mu^2 ff'=0,$$

或寫如 $$\frac{d}{dx}[(1-x^2)f'^2-\mu^2(1-f^2)]=0;$$

求其積分，得 $(1-x^2)f'^2-\mu^2(1-f^2)=$ 常數，而此常數因 $f'(0)=0$，$f(0)=1$ 之故，必為 0 無疑，因之遂有 $(1-x^2)f'^2-\mu^2(1-f^2)=0$．復輸入一新變數 t，與 x 之交替式為 $\cos t=f(x)$ 或 $t=\arc\cos f(x)$ 者，此式可化為 $(1-x^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2-\mu^2=0$．由是求積分，復注意 $f(0)=1$ 即 $t(0)=0$，即有 $t(x)=\pm\mu\arc\sin x$ 或 $f(x)=\cos(\mu\arc\sin x)$，是即欲證之理．明乎是，吾人可將 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ 代入於 $(1-x^2)f''-xf'+\mu^2 f=0$，從而規定其中係數，即得下列各式：

$$2c_2+\mu^2 c_0=0,$$

$$3\cdot2c_3+(\mu^2-1^2)c_1=0,$$

$$4\cdot3c_4+(\mu^2-2^2)c_2=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+(\mu^2-n^2)c_n=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由上各式，同時注意 $c_0=1$ 及 $c_1=0$，即可依次獲得 $c_{2m-1}=0$，$c_0=1$，$c_2=-\frac{\mu^2}{2}$，$c_4=\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!}$，$\cdots$，如是即得級數(3)，其在 $|x|<1$ 之收斂自為檢比法應有之結果．復據前證之理，可以推斷其所收之極限必為 $\cos(\mu\arc\sin x)$ 無疑．

至於級數 (4)，亦可依此求之，其用以規定係數之微分方程式與此相同，但注意條件 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=\mu$ 可矣．

A8.5.2. 級數中有 Bernoulli 數出現者

綜觀以上所論，有甚可注意之一事，即極淺近之函數中，尚有未論其展開式者，如 $\tan x$ 即其一例．考其原因，實由其中係數組織不甚簡明之故．但此等係數常可藉所謂 Bernoulli 數者而表達之．Bernoulli 數為有理數，由有理算法產生之，惟其組織法則較繁，不可一望而知．欲

論其究竟,可先將下列函數:

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots}$$

展開爲一冪級數:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k;$$

或寫如

$$x=(e^x-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k,$$

並將 e^x-1 之冪級數代入於其右方，即得一遞歸公式以計算 B_k，是即 Bernoulli 數．茲列舉其最前者於下，其中下標爲奇數者除 $k=1$ 外皆等於0:

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},$$

$$B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},\quad \cdots$$

至其在實際上果在何處出現,爲篇幅所限,不能詳述,讀者當求之專書①. 在此所欲提示者,僅下列數點而已.據

$$1+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}},$$

可知

$$\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k};$$

若令其中 x 代以 $2x$,則有

$$x\coth x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k};$$

更在 $|x|<\pi$ 時,將 x 代以 $-ix$,即得

$$x\cot x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k},\qquad |x|<\pi$$

由是復據 $2\cot 2x=\cot x-\tan x$, 可知在 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 時必有

$$\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1},$$

故在此種函數之展開中,有 Bernoulli 數之出現也.

例　題

1. 試證 $\sqrt{1-x}$ 之冪級數在 $x=1$ 時仍爲收斂.

2. 試證任與一正數 ε，必有一 x 之多項式可在變程 $0\leqq x\leqq 1$ 中代表 $\sqrt{1-x}$ 而誤差小於 ε.

①如 K. Knopp: Theory and Application of Infinite Series, p.183.

3.試證任與一正數ε，必有一t之多項式可在變程 $-1\leqq t\leqq 1$ 中代表 $|t|$ 而誤差小於 ε.

4.* Weierstrass 近似定理.設在 $a\leqq x\leqq b$ 中 $f(x)$ 爲連續，則任與一正數 ε，必有一多項式 $P(x)$ 存在，能使變程 $a\leqq x\leqq b$ 中之一切 x 值均滿足 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ 之關係，試證之.

5.試證下列無盡乘積均爲收斂:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right];\quad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1};\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^n}{n}\right),\quad |z|<1.$$

6.試以本書所用之方法證 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 爲發散.

7.應用恆等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_i^{-s}}\right)\quad(\text{其中 } p_i \text{ 爲第 } i \text{ 個素數}),$$

試證素數之個數爲無盡.

8.試證恆等式

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu})=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

第九章 Fourier 級數淺論

無盡級數在理論上最重要，應用上除已述之冪級數之後，有所謂 Fourier 級數，是為無盡級數之一種，其項為三角函數所組成，而其所斂之極限為週期函數(1)．

第一節 論週期函數

9.1.1. 週期函數之特性

自然現象經一確定時間週而復始者，如汽機中飛輪之旋轉，發電機所生之交流，皆得由時間之週期函數表而達之．他如各種振動或波動現象亦無不與週期函數有關．

週期函數之週期為 $2l$ 者，不論 x 如何變化，**為滿足具有下列關係**

$$f(x+2l)=f(x)$$

之函數，其中 $2l$，即以函數之週期稱之①．由乎是，可知其週期不僅為 $2l$，他如 $4l$ 亦為其週期，蓋 $f(x+4l)=f(x+2l)=f(x)$ 故也．循是以推，又必有週期 $6l, 8l, \cdots$；復按其定義，本無不可有（雖不必有）小於 $2l$ 之週期如 l 或 $\frac{l}{5}$．由幾何言之，其圖形在每兩緊接之隣程中，長各 $2l$ 者，必完全同形，故繪其由 x 至 $x+2l$ 之一段，其餘即可由是移動得之．復次，吾人為討論之便，常令 x 之意義為時間（因之常不用 x 而用 t），於是此週期函數得用以描寫循環或振動現象，而 $2l=T$ 即稱之為振動之週期．

苟在一確定變程如 $-l \leqq x \leqq l$ 中有一函數 $f(x)$，吾人常可延拓之於此變程之外，使其由全程言之，為一週期函數．何則，如以 n 表一整數，將 $f(x)$ 之在 $-l \leqq x \leqq l$ 以外者由 $f(x+2nl)=f(x)$ 規定之，如是則

---

(1) periodic function; fonction périodique; periodische Funktion.

①討論週期函數時，可將 x 由圓周上之點表達之，代替以直線上之點表達為便．如是則 $f(x+2\pi)=f(x)$ 之週期性，即謂圓周上每一點必有一確定函數值與之相應之意．

$f(x)$ 連同其延拓於原有變程之外者合而觀之，自爲一週期函數矣．惟 $f(x)$ 在 $-l\leqq x\leqq l$ 如有連續性，而 $f(-l)$ 與 $f(l)$ 之值未嘗相等，則如是延拓而得之函數在 $\pm l$，$\pm 3l$，$\cdots$ 等處未能連續，且無單值性可言，蓋 $f(3l)$ 既爲 $f(l+2l)$，卽 $f(3l)=f(l)$，而又規定爲 $f(-l+4l)$ 卽 $f(3l)=f(-l)$，故在同一 $x=3l$ 點有兩不等之值．欲避免此種困難，可將 $f(x)$ 在 $-l\leqq x\leqq l$ 之左端或右端之值卽 $f(-l)$ 或 $f(l)$，置而不論，但就 $f(x)$ 之在 $-l<x\leqq l$ 或 $-l\leqq x<l$ 者延拓之可矣．明乎是理，乃知函數之週期性不可視爲一種特殊情形，而其他函數，反可包羅於週期函數之中而研討之也．

週期函數有一重要特性，可由下式表而出之：

$$\int_{-l-a}^{l-a}f(x)dx=\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

其意卽任何週期函數之定積分當其積分變程之長適爲其週期 $T=2l$ 時，不論其變程所處地位如何，必有一不變之值．欲證此，可令 $x=\xi-2l$，復注意 $f(\xi-2l)=f(\xi)$，則

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha+2l}^{\beta+2l}f(\xi)d\xi=\int_{\alpha+2l}^{\beta+2l}f(x)dx,$$

故在 $\alpha=-l-a$，又 $\beta=-l$ 時必有

$$\int_{-l-a}^{-l}f(x)dx=\int_{l-a}^{l}f(x)dx,$$

由是知

$$\int_{-l-a}^{l-a}f(x)dx=\int_{-l-a}^{-l}f(x)dx+\int_{-l}^{l-a}f(x)dx$$

$$=\int_{l-a}^{l}f(x)dx+\int_{-l}^{l-a}f(x)dx=\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

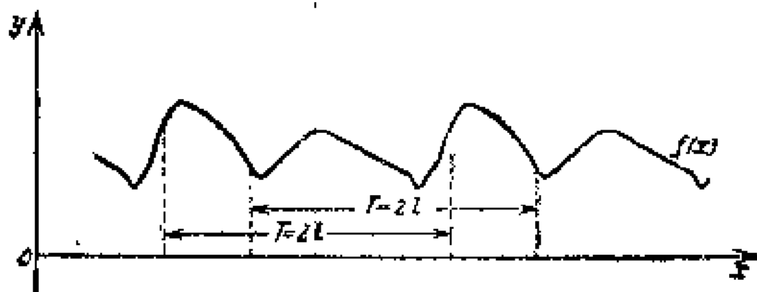


圖 9.1

是即欲證之理．試一考其幾何意義，觀於圖 9.1，其理固顯然可見也．

週期函數可視爲其他較簡之週期函數集合而成．週期函數之最簡者莫如$a\sin\omega x$及$a\cos\omega x$或較此略普遍之①$a\sin\omega(x-\xi)$及$a\cos\omega(x-\xi)$，其中$a(>0)$，$\omega(>0)$及ξ均爲常數．此種函數所描寫之現象謂之**諧振動或正弦振動**，其週期爲$T=\frac{2\pi}{\omega}$；ω常稱之爲振動之**角頻率**(1)，因$\frac{1}{T}$爲其頻率，即每一時間單位內所作振動之次數，則ω爲在時間2π內振動之次數②．又a稱之爲振動之振幅，即$a\sin\omega(x-\xi)$或$a\cos\omega(x-\xi)$之最大值，蓋正弦餘弦均不能大於 1 也．復次，$\omega(x-\xi)$常稱之爲**振動週相**或稱爲**週相**(2)，$\omega\xi$爲**週相位移**(3)．

由其圖表言之，欲標繪此種函數，但將正弦曲線依 $1:\omega$ 比例沿橫軸伸長，復依 $a:1$ 沿縱軸伸長之，然後依橫軸之正向移動一距離 ξ 可矣，觀圖 9.2，可以見之．

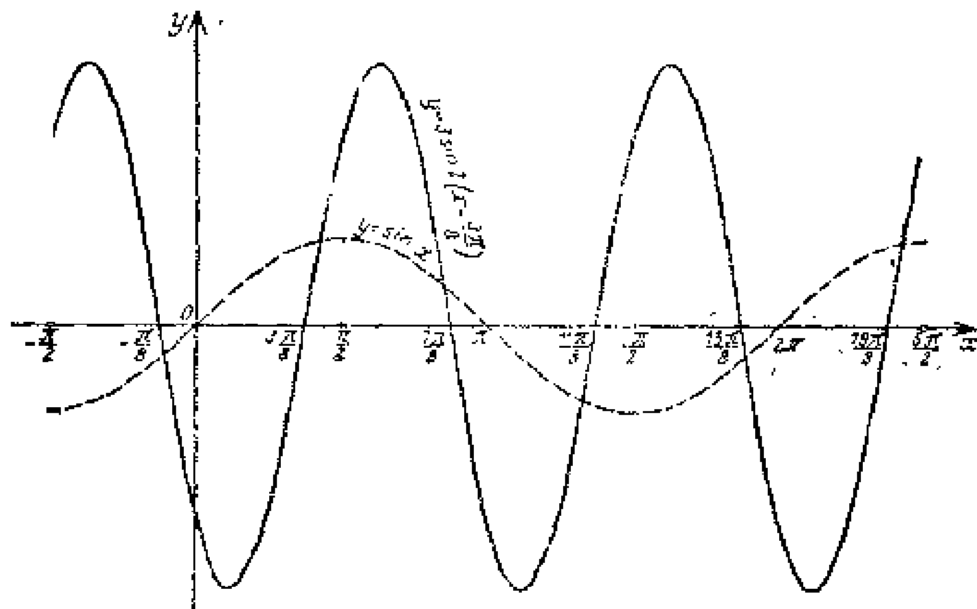


圖 9.2

據正弦餘弦之相加定理，可知上述諧振動得以如下形式分別表達之：

$$\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x \text{ 及 } \beta\cos\omega x-\alpha\sin\omega x,$$

①兩式中任何一式（不論a及ξ之值爲何如）可用以表達諧振動．又兩式實彼此相等，蓋由$a\sin\omega(x-\xi)=a\cos\omega\left[x-\left(\xi+\frac{\pi}{2\omega}\right)\right]$可以知之也．

②頻率與角頻率不可不注意分辨．

(1) circular frequency, pulsation, Kreisfrequenz. (2) phase; phase; phase. (3) epoch, or phase displacement; déplacement de phase; Phasenverschiebung.

其中 α 及 β 為 $\alpha=-a\sin\omega\xi$, $\beta=a\cos\omega\xi$ 之意. 倒言之,凡如下形式之函數

$$\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$$

必表達一種諧振動, 其振幅為 $a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, 而週相位移 $\omega\xi$ 受 $\alpha=-a\sin\omega\xi$, $\beta=a\cos\omega\xi$ 之規定者. 苟以 $\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ 表達諧振動,則兩個以上此種函數之和,其角頻率各為 ω 者,必又為一諧振動,其角頻率仍為 ω, 可斷言也.

9.1.2. 諧振動之重疊

振動現象,錯綜繁複,其中有為純粹之諧振動者, 有為諧振動重疊而成者. 諧振動為一簡單之週期函數,據上所述,已可明其梗概. 其為諧振動重疊而成者,乃此種週期函數疊次相加之和, 由其圖形言之,為正弦曲線疊牀架屋所成,其縱坐標在在疊加而得者,故稱之為**重疊**(1). 欲論振動之重疊,必假定其原有角頻率(因之其週期)彼此各不相等,蓋角頻率相等者,重疊後其振動之角頻率依然如舊(惟振幅與週相位移不同於前),前已言之矣.

論兩諧振動之重疊,其角頻率分別為 ω_1 及 ω_2 者,當視 $\omega_1:\omega_2$ 是否為一有理數而有兩種根本不同之情形. 試先就最簡單情形言之;設最初振動之角頻率為 ω_1,第二次振動之角頻率 ω_2 兩倍於前,即 $\omega_2=2\omega_1$, 如是則第二次振動之週期必為最初週期之半: $T_2=\dfrac{2\pi}{2\omega_1}=\dfrac{T_1}{2}$. 惟如是, 此第二次振動不僅有週期 T_2, 且有週期 T_1, 因 T_1 適為 T_2 之兩倍故也. 明乎是,乃知第一第二兩次振動重疊而成之振動必有週期 T_2, 可斷言矣. 此第二次振動,其角頻率兩倍於最初振動, 而其週期為最初之半者, 常簡稱為**第二諧波**, 其最初振動因稱之為**第一諧波**(2)或簡稱為**基波**(3).

據是以推,復可創一振動,其角頻率 ω_3 為 $\omega_3=3\omega_1$,即三倍於最初

(1) superposition; superposition; Zusammensetzung. (2) first harmonic; vibration harmonique première; erste harmonische Oberschwingung. (3) fundamental; vibration fondamentale.

者，於是 $\sin 3\omega_1 x$ 經 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ 之後，必又週而復始．是為**第三諧波**．據同理，遂得有第四，第五，…，第 n 諧波，其角頻率分別為 $\omega_4=4\omega_1$，$\omega_5=5\omega_1$，…，$\omega_n=n\omega_1$，而其初相位移則絕無限制．以上每一諧波經過 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ 之後必週而復始；因此之故，若將其中角頻率為 ω_1 之倍數者重疊之，必得一週期為 $\frac{2\pi}{\omega_1}=T_1$ 之週期函數，從可知矣．循是以觀，若依次重疊各諧波，其角頻率為 $\omega, 2\omega, 3\omega, \cdots, n\omega$ 者，其結果將為如下形式之一週期函數：

$$S(x)=a+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu\omega x+b_\nu\sin\nu\omega x)$$

（其中有一常數 a 之附加，不過為求函數形式之普遍，初不影響其原有之週期性）．觀其中既有 $2n+1$ 個常數，可供吾人之任意選擇，故得因之而創造種種曲線，與最初之正弦曲線似大異其趣者，觀圖 9.3、9.4、9.5 可以略見諧波重疊在幾何學上之意義為何如，讀者幸細玩而自得之也．

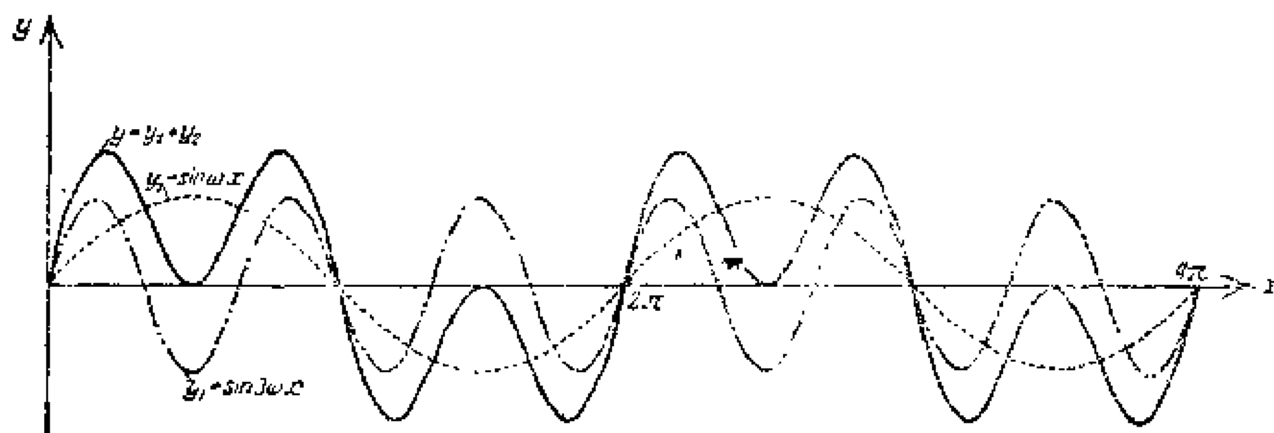


圖9.3



圖9.4

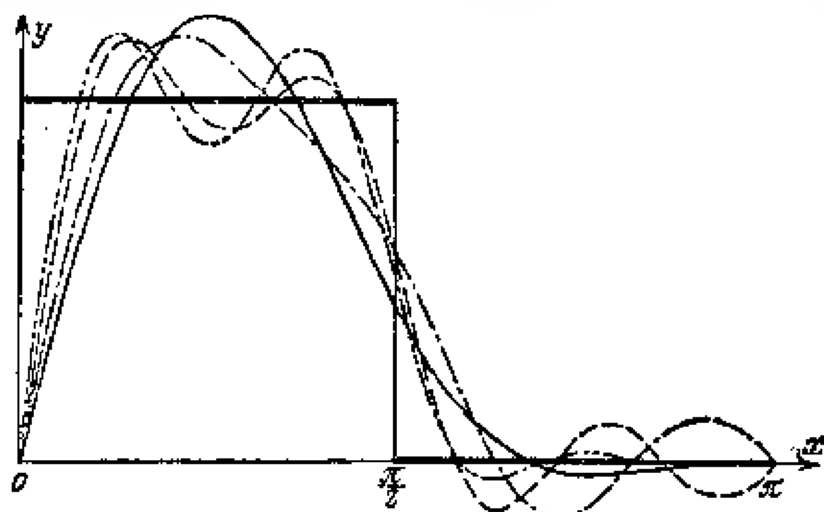


圖9.5

上述之基波或第一諧波在聲學上稱之為**基音**[1]；自第二諧波以下，則稱之為第一，第二 ··· **泛音**[2].其詳細應用，在此不縷述.

要而論之，各種振動之重疊，苟其角頻率彼此之比為有理數者，必可表達之為一公共角頻率之倍數，是為基本角頻率.苟 ω_1 與 ω_2 之比未為一有理數，則重疊之後，其情形與前大異；就諧振動言之，其重疊結果即無週期性，至多近似於週期而已，因此之故，遂以**幾週期函數**[3]稱之，其理論在最近頗有長足之進展，惟本書中不能加以論列.

論諧振動之重疊，有所謂拍[4]之現象者，請略述之.試就兩諧振動之振幅各為 1，角頻率分別為ω_1及ω_2，並為求簡之故，假定其週相彼此相同者而研討之，則當詳考下列函數之特性：

$$y=\sin\omega_1 x+\sin\omega_2 x, \qquad (\omega_1>\omega_2>0).$$

此式據三角術中之理可化為

$$y=2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)x\cdot\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)x.$$

細考此式之涵義，其所表達之現象，實為一種振動，其角頻率為 $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$，週期為 $\frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$者；而最足令人注意之事，則為其振幅不

(1) fundamental; son fondamental; Grundton. (2) harmonic; son harmonique; Oberton. (3) almost periodic function; fonction presque périodique; fast periodische Funktion. (4) beats; battement; Schwebung.

復爲一常數，蓋其振幅爲 $2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)x$，因之作週期性之變化，且其週期爲 $\frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2}$，較振動之週期 $\frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$ 爲長也．吾人欲明此種現象之究竟，可設想 ω_1 及 ω_2 相當大，而其差 $\omega_1-\omega_2$ 與之相較則甚小；如是則其振幅 $2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)x$ 之變，周而復始，其間經過，較振動爲緩．所謂拍者，即指此種現象而言．其事在聲學及無線電學中固數見不鮮．如在無線電報中常使 ω_1 及 ω_2 如是之高，非人類聽覺所能及，而 $\omega_1-\omega_2$

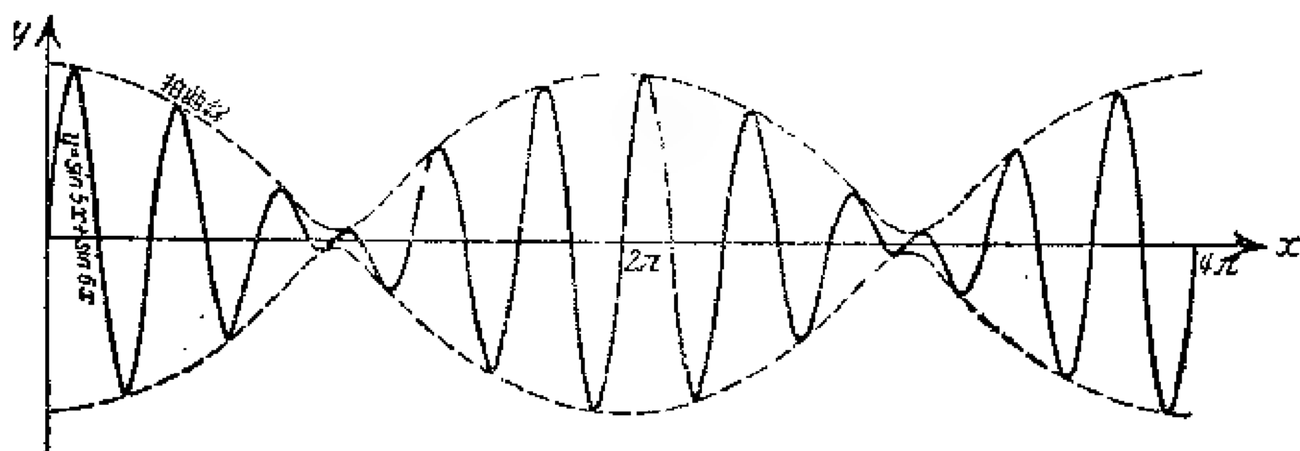


圖9.6

則入於可聞之音程，故吾人所能聞者，其拍音而已．茲更繪圖 9.6 於此，藉明其理．

第二節 利用複數以表達振動之重疊

9.2.1. 複數之應用

振動現象及週期函數之研討，因應用複數之故，而在形式計算上得以化簡不少．蓋 $\cos\omega x$ 及 $\sin\omega x$ 可據 $\cos\omega x+i\sin\omega x=e^{i\omega x}$ 而合寫之．惟此不過爲求形式上之簡便，按其實際，複數間每一方程式即爲實數間二個方程式之縮寫，故其結果之意義如何，必仍返於實數，而後說明之可也．

試將三角函數根據下式各以指數函數替代之：

$$2\cos\theta=e^{i\theta}+e^{-i\theta},\qquad 2i\sin\theta=e^{i\theta}-e^{-i\theta},$$

則上述諧振動之形式將爲 $e^{i\omega x}$，$e^{-i\omega x}$ 或

$$ae^{i\omega(x-\xi)},\quad ae^{-i\omega(x-\xi)},$$

其中 a,ω 及 $\omega\xi$ 均爲實數，即所謂振幅、角頻率及週相位移是已．於是振動現象在實際上之情形，可由此複數形式之實部及虛部闡明之．上述應用複數之便利，在求索導數時更爲顯著，蓋以 x 作爲時間，求振動之速度如

$$\frac{d}{dx}a[\cos\omega(x-\xi)+i\sin\omega(x-\xi)]$$
$$=a\omega[-\sin\omega(x-\xi)+i\cos\omega(x-\xi)]$$
$$=ia\omega[\cos\omega(x-\xi)+i\sin\omega(x-\xi)],$$

觀其結果乃與以 i 爲一常數，直接求 $ae^{i\omega(x-\xi)}$ 之導數，$\frac{d}{dx}ae^{i\omega(x-\xi)}=ia\omega e^{i\omega(x-\xi)}$ 正同；因此之故，此種表達法在求導數時有其極大便利也．茲更舉例明之．

設有一電流，其電阻爲 R，電感爲 L，而其所受外加之電動勢爲 E．若其爲直流，則 E 爲一恆量，於是據 Ohm 定律，其電流 I 必滿足　　$E=RI$.

若其爲交流，則 E 爲時間 t 之函數，故 I 亦必隨是而變，而 Ohm 定律之形式將爲

$$E-L\frac{dI}{dt}=RI,$$

茲就最簡單情形討論之，即假定外加電動勢爲一諧振動，其角頻率爲 ω 者．如是則 $\varepsilon\cos\omega t$ 及 $\varepsilon\sin\omega t$ 可利用複數而合寫之如

$$E=\varepsilon e^{i\omega t}=\varepsilon\cos\omega t+i\varepsilon\sin\omega t,$$

其中 $\varepsilon(>0)$ 即所以表示其振幅之意．於是在形式上有所謂複電壓及複電流者．欲計算其複電流，可將 I 寫如

$$I=ae^{i\omega t}=a(\cos\omega t+i\sin\omega t),$$

在此僅假定 I 亦爲一諧振動，其角頻率爲 ω 者．由是求 I 之導數，將其中 i 視爲一常數，則有

$$\frac{dI}{dt}=ia\omega e^{i\omega t}=a\omega(-\sin\omega t+i\cos\omega t);$$

代入於 Ohm 定律，即得　　$\varepsilon-aLi\omega=Ra$

或　　$$a=\frac{\varepsilon}{R+i\omega L},$$

由是知　　$$E=(R+i\omega L)I=WI,$$

此關係可視爲交流之 Ohm 定律；蓋就其形式言之，若稱

$$W = R + i\omega L$$

爲電路之複電阻，則直流與交流之 Ohm 定律，在形式上亦相同，即電流乘複電阻必等於其電壓是也。上述之複電阻 W，若用複數之極式表之：

$$W = \alpha e^{i\delta} = \alpha(\cos\delta + i\sin\delta),$$

則其間必有 $\alpha = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$， $\tan\delta = \frac{\omega L}{R}$。

由是得以推知 $I = \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{i(\omega t - \delta)}$。

據是以觀，電流與電壓之週期(及其頻率)必彼此相同，而電流之振幅 a 與其電動勢之振幅 ε 必發生下列關係：

$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

就其週相言之，彼此亦不相等，後者(電流)在電壓達最大值時，前者較遲 $\frac{\delta}{\omega}$，其達最小值時亦然。在電機工程中，吾人恆稱 $\alpha = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ 爲電流之頻率爲 ω 時之阻抗(1)，或稱爲交流電阻(2)，而其週相之移，δ 當以角度表之者，常簡稱爲遲後(3)。

9.2.2. 用複數以表達振動之重疊

欲應用複數以表振動之重疊如

$$S(x) = a + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

(爲求簡之故，令其中 $\omega = 1$)。根據

$$\cos\nu x = \frac{1}{2}(e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}) \text{ 及 } \sin\nu x = \frac{1}{2i}(e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}),$$

必有

$$S(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x},$$

其中複數 α_ν 與實數 a, a_ν, b_ν 之關係爲：

$$a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu},\ a = \alpha_0,\ b_\nu = i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}),$$

故欲使 $a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}$，包括 $\nu = 0$ 在內，吾人當令 $a = \alpha_0 = \frac{a_0}{2}$。倒而論之，凡函數之有如下形式者

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x}$$

(1) impedance; impédance; Impedanz. (2) alternating current resistance; résistance de courant alternatif; Wechselstromwiderstand. (3) lag, retardation; Verzögerung.

必可用以表達振動之重疊,惟欲求其結果爲實數,但假定 $a_\nu+a_{-\nu}$ 爲實數,$a_\nu-a_{-\nu}$ 爲虛數,換言之,a_ν 及 $a_{-\nu}$ 爲共軛複數可矣.

9.2.3. 一連加公式之推演

關於三角函數,有一連加公式,爲推理之重要工具,其內容爲

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

除 $\alpha=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 外,不論 α 如何變化,必能成立.欲證之,但應用複數,將其中之餘弦函數以指數式代之,得

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=-n}^{n}e^{i\nu\alpha}.$$

觀其右方,實爲一幾何級數,其共同比 q 不等於 1 者:$q=e^{i\alpha}\neq1$.因此之故,遂有

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{1}{2}e^{-in\alpha}\frac{1-q^{2n+1}}{1-q}=\frac{1}{2}\frac{e^{-in\alpha}-e^{(n+1)i\alpha}}{1-e^{i\alpha}},$$

然後將分子分母各以 $e^{-\frac{i\alpha}{2}}$ 乘之,即得

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

是即欲證之理.

例 題

1. 試草繪曲線 $y=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}$,令 $N=3,5,6$.

2. 試草繪曲線 $y=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos t}{n^4}$,令 $N=3,6,8$.

3. 試求 $\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin n\alpha$ 之和.

4. 設 $s_m(\alpha)=\frac{\sigma_0(\alpha)+\sigma_1(\alpha)+\cdots+\sigma_m(\alpha)}{m+1}$,其中 $\sigma_n(\alpha)$ 之値爲

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha,$$

試證

$$s_m(\alpha)=\frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

(s_m 一式名爲 Fejér 核[1],在 Fourier 級數之高深研究中極關重要).

5. 試示

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_m(\alpha)d\alpha=1,$$

其中 $s_m(\alpha)$ 即題 4 中之 Fejér 核.

(1)kernel; noyau; Kern.

第三節 函數展開爲 Fourier 級數之問題

9.3.1. Fourier 係數

今可從事討論一函數如何展開爲 Fourier 級數之問題矣．試假定在變程 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 中有一函數 $f(x)$；苟其得由三角函數之重疊如

$$S(x)=\alpha+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

其中有 $2n+1$ 個任意常數 α, a_ν, b_ν 者，近似表達之，則此種係數 α, a_ν, b_ν 必如何而後可．是即 $f(x)$ 如何方得展開爲 Fourier 級數之問題．苟其展開果爲可能，且在 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 中有勻斂性：

$$f(x)=\alpha+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

則 $f(x)$ 與係數 $\alpha=\frac{1}{2}a_0, a_\nu, b_\nu$ 間可發見有極簡單之關係，而各係數即藉 $f(x)$ 而得明確規定（在此應用 $\alpha=\frac{1}{2}a_0$ 符號，有其便利之處，不久即可見之）．蓋在級數勻斂之假定下，將各項乘以 $\cos\nu x$，可逐項求其積分，復據

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0\text{，若 } m\neq n,\\ \pi\text{，若 } m=n\neq0,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0\text{，若 } m\neq n,\\ \pi\text{，若 } m=n\neq0,\end{cases}$$

如 §4.2.3 所證者，即得

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\nu x\,dx.$$

據同理，將級數各項乘以 $\sin\nu x$．復逐項求積分，必有

$$b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

如是規定之 a_ν 及 b_ν 稱之爲 **Fourier 係數**．由是以論，設有一函數 $f(x)$，吾人可應用 a_ν 及 b_ν 以組成 $S_n(x)$．

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

或竟寫出其 Fourier 級數．所欲研討者，$f(x)$ 必如何而後其 Fourier 級

數方能收斂且斂於 $f(x)$ 耳.

在討論此問題之先,吾人對 $f(x)$ 之假定,擬作詳盡之申述.一函數 $f(x)$ 在其變程中除作有限次跳躍外皆爲連續者,謂之**按段連續**[1].苟一函數在其變程中按段連續而其導數亦按段連續者謂之**按段光滑**[2].當 $f(x)$ 在 x 點作一跳躍時,其意卽 $f(\bar{x})$ 當 x 由左趨 $\bar{x}$ 時雖有一極限 $f(x-0)$,惟與 $f(x+0)$,卽 $\bar{x}$ 由右趨 x 時之極限不相等,如是則其在 x 點之値得以兩者之算術中數規定之:

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\};$$

此種規定,當 $f(x)$ 在 x 有連續性時,自亦有效.復次,吾人可設想 $f(x)$ 之變程本爲 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 者而延拓於此變程之外,使其全體爲一週期函數,是爲週期性之延拓.

論 Fourier 級數,最後目標實爲下列定理之建立:

苟 $f(x)$ 爲按段光滑,在其跳躍處之値如上述規定者,則其 Fourier 級數在每點 x 上必有收斂性,且斂於 $f(x)$.

其次,復有:

苟 $f(x)$(並設想其作週期性之延拓)在每閉程中有連續性又按段光滑,則其 Fourier 級數有勻斂性.又 $f(x)$ 若按段光滑而無間斷點者,則其 Fourier 級數必絕對收斂.

以上各定理,擬俟下節中證明之.據此以觀,可見函數之得展開爲 Fourier 級數者,包羅實異常廣泛,是亦深足注意之事也.玆先舉數例於後,藉以見 Fourier 級數之用.

9.3.2. Fourier 級數舉例

試假定 $f(x)$ 之週期爲 2π,其變程爲 $-\pi<x<\pi$,並設想在此變程之外,向左右作週期性之延拓.苟 $f(x)$ 爲一偶函數,則 $f(x)\sin\nu x$ 爲奇而 $f(x)\cos\nu x$ 爲偶,於是

(1) sectionally continuous; stückweise stetig.

(2) sectionally smooth; stückweise glatt.

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx = 0, \qquad a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx;$$

因此之故，其 Fourier 級數係純由餘弦函數所組成者。據同理，若 $f(x)$ 為一奇函數，則

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx = 0, \qquad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx,$$

於是得一正弦函數所組成之級數。觀下舉各例，可以概見。

【例一】 $\psi(x)=x$ 及 $\varphi(x)=x^2$ 之展開。$\psi(x)=x$ 為一奇函數，故 $b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin\nu x\,dx$

據分部積分法求之為

$$\frac{\pi}{2}b_\nu = -\frac{x\cos\nu x}{\nu}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\nu}\int_0^{\pi}\cos\nu x\,dx = (-1)^{\nu+1}\frac{\pi}{\nu},$$

故在 $-\pi<x<\pi$ 中得展開如

$$\psi(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + \cdots\right),$$

當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時，即由是知

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \cdots,$$

是即第六章第一節所已推演者。此級數所表達之 $\psi(x)$ 爲非一週期函數，蓋在 $x=k\pi$, $k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$ 均作跳躍 2π。然在此間斷點上，即在 $x=k\pi$, $k=\pm1,\pm3,\cdots$ 級數各項均爲 0，故函數本身亦爲 0。故級數在此間斷點上所表達者爲左右兩極限之算術中數也。

設 ξ 爲一固定之數，介於 $-\pi$ 及 π 之間者，若令 x 代以 $(x-\xi)$，則上列級數將爲

$$\psi(x-\xi) = 2\left[\frac{\sin(x-\xi)}{1} - \frac{\sin 2(x-\xi)}{2} + \frac{\sin 3(x-\xi)}{3} - \cdots - \cdots\right]$$

$$= -\frac{2}{1}\sin\xi\cos x + \frac{2}{1}\cos\xi\sin x + \frac{2}{2}\sin 2\xi\cos 2x$$

$$-\frac{2}{2}\cos 2\xi\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3\xi\cos 3x + \frac{2}{3}\cos 3\xi\sin 3x + \cdots - \cdots,$$

此亦可寫成 Fourier 級數之形式，其係數爲：

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\sin n\xi, \quad b_n = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos n\xi,$$

當 n 增大時各趨於 0。此級數所表之函數在 $x=\xi\pm\pi$, $x=\xi\pm3\pi$, $\cdots$ 亦各有間斷點如上所述者。

次就偶函數 $\varphi(x)=x^2$ 言之。其係數用分部積分法求之得

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos\nu x\,dx = (-1)^\nu\frac{4}{\nu^2}, \qquad \nu>0,$$

$$a_0=\frac{2\pi^2}{3}.$$

從而得其展開式

$$\varphi(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots+\cdots\right),$$

試由是逐項求導數,更以2除之,即可返歸於 $\psi(x)=x$.

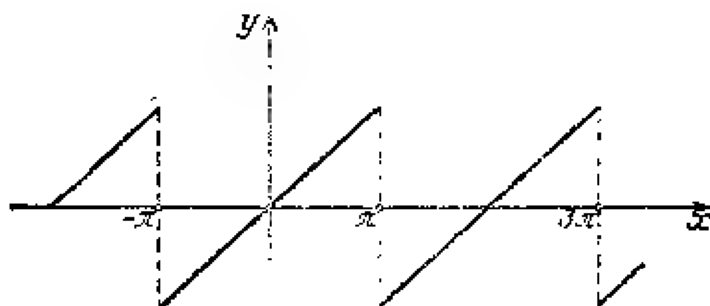


圖9.7

［例二］ $x\cos x$ 之展開.考此爲一奇函數,求其係數,爲

$$a_\nu=0,\quad b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin\nu x\,dx.$$

應用前例所已得之結果:

$$\int_0^\pi x\sin\mu x\,dx=(-1)^{\mu+1}\frac{\pi}{\mu},\quad (\mu=1,2,3,\cdots)$$

可求得 b_ν 如下:

$$b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin\nu x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,[\sin(\nu+1)x+\sin(\nu-1)x]dx$$

$$=\frac{(-1)^{\nu+2}}{\nu+1}+\frac{(-1)^\nu}{\nu-1}=(-1)^\nu\frac{2\nu}{\nu^2-1},\quad (\nu=2,3,\cdots),$$

$$b_1=-\frac{1}{2}.$$

由是得其展開式: $$x\cos x=-\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\nu}{\nu^2-1}\sin\nu x.$$

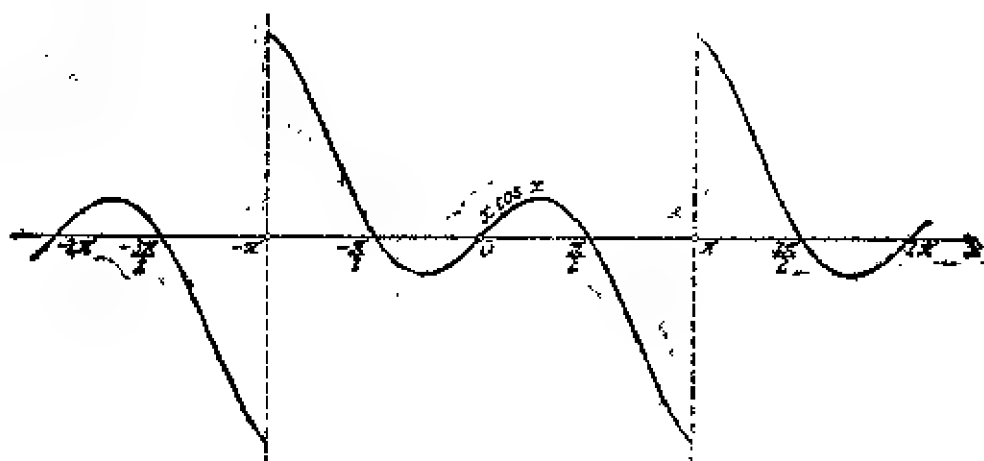


圖9.8

復應用例一結果,將此加於 x, 則有

$$x(1+\cos x)=\frac{3}{2}\sin x+2\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5}-\cdots+\cdots\right).$$

若將 $-\pi<x<\pi$ 中之 $x\cos x$ 延留於此變程之外,則必有間斷點,與例一之 $\psi(x)$ 完全相同者,觀圖 9.8 自明.惟若將 $x(1+\cos x)$ 作週期性之延拓,則在變程之兩端連同其導數皆爲連續,因 $\psi(x)=x$ 乘以 $1+\cos x$, 其間斷點即隨之消滅.推原其故,乃由於 $1+\cos x$ 及其導數在端點均爲 0 故也.

〔例三〕 $f(x)=|x|$. 此函數爲一偶函數,故 $b_\nu=0$, 而

$$a_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos\nu x\,dx,$$

據分部積分法求之,爲

$$\int_0^\pi x\cos\nu x\,dx=\frac{1}{\nu}x\sin\nu x\Big|_0^\pi-\frac{1}{\nu}\int_0^\pi \sin\nu x\,dx=\begin{cases}0, & \text{若 }\nu\text{ 爲偶數}, \neq 0\\ -\dfrac{2}{\nu^2}, & \text{若 }\nu\text{ 爲奇數}.\end{cases}$$

由是得其展開式:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

若令其中 $x=0$, 即得一可注意之公式如下:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

〔例四〕 設有一函數如

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ +1, & 0<x<\pi\end{cases}$$



圖9.9

此爲一奇函數,其圖形如圖 9.9 所示,故 $a_\nu=0$, 而

$$b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\nu x\,dx=\begin{cases}0, & \text{若 }\nu\text{ 爲偶數},\\ \dfrac{4}{\pi\nu}, & \text{若 }\nu\text{ 爲奇數}.\end{cases}$$

由是知其 Fourier 級數爲

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right).$$

若令其中 $x=\frac{\pi}{2}$, 則有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

又此級數可由例三之$|x|$逐項求導數而獲得之.

［例五］ $f(x)=|\sin x|$，此為一偶函數，故展開之將為一餘弦級數．求其a_ν，得

$$\frac{\pi}{2}a_\nu=\int_0^\pi \sin x\cos\nu x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi[\sin(\nu+1)x-\sin(\nu-1)x]dx$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若 }\nu\text{ 為一奇數,}\\ \dfrac{-2}{\nu^2-1}, & \text{若 }\nu\text{ 為一偶數.}\end{cases}$$

由是知 $$f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\mu x}{4\mu^2-1}.$$

［例六］ $\cos\mu x$ 之展開．假定μ不等於一整數，試一考$f(x)=\cos\mu x$在$-\pi<x<\pi$之性質．此函數既為一偶函數，故$b_\nu=0$，而

$$\frac{\pi}{2}a_\nu=\int_0^\pi\cos\mu x\cos\nu x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi[\cos(\mu+\nu)x+\cos(\mu-\nu)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\mu+\nu)\pi}{\mu+\nu}+\frac{\sin(\mu-\nu)\pi}{\mu-\nu}\right]=\frac{\mu(-1)^\nu}{\mu^2-\nu^2}\sin\mu\pi.$$

由是得其展開式：

$$\cos\mu x=\frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}-\frac{\cos x}{\mu^2-1^2}+\frac{\cos 2x}{\mu^2-2^2}-\cdots+\cdots\right).$$

觀此函數在$x=\pm\pi$仍為連續．設令$x=\pi$，復將式之兩方各以$\sin\mu\pi$除之，又將μ改寫為x，則有

$$\cot\pi x=\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2-1^2}+\frac{1}{x^2-2^2}+\cdots\right),$$

是即所謂cot裂為分數之公式，在解析學中佔一極重要地位者．此級數亦可寫成下列形式：

$$\cot\pi x-\frac{1}{\pi x}=-\frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+\cdots\right],$$

若x在$0\leqq x\leqq q<1$間變化，則此式右方第n項之絕對值必小於$\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{n^2-q^2}$；因此之故，此級數在此變程中實有勻斂性，故可逐項求其積分．於是其左方乘以π為

$$\pi\int_0^x\left(\cot\pi t-\frac{1}{\pi t}\right)dt=\log\frac{\sin\pi x}{\pi x}-\lim_{a\to0}\log\frac{\sin\pi a}{\pi a}=\log\frac{\sin\pi x}{\pi x},$$

其右方乘以π為

$$\log\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)+\log\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

更由對數歸於指數函數，則得

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

於是可知 $$\sin \pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

是即正弦之無盡乘積①. 由是令 $x=\frac{1}{2}$, 即得 §44.3.4 所述之 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu}{2\nu-1}\cdot\frac{2\nu}{2\nu+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots.$$

［例七］ 設有 $f(x)=\sin \mu x$, 而變程為 $-\pi<x<\pi$ 吾人可應用與前類似之算法, 得其展開式如:

$$f(x)=\sin \mu x=\frac{2\sin \mu\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{\mu^2-1^2}-\frac{2\sin 2x}{\mu^2-2^2}+\frac{3\sin 3x}{\mu^2-3^2}-\cdots+\cdots\right).$$

若令其中 $x=\frac{\pi}{2}$, 更應用 $\sin \mu\pi=2\sin\frac{\mu\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}$, 即可將正割分解為分數如

$$\pi\sec \pi x=\frac{\pi}{\cos \pi x}=4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{4x^2-(2\nu-1)^2},$$

其中 $\frac{\mu}{2}$ 曾改寫為 x.

復次, 吾人可將雙曲函數 $\cosh \mu x$ 及 $\sinh \mu x$ 在 $-\pi<x<\pi$ 中展開為 Fourier 級數, 得如下結果:

$$\cosh \mu x=\frac{2\mu}{\pi}\sinh \mu\pi\left(\frac{1}{2\mu^2}-\frac{\cos x}{\mu^2+1^2}+\frac{\cos 2x}{\mu^2+2^2}-\frac{\cos 3x}{\mu^2+3^2}+\cdots\right),$$

$$\sinh \mu x=\frac{2}{\pi}\sinh \mu\pi\left(\frac{\sin x}{\mu^2+1^2}-\frac{2\sin 2x}{\mu^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{\mu^2+3^2}-\cdots\right).$$

例　題

1. 試就週期為 2π, 而在 $-\pi<x\leqq\pi$ 中定義如下之各函數, 求其 Fourier 展開式:

(a) e^{ax}.　　(b) $(x^2-\pi^2)^2$.　　(c) $\sin ax(1+\cos x)$.

(d) $f(x)=1,(a\leqq x\leqq b)$; $f(x)=0,(-\pi<x<a)$; $f(x)=0,(b<x\leqq\pi)$.

2. 設 $f(t)$ 為週期函數, 其週期為 1, 而在 $0\leqq t<1$ 中 $f(t)=t$. 試證

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi t}{n}.$$

3. 多項式 $B_n(t)$(Bernoulli 多項式)係由下列關係式所規定:

(a) $B_1(t)=t-\frac{1}{2}$; (b) $B_n'(t)=nB_{n-1}(t)$; (c) $\int_0^1 B_n(t)dt=0$.

試求 $B_2(t)$, $B_3(t)$, $B_4(t)$.

(注.——$B_n(0)$ 均係有理數, 且實即 §48.3.2 所述之 Bernoulli 數 B_n).

①由此公式, 可見 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 實為 $\sin \pi x$ 之零點. 故就此觀點言之, 此式與多項式之因子分解式同其意義也.

4 試證下列 Bernoulli 多項式之 Fourier 展開式:

$$B_1(t)=-\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi t}{n}\right\},\quad B_3(t)=\frac{3}{2\pi^3}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi t}{n^3}\right\},$$

$$B_2(t)=\frac{1}{\pi^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi t}{n^2}\right\},\quad B_4(t)=-\frac{3}{\pi^4}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi t}{n^4}\right\}.$$

5. 試證 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

6. 試證 $\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$.

7. 試證 (a) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$.

(b) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

(c) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{7\pi^4}{720}$.

8. 試由 $\cos\pi x=\frac{\sin 2\pi x}{2\sin\pi x}$

之關係,求餘弦之無盡乘積.

第四節 Fourier 級數之收斂性

9.4.1. 所表函數按段光滑者

據前所論,設有一函數 $f(x)$,在其變程 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 中按段連續者(即至多作有盡次跳躍外處處連續),則可根據下式求索其Fourier 係數: $a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos\nu t\,dt$, $b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin\nu t\,dt$,

從而組織其 Fourier 級數:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

吾人所欲研討者,此級數果在何種條件之下方能收斂,且其所斂適爲 $f(x)$之問題.至 $f(x)$ 在 $-\pi<x\leqq+\pi$ 之外作週期性之延拓,亦在假定之中,無容贅述.

茲欲證明者,爲下列定理:

苟 $f(x)$ 按段光滑,在其間斷點上滿足 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+$

$f(x+0)$〕，則其 Fourier 級數在每點上皆有收斂性且必斂於 $f(x)$.

欲證此理，可先觀其最前 n 項之和：

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

試將 Fourier 係數代入於此，復將連加與求積分互易先後，則有

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(\cos\nu t\cos\nu x+\sin\nu t\sin\nu x)\right]dt,$$

或應用餘弦之加法定理

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu(t-x)\right]dt,$$

復據 §9.2.3 所推演之連加式以變其形式，即得

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt,$$

然後改用 $\tau=t-x$ 為積分變數，同時注意積分符號下函數之週期性，則有

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\tau)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau,$$

是為 $S_n(x)$ 之一種形式，由其最初定義輾轉變易而得者.以此形式為出發點，吾人可據下列輔定理，以證 $S_n(x)$ 之必斂於 $f(x)$. 所欲依據之輔定理為：**苟 $S(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中按段連續，則**

$$I=\int_a^b s(t)\sin\lambda t\,dt$$

當 λ 趨大時必斂於 0. 欲證之，可假定 $S(x)$ 在其變化全程中處處連續，蓋函數之按段連續者，其變程可分為若干段，其中函數處處連續故也.於是根據與第八章附錄第三節類似之推理，可知 λ 若為一正數，則 $\sin\lambda t$ 在每兩緊接鄰程中，長各 $\frac{\pi}{\lambda}$ 者，必交為正負；且當 λ 趨大時，每兩鄰程中之積分值必幾乎相消，蓋因連續性之故，$S(x)$ 在此鄰程中之值彼此相差無幾也.因此之故，吾人擬將 I 變易之，改用 τ 作積分變數以代 t 如 $t=\tau+h$，其中 $h=\frac{\pi}{\lambda}$，如是則 $\sin\lambda t=-\sin\lambda\tau$，因之遂有

$$I=-\int_{a-h}^{b-h} s(\tau+h)\sin\lambda\tau\, d\tau.$$

復將其中 τ 改寫爲 t，然後將 I 之兩種形式相加，得

$$2I=-\int_{a-h}^{a} s(t+h)\sin\lambda t\, dt+\int_{a}^{b-h}[s(t)-s(t+h)]\sin\lambda t\, dt$$
$$+\int_{b-h}^{b} s(t)\sin\lambda t\, dt.$$

若以 M 表 $s(x)$ 絕對值之上涯，換言之，不論 x 在其變程中如何變化，始終有 $|s(x)|\leqq M$ 者，則

$$2|I|\leqq 2Mh+\int_{a}^{b-h}|s(t)-s(t+h)|\,dt$$

之成立，爲理所必至．然後以 ε 表一正數，當 λ 相當大時，$|s(t)-s(t+h)|$ 在其變化全程 $a\leqq t\leqq b-h$ 中均小於 $\frac{\varepsilon}{b-a}$，隨之復有 $Mh=\frac{M\pi}{\lambda}<\frac{\varepsilon}{2}$，於是知 $|I|<\varepsilon$．因 ε 在 $\lambda\to\infty$ 時得任意小，故 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I=0$ 遂得證矣①.

除此輔定理外，吾人倘需要下列公式：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=\frac{\pi}{2},$$

其中 n 爲任何正整數．此公式乃根據餘弦之連加公式所必有之事：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos\nu t\right)dt=\frac{\pi}{2},$$

無待續述者也．

明乎上述兩理，即可從事於

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=f(x)$$

之證明，是即主要定理之內容，所欲證者，即在乎是．試就含有原點之

①苟假定 $s(x)$ 不僅連續，且有按段連續之導數，則此定理可用分部積分法直接證之．蓋因

$$\int_a^b s(t)\sin\lambda t\, dt=\frac{1}{\lambda}\left[s(a)\cos\lambda a-s(b)\cos\lambda b+\int_a^b s'(t)\cos\lambda t\, dt\right]$$

之故，其右方當 λ 趨大時趨於 0 也．

積分變程論之，當 x 爲固定時，則[1]

$$s(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

在 $0\leqq t\leqq\pi$ 中必按段連續，蓋其事在 $0<t\leqq\pi$ 間至爲顯然，而其在 $t=0$ 之連續則由於 t 自右趨 0 時導數存在之假定：

$$\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}t}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

由是知 $\lambda=n+\frac{1}{2}$ 趨大時，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi s(t)\sin\lambda t\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+0)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

必趨於 0。惟此式右方第二積分中之 $f(x+0)$ 可列於積分符號之外，復因 $\lambda=n+\frac{1}{2}$ 之故，$\int_0^\pi\frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ 實等於 $\frac{\pi}{2}$，遂有[2]

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{1}{2}t}dt=\frac{1}{2}f(x+0).$$

據同理，在 $-\pi\leqq t\leqq 0$ 復有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{1}{2}t}dt=\frac{1}{2}f(x-0).$$

兩式相加，得

---

①此記法之意義，如§9.3.1 所述.

②令 $x=0$，$f(t)=\frac{\sin\frac{1}{2}t}{t}$，復將 t 代以 $\frac{u}{\lambda}$，則有前已證明之重要公式

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{1}{2}t}dt=f(x),$$

吾人欲證之理，已於此得之矣.

9.4.2. Fourier 級數收斂性之研討

考 Fourier 級數之趨於 $f(x)$，在其間斷點鄰近，必無勻斂可能，蓋連續函數所組成之勻斂級數必有一連續極限，已如前所述矣. 惟吾人不難建立下列重要定理：

一按段光滑之週期函數苟無間斷點，則其 Fourier 級數之收斂必勻而又絕對. 在任何閉程中之未含間斷點者，任何按段光滑函數之 Fourier 級數必有勻斂性.

其理可證之如次. 試假定 $f(x)$ 按段連續(未嘗假定其按段光滑)，則其 Fourier 係數 a_ν 及 b_ν 必滿足所謂 Bessel 不等式者，其意謂不論 n 爲任何正整數必有

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$$

成立；是乃由於 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{1}{2}a_0-\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)]^2dx$ 無論如何不能爲負之故. 試將此式展開，並注意 Fourier 係數之定義及三角函數之特性，即得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)]\geqq 0.$$

復次，若 $u_1,u_2,\cdots u_n$ 及 $v_1,v_2,\cdots v_n$ 爲任何實數，又有所謂 Schwarz 不等式者，其意謂

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu v_\nu\right)^2\leqq\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu^2\cdot\sum_{\nu=1}^{n}v_\nu^2,$$

式中之等號惟在 u 與 v 一一成比例關係時方能成立，其理甚明，無待贅述.

設 $f(x)$ 爲一週期函數，按段光滑而無間斷點. 如是則其導數 $g(x)=f'(x)$ 必按段連續. 於是吾人不難證明 $g(x)$ 之 Fourier 係數滿足下列關係：

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_\nu &= \nu b_\nu, \\ d_\nu &= -\nu a_\nu, \end{aligned}\right\}$$

何則，據分部積分法可知

$$c_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos\nu x\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\cos\nu x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx = \nu b_\nu,$$

復據同理可以證其他關係也。惟如是，若應用 Bessel 不等式於 $g(x)$，則有

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2(a_\nu^2+b_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu^2+d_\nu^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)]^2dx.$$

如以 M^2 表此式右方之値，應用 Schwarz 不等式，可知 $m>n$ 時

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}|a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{m}\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{m}\left[\frac{1}{\nu}\cdot\nu\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}\right] \leqq M\sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu^2}}$$

因 $\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}$ 爲週期函數 $a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x$ 之振幅故也。據是以觀，$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ 旣爲一斂級數，且其斂與 x 之變無關，此式之右方必可在 n 及 m 相當大時令其任意小。於是 Fourier 級數之收斂爲匀而又絕對，可以見矣。

其次，欲論函數之按段光滑而未能處處連續者，當先舉一如是之特例而細觀之。在 $-\pi<x<\pi$ 中，設有 $s(x)=x$，並作週期性之延拓於此變程之外，如是則據 §9.3.2 所論，知其 Fourier 級數爲

$$2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\cdots+\cdots\right).$$

此級數自不能匀斂，因其極限爲一間斷函數 $s(x)$ 故。雖然，在任何變程 $-l\leqq x\leqq l$，其中 l 爲 $0<l<\pi$ 者，可見其實有匀斂性。何以言之①？考 $\cos\frac{x}{2}$ 在 $-l\leqq x\leqq l$ 中無論如何不能小於一正數 $\cos\frac{l}{2}=k$。設將上列

①吾人應用此種證法，乃有鑒於 $2y\cos y$ 如在 $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ 外作週期性延拓，實爲一連續函數，因之據前論其 Fourier 級數必匀斂於此。然一考此級數，實爲 $2y$ 之 Fourier 級數乘以 $\cos y$ 而得者，故令 $y=\frac{x}{2}$，即引人於此證法。

級數中最前 m 項與 n 項之和($m>n$)相差之絕對值,即

$$\left|S_m(x)-S_n(x)\right|=2\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}-\frac{\sin(n+2)x}{n+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{m}\right|$$

乘以 $\cos\frac{x}{2}$,則根據 $2\sin u\cos v=\sin(u+v)+\sin(u-v)$,得其絕對值如

$$2\cos\frac{x}{2}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}-\frac{\sin(n+2)x}{n+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{mx}\right]$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+1}-\frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{n+2}+\cdots\pm\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m}$$

$$+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1}-\frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+2}+\frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{n+3}-\cdots+\cdots$$

然後將右方分子相同者合併之,即得

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1}\pm\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m}+\frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{(n+1)(n+2)}$$

$$-\frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{(n+2)(n+3)}+\cdots\mp\frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x}{(m-1)m},$$

惟因 $\cos\frac{x}{2}\geqq k$ 及 $|\sin u|\leqq 1$,從而知

$$|S_m(x)-S_n(x)|\leqq\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\right].$$

考此式之右方不復隨 x 而異,又因 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ 之收斂,必可隨 n 及 m 之趨大而爲任意小;於是上列 Fourier 級數之匀斂性,遂得證矣.

吾人既爲一函數之有間斷點者獲得一 Fourier 展開式之後,自可將間斷點任意移至他處,如

$$\phi(x-\xi)=2\left(\frac{\sin(x-\xi)}{1}-\frac{\sin 2(x-\xi)}{2}+\frac{\sin 3(x-\xi)}{3}-\cdots+\cdots\right),$$

除在 $(2k+1)\pi+\xi$(k 爲一整數)諸點外處處連續.當其經過此諸點時,其函數值由 π 躍至 $-\pi$,其所作跳躍爲 -2π,而在此諸點本身之值則爲 0. 據是以論,設有一按段光滑之函數 $f(x)$,在 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 中所有

間斷點爲 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$，當其自左向右經過此諸點時所作跳躍分別爲 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$，則下列按段光滑之函數

$$f(x)+\frac{\delta_1}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_1)+\frac{\delta_2}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_2)+\cdots$$
$$+\frac{\delta_m}{2\pi}(x+\pi-\xi_m)$$

必處處連續，因之據前所論，必可展開爲一勻斂之Fourier級數，而 $f(x)$ 之 Fourier 級數，亦可由是獲得之，吾人所欲推廣之理，遂於是得之矣．

上述結果爲普通應用自可滿足．其實 Fourier 級數理論之成就，遠不止此．觀上所述各種展開條件皆爲充分而非必要．函數之可展開爲 Fourier 級數者，爲數甚多，蓋其條件相當寬泛，遠非本段所論者所能及也．欲由一普遍觀點討論此問題，自當求之專書耳．

據研究結果，有一事頗堪注意．吾人曾發見有連續函數，其 Fourier 級數在無論如何小之變程中均不能收斂．此事不可視爲 Fourier 級數之效用有何問題，實示吾人一嚴重之教訓，謂表面上似甚簡單之概念如連續函數者尙有出人意料之現象可以發生，如連續函數有無處可導者即其一例．故所謂連續，義似淺簡，而其可能之特性，正不知尙有幾何也．

第九章附錄

Fourier 級數之積分

論 Fourier 級數之重要特性，爲其**逐項求積分**．據前所論，凡級數之勻斂者可逐項求積分．惟關於 Fourier 級數，有下列定理之成立：**苟 $f(x)$ 在 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ 按段連續，其 Fourier 級數爲**

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x),$$

則不論 ξ 及 x 爲任何兩數，處於 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ 之中者，可逐項求其自 ξ 至 x 之積分而得：

$$\int_\xi^x f(x)dx=\int_\xi^x \frac{1}{2}a_0 dx+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_\xi^x a_\nu \cos \nu x\,dx+\int_\xi^x b_\nu \sin \nu x\,dx\right).$$

且不論 ξ 爲任何固定之數，右方級數對於 x 必勻斂. 所可注意者，在此固未要求 $f(x)$ 之 Fourier 級數之勻斂，卽其收斂亦未嘗有所假定也.

欲證其理，先規定 $F(x)$ 爲 $F(x)=\int_{-\pi}^{x}[f(x)-\frac{1}{2}a_0]dx$. 如是則 $F(x)$ 按段光滑，且據 a_0 之定義必滿足 $F(\pi)=F(-\pi)=0$，於是可爲 $F(x)$ 作連續性及週期性之延拓. 循是以論，$F(x)$ 之 Fourier 級數：

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu\cos\nu x+B_\nu\sin\nu x)$$

必勻斂於 $F(x)$，可無疑義. 就其係數 A_ν 及 B_ν 觀之，可據分部積分法如第 342 頁脚注①中所述者，知 $\nu>0$ 時必有 $A_\nu=-\frac{b_\nu}{\nu}$ 及 $B_\nu=\frac{a_\nu}{\nu}$. 因此之故，不論 ξ 及 x 爲任何兩值，處於 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 之中者，可知

$$F(x)-F(\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}[A_\nu(\cos\nu x-\cos\nu\xi)+B_\nu(\sin\nu x-\sin\nu\xi)]$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{a_\nu}{\nu}(\sin\nu x-\sin\nu\xi)-\frac{b_\nu}{\nu}(\cos\nu x-\cos\nu\xi)\right]$$

對 x 必有勻斂性. 然後將 $F(x)$ 代入於此，卽得

$$\int_\xi^x f(x)dx-\frac{1}{2}a_0\int_\xi^x dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu\int_\xi^x\cos\nu x\,dx+b_\nu\int_\xi^x\sin\nu x\,dx\right),$$

是卽欲證之理.

據是以推，可見 $f(x)$ 若爲一週期函數，按段連續者，則在任何變程可逐項求其積分矣.

第十章 關於波動現象之微分方程式

在前數章中，已知有所謂微分方程式者，是乃規定一未知函數之方程式，爲待定函數及其導數間之一種關係．其最淺近者莫如求一已知函數 $f(x)$ 之積分，吾欲求 $f(x)$ 之積分，無異謂欲求一函數 $y=F(x)$，滿足 $y'-f(x)=0$ 者，是爲一最簡單之微分方程式．他如在§3.5.5中，吾人已知 $y'=\alpha y$ 必待 $y=ce^{\alpha x}$ 而得解，是亦爲微分方程式之一例．又如力學現象之闡明，非微分方程式不爲功，而在第五章中已略見之．其他數學理論及應用問題，與微分方程式發生關聯者，比比皆是．本章僅就其關於波動問題者略述之，藉示其要旨及效用；若欲由普遍觀點作系統之討論，自非本書範圍所能及也．

第一節 物理學中之振動現象

10.1.1. 力學中最簡單之振動

振動之最簡單者莫過於第五章中所討論之情形，是爲一質點 m 受彈力影響而沿 x 軸運動，所謂彈力，直指原點而與 x 成比例者，前曾以 $-kx$ 表之，其中 k 爲一正數，而負號之意則所以表示其力之向於原點者也．今更假定有一阻力，與速度 $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ 成比例，而其向與之相反者，因之其形式爲 $-r\dot{x}$（r 爲一正數，世常以阻力常數稱之）者，作用於此阻力之外，復假定有一外力，爲時間 t 之函數如 $f(t)$．如是則據 Newton 之基本定理，其運動在此三種不同之力之影響下，必爲

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f(t),$$

是爲規定 $x(t)$ 之一微分方程式．觀於以前所論，知微分方程式之解，如 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=f(t)$ 之解 $x=\int f(t)dt+c$，多至無限．故吾人在此，必求得其所有一切解，即所謂通解[1]，不僅隨 t 而變，且含有兩任意常數 c_1 及 c_2 者．將其中常數 c_1 及 c_2 規定，即可從而變得一特殊之解，謂之特解[2]．

(1) general solution; solution générale; allgemeine Integral.

(2) particular solution; solution particulière; partikuläres Integral.

故通解者，實包羅一切特解者也.

以常情測之，此理亦殊顯而可見. 蓋運動現象，決非一微分方程式所能全面規定. 一質點在某時如 $t=0$ 之時，所處地位 $x(0)=x_0$，及其時之速度 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ 何若(即所謂起始狀態)，自隨情形而異，未可一概而論. 此起始情形必有絕對之任意性，不能受任何條件之束縛，換言之，一質點得在 $t=0$ 時由任何地位以任何速度開始運動，運動開始之後，其情形遂由微分方程式決定之；而通解中之兩常數，正足以適應所起始條件，從而得一特解，以明運動情形之究竟. 至此特解爲唯一特解，適合微分方程式及起始條件者，吾人將於下節中見之.

苟在上述振動中，除彈力及阻力外，無復外力之存在，即 $f(t)=0$，則謂之**自由振動**(1)，其微分方程式謂**有齊性**(2). 苟 $f(t)$ 在 t 任意變化時不全等於 0，則謂之**强迫振動**(3)，其微分方程式謂之不齊，或謂**無齊性**(4).

10.1.2. 電振動

力學中之振動現象，如上列微分方程式所描寫者，在實際上僅有近似實現之可能，如擺在擺角微小時之情形及磁針之振動皆其顯著之例也. 其比較特別接近者，有所謂電振動.

試就圖 10.1. 所示之電路言之，假定其電感爲 μ，電阻爲 ρ，電容爲 $C=\frac{1}{\kappa}$，復假定有一外加電勢 $\phi(t)$，爲時間 t 之函數，如由一電機所供給者. 此外復以 E 表電容器中之電壓，Q 表其電荷；於是其間關係必爲 $CE=\frac{E}{\kappa}=Q$；而所謂電流 I，與 E 同爲 t 之函數者，實爲電荷在每時間單位內之變率，即電容器中電荷減少之速率，故得 $I=-\dot{Q}=-\frac{dQ}{dt}=-\frac{\dot{E}}{\kappa}$. 惟據

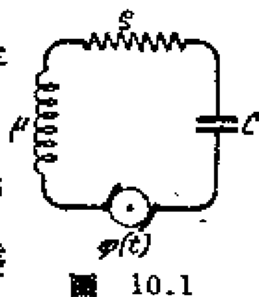


圖 10.1

Ohm 定律，電流乘電阻之積必等於電動勢(電壓)，即等於電容器中之電壓 E 減去其由於自感之反電動勢更加以外加之電動勢 $\phi(t)$. 因此之故，遂有 $I\rho=E-\mu\dot{I}+\phi(t)$ 或 $-\frac{\rho}{\kappa}\dot{E}=E+\frac{\mu}{\kappa}\ddot{E}+\phi(t)$，從而知此

(1) free vibration; vibration libre; freie Schwingung. (2) homogeneous; homogène; hemogen. (3) forced vibration; vibration contrainte; erzwungene Schwingung. (4) non-hemogeneous; hétéorgène; unhomogen.

電路中之電壓 E 必滿足　　$\kappa\ddot{E}+\rho\dot{E}+\tau E=\kappa\phi(t)$,

是爲一微分方程式,其形式與前所論者完全無異. 苟無外加之電動勢,則爲一齊性微分方程式. 試以 $-\frac{1}{\kappa}$ 乘其兩方,復求其對 t 之導數,則

$$\kappa\ddot{I}+\rho\dot{I}-\kappa I=\phi(t),$$

是爲電流 I 所滿足之微分方程式.在自由振動時(即 $\phi=0$)與電壓所滿足者完全相同也.

第二節　論自由振動

10.2.1. 齊性微分方程式之解

欲求 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$ 之解，可先求其有特殊形式者，如規定 λ，使 $e^{\lambda t}=x$ 適能滿足此方程式，其事殊不難. 蓋將 $x=e^{\lambda t}$ 及其導數 $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$,代入其中，棄去其公共因子 $e^{\lambda t}$，即得一規定 λ 之代數方程式:

$$m\lambda^2+r\lambda+k=0,$$

從而知其兩根爲

$$\lambda_1=-\frac{r}{2m}+\frac{1}{2m}\sqrt{r^2-4mk}\,,\quad \lambda_2=-\frac{r}{2m}-\frac{1}{2m}\sqrt{r^2-4mk}\,,$$

於是 $x=e^{\lambda_1 t}$ 及 $x=e^{\lambda_2 t}$ 至少在形式上必爲上列微分方程式之特解，其事可復求其導數而徵實之.明乎是,乃有三種不同情形,可得而論.

其一，$r^2-4mk>0$. 如是則 λ_1 及 λ_2 爲兩不等之負實數，而上列微分方程式即有兩特解 $x=u_1=e^{\lambda_1 t}$ 及 $x=u_2=e^{\lambda_2 t}$. 據此即可創一含有兩任意常數之解,蓋不論 c_1 及 c_2 爲任何常數,可知

$$x=c_1u_1+c_2u_2$$

必滿足上列方程式.吾人將於下節中證其爲通解,即包羅一切所有特解於其中者.

其二，$r^2-4mk=0$. 於是得一重根，隨之而微分方程式僅有一特解 $x=w_1=e^{-\frac{rt}{2m}}$. 然吾人不難證明 $x=w_2=te^{-\frac{rt}{2m}}$ 亦爲其特解①,蓋

①其理乃由於極限之考慮而測知之. 蓋 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 時, $\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$ 顯爲一特解. 若令 $\lambda_1\to\lambda_2$, 則將有 $\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}=te^{\lambda t}$.

由是求其導數.

$$\dot{x}=\left(1-\frac{r}{2m}t\right)e^{-\frac{rt}{2m}},\qquad \ddot{x}=\left(\frac{r^2}{4m^2}t-\frac{r}{m}\right)e^{-\frac{rt}{2m}},$$

代入於上列微分方程式,可見其成立:

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+\frac{r^2}{4m}x=m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0.$$

惟如是，乃知 $$x=c_1e^{-\frac{rt}{2m}}+c_2te^{-\frac{rt}{2m}}$$

亦爲其解,其中含有兩任意常數者.

其三，$r^2-4mk<0$.如是令 $r^2-4mk=-4m^2\nu^2$,得微分方程式之解爲兩複變數函數:$x=u_1=e^{-\frac{rt}{2m}+i\nu t}$ 及 $x=u_2=e^{-\frac{rt}{2m}-i\nu t}$，惟據 Euler 公式,既知 $$e^{\pm i\nu t}=\cos\nu t\pm i\sin\nu t,$$

故 u_1 之實數及虛數部分實爲

$$v_1=e^{-\frac{rt}{2m}}\cos\nu t,\quad v_2=e^{-\frac{rt}{2m}}\sin\nu t.$$

而 v_1 及 v_2 本身爲實函數,又因

$$v_1=\frac{u_1+u_2}{2},\qquad v_2=\frac{u_1-u_2}{2i}$$

之故,必同時滿足上列之微分方程式,其事可直接徵實之,無待贅也.既得兩實函數 v_1 及 v_2 爲特解,如以 c_1 及 c_2 表任意常數,即可依前例組成一通解:

$$x=c_1v_1+c_2v_2=(c_1\cos\nu t+c_2\sin\nu t)e^{-\frac{rt}{2m}},$$

此亦可寫如 $$x=ae^{-\frac{rt}{2m}}\cos\nu(t-\delta),$$

其中 a 及 δ 爲兩常數，與 c_1 及 c_2 發生之關係爲 $c_1=a\cos\nu\delta$, $c_2=a\sin\nu\delta$ 者.此結果前在第五章中已獲得之，惟其時假定 $r=0$ 耳

就上述第一第二兩種情形而論，因 $r>2\sqrt{mk}$ 或 $r=2\sqrt{mk}$,其解爲指數函數或 $te^{-\frac{rt}{2m}}$，故其 x 隨 t 之增大而漸近於0.此種運動,自無週期性可言;推原其故,實由於阻尼[1]過大(由 r 表之者)，使彈力不能引起振動也.

(1) damping; amortissement; Dämpfung.

至於 $r<2\sqrt{mk}$，有複根 λ_1、λ_2 出現時，其情形卽大異．考 $x=a\cos\nu(t-\delta)e^{-\frac{rt}{2m}}$．所表者爲諧振動之有阻尼者，其角頻率爲 $\nu=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}$，其振幅 $ae^{-\frac{rt}{2m}}$ 隨 t 而變小，且 $\frac{r}{2m}$ 愈大，其趨小愈速．此因子 $\frac{r}{2m}$ 在物理學中常稱之爲阻尼振動之對數減幅率[1]，因其振幅之對數以 $\frac{r}{2m}$ 之速率趨小也．此種阻尼振動，可由圖10.2 表達之，吾人稱 $T=\frac{2\pi}{\nu}$ 爲其週期，$r\delta$ 爲其週相位移．若 $r=0$，卽得前已論及之簡單諧振動，以 $\nu_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 爲頻率者．

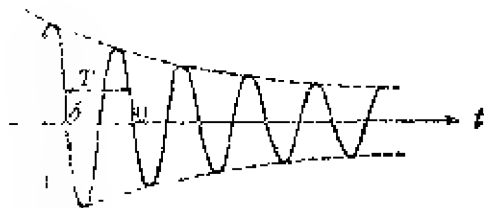


圖10.2

10.2.2. 開始條件之適應

繼此所欲論述者，爲如上獲得之通解，具中含有兩任意常數者，必可適應任何開始條件，且一切可能之解無不包羅於其中．試任意選擇一種開始狀態，謂 $t=0$ 時，其地位及速度如 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，其中 x_0 及 $\dot{x}_0$ 之值得隨意指定之，如是則就第一種情形而言，應令

$$c_1+c_2=x_0,$$
$$c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=\dot{x}_0,$$

由是卽得
$$c_1=\frac{\dot{x}_0-\lambda_2x_0}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad c_2=\frac{\dot{x}_0-\lambda_1x_0}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

就第二種情形言之，則有
$$c_1=x_0,$$
$$\lambda c_1+c_2=\dot{x}_0,\qquad\left(\lambda=-\frac{r}{2m}\right)$$

由是 c_1 及 c_2 卽得明確決定矣．最後更就第三種情形言之，用以規定常數之方程式將有下列形式：

$$a\cos\nu\delta=x_0,$$
$$a\left(\nu\sin\nu\delta-\frac{r}{2m}\cos\nu\delta\right)=\dot{x}_0,$$

由是得 a 及 δ 之值如

$$\delta=\frac{1}{\nu}\arccos\frac{x_0}{a},\qquad a=\frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2x_0^2+\left(\dot{x}_0+\frac{r}{2m}x_0\right)^2}.$$

故在上述三種情形下，必可令通解之適應任何開始條件，無疑義矣．欲證除此外別無其他可能之解，但證其不能有兩不同之解，滿足同一開始條件已足．設其有兩不同之解 $u(t)$ 及 $v(t)$，滿

(1) logarithmic decrement; logarithmische Dekrement

是 $u(0)=x_0$, $\dot{u}(0)=\dot{x}_0$ 及 $v(0)=x_0$, $\dot{v}(0)=\dot{x}_0$ 者，則 $w=u-v$ 亦爲微分方程式之解，其所滿足之開始條件爲 $w(0)=0$, $\dot{w}(0)=0$．果如是，試以 $2\dot{w}$ 乘 $m\ddot{w}+r\dot{w}+kw=0$，復注意 $2\dot{w}\ddot{w}=\frac{d}{dt}\dot{w}^2$ 及 $2w\dot{w}=\frac{d}{dt}w^2$，則有

$$\frac{d}{dt}(m\dot{w}^2)+\frac{d}{dt}(kw^2)+2r\dot{w}^2=0;$$

據是求其由 $t=0$ 至 $t=\tau$ 之積分，則因 $w(0)=0$, $\dot{w}(0)=0$ 之故，必有

$$m\dot{w}^2(\tau)+kw^2(\tau)+2r\int_0^\tau\left(\frac{dw}{dt}\right)^2dt=0.$$

細考此式之意義，若在 $\tau>0$ 時，w 不等於 0，其結果必陷於矛盾，何則，r, m, k 既假定爲正，式之左方始終爲正，欲求其成立，必 $w=u-v=0$ 而後可也．故僅有唯一之解，遂得證矣．

例　題

試求題 1－5 各方程式之通解，並求 $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ 時之特解：

1. $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=0$.

2. $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$.

3. $2\ddot{x}+\dot{x}-x=0$.

4. $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$.

5. $4\ddot{x}+4\dot{x}+x=0$.

6. 試求方程式　　$\ddot{x}+\dot{x}+x=0$.

之通解，及 $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ 時之特解；並決定此解之頻率 (ν)，週期 (T)，振幅 (a)，及週相 (δ).

7. 試求 $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=-1$ 時　　$2\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$.

之解；並計算此解之振幅 (a)，週相 (δ)，及頻率 (ν).

第三篇　論強迫振動

10.3.1.　齊性與不齊性微分方程式之關係

試將齊性與不齊性微分方程式：

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

並列而細考之，其間有密切之關係可論．苟 w 及 v 爲(2)之解，則兩者

之差 $u=w-v$ 必為(1)之解無疑. 轉言之，苟 u 為(1)之解，v 為(2)之解，則 $w=u+v$ 亦必為(2)之解. 循是以論，設有(2)之一特解，但加(1)之通解於此，即可得(2)之通解. 如何獲得(1)之通解，前已詳言之；今欲得(2)之通解，但求其一特解足矣. 此理自有其物理上之意義. 設有一强迫振動，起於外力之作用者，若合一諧振動(由(1)之解表而出之)重疊之，其結果必仍為原有之强迫振動. 當阻力出現時，其諧振動因 $e^{-\frac{rt}{2m}}$ 之影響隨時間之經過而漸趨停頓，故在此情形下討論强迫振動，可將任何諧振動重疊之，其結果不致有何影響也.

復次，觀(2)之組織，有一重要特性，可為求解時之一助. 苟 $f(t)$ 可裂為兩其他函數 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 之和: $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，又假定 $x_1=x_1(t)$ 為 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f_1(t)$ 之解，$x_2=x_2(t)$ 為 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f_2(t)$ 之解，則 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 必為(2)之解. 其理之真確，顯而可見，無待贅證. 不寧唯是，當 $f(t)$ 為兩個以上函數之和時，其理之推廣，亦無困難. 因此之故，若 $f(t)$ 可分為 n 個函數之和，則(2)之解決，可歸併於 n 個方程式，而此 n 個方程式必較易於解答，可預測也.

設 $f(t)$ 為一週期函數，則應用上述之理，必有極大成效. 據前所論，週期函數之按段光滑者可展開為 Fourier 級數，因之可由週期函數近似表達之. 惟如是，吾人所欲研討者，如何求解上列之微分方程式，其右方為

$$a\cos\omega t \quad 或 \quad b\sin\omega t,$$

其中 a,b,ω 假定為任何常數而已. 苟捨三角函數而用複變數函數，則吾人研討之對象，可集中於

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=ce^{i\omega t},$$

其中 c 為任何複數或實數可也. 如令 $c=1$，則此微分方程式實等於下列兩微分方列程式 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=\cos\omega t$ 及 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=\sin\omega t$，其一得解，其他即隨之而解也.

10.3.2. 不齊性微分方程式之解

欲求
$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=ce^{i\omega t}$$
之所有一切解,但求其一特解已足,前已詳論之矣. 假定 c 爲一實數, r 不等於 0, 則可試求一特解於 $x=\sigma e^{i\omega t}$ 之中, σ 爲待定之數,與 t 之變無關者. 設將此連同其導數 $\dot{x}=i\omega\sigma e^{i\omega t}$ 及 $\ddot{x}=-\omega^2\sigma e^{i\omega t}$ 代入上式,復乘去其公共因子 $e^{i\omega t}$, 則有
$$-m\omega^2\sigma+ir\omega\sigma+k\sigma=c,$$
由是而 σ 得以規定如
$$\sigma=\frac{c}{-m\omega^2+ir\omega+k}.$$
倒言之, 苟 σ 果有如是形式,則 $\sigma e^{i\omega t}$ 必爲上列微分方程式之一特解.

欲明此結果之意義,特將 σ 寫如
$$\sigma=c\frac{k-m\omega^2-ir\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}=c\alpha e^{-i\omega\delta},$$
其中 α 及 $\omega\delta$ 與 m,r,k 之關係爲
$$\alpha^2=\frac{1}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}, \sin\omega\delta=r\omega\alpha, \cos\omega\delta=(k-m\omega^2)\alpha.$$
於是前所獲得之特解遂有如下形式
$$x=c\alpha e^{i\omega(t-\delta)}.$$
考此結果,其意即謂由於力 $c\cos\omega t$,其所產生之影響爲 $c\alpha\cos\omega(t-\delta)$, 而由於 $c\sin\omega t$ 之影響則爲 $c\alpha\sin\omega(t-\delta)$. 故力所引起之影響,其函數與力爲同類,惟其振幅隨 $\alpha:1$ 之比例而增大,其週相有 $\omega\delta$ 之變化耳.

既得此特解,則其所有一切解可根據前段所論而盡得之.於是有下列定理:凡
$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=ce^{i\omega t}$$
之解必盡在 $x=c\alpha e^{i\omega(t-\delta)}+u$ 之中, 其中 u 爲 $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$ 之通解,而 α 及 δ 之意義爲:
$$\alpha^2=\frac{1}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}, \sin\omega\delta=r\omega\alpha, \cos\omega\delta=(k-m\omega^2)\alpha.$$
由是可見其通解中含有兩個任意常數, 得用以適應任何開始條件 $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, 一切問題隨之迎刃而解矣.

10.3.3. 表達共振現象之曲線

欲明上述結果在應用上之意義，當就 α 隨 ω 而變之函數，即

$$\phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}}$$

加以研討．考 k,m,r 三常數既定，則原有振動之性質為何如，已隨之而定，茲所討論之強迫振動，乃由於外力之作用，而此種外力曾假定有週期性且有各種不同之角頻率者．然則此強迫振動如何隨外力影響而變化，實為問題關鍵之所在．為討論之便，可令 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$．此 ω_0 實為自由振動當 r 為 0 時之角頻率，因之可稱之為自由振動無阻尼時之**固有頻率**(1)．在實際上，因阻尼之存在，其頻率不等於 ω_0 而等於

$$\nu=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}},$$

其中自必假定 $4km-r^2>0$（否則無所謂頻率，蓋無週期性可言也）．

觀 $\phi(\omega)$ 當 ω 趨大時趨近於 0，且其趨 0 之數量級為 $\frac{1}{\omega^2}$．又因 $\phi(0)=\frac{1}{k}$ 之故，可知外力之頻率為 0，其量為 1 者，即一恆久不變之力 1，必能促使強迫振動移動 $\frac{1}{k}$．當 ω 為正數時，$\phi'(\omega)$ 除 $(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2$ 之導數為 0 時，即

$$-4m\omega(k-m\omega^2)+2r^2\omega=0$$

成立時外，不能為 0．苟其有一 $\omega_1>0$，足令此式成立者，自必假定 $2km-r^2>0$，於是得

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{2m^2}}=\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{r^2}{2m^2}}.$$

由是以觀，$\phi(\omega)$之值處處為正，隨 $\omega\to\infty$ 而漸趨於 0，惟 ω 不甚大時實為 ω 之獨升函數，故其間必有一莫大值，可以斷言．此 ω_1，足令 $\phi(\omega)$之值為莫大者，常稱之為強迫振動之**共振**(2)**頻率**．試將 ω_1 代入於 $\phi(\omega)$，得其值為

$$\phi(\omega_1)=\frac{1}{r\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}}.$$

(1) natural frequency; nombre de vibrations propre; Eigenschwingungszahl.

(2) resonance; resonance; Resonanz.

此在 $r\to 0$ 時實無限制趨大．當 $r=0$，即無阻尼存在時，則 $\phi(\omega)$ 在 $\omega=\omega_1$ 時有一無限點．此為一種極限情形，吾人當從茲討論之。

$\phi(\omega)$之圖形，世常稱之為**共振曲線**．據上所述，若 $\omega=\omega_1$（此在 r 相當小時與固有頻率相去甚近），則 $a=\phi(\omega_1)$ 之值特大；此種現象即所謂共振現象，在 m 及 k 固定時隨 r 之趨小而甚為顯著。

試擇 $m=1, k=1$，因之 $\omega_0=1$，從而標繪各共振曲線如圖 10.3，其中 $\phi(\omega_1)=D=\frac{1}{2}r$ 為各不相同之值．當 D 不甚大時，在 $\omega=1$ 附近顯有共振之發生．若 $D=0$，則 $\phi(\omega)$ 在 $\omega=1$ 時

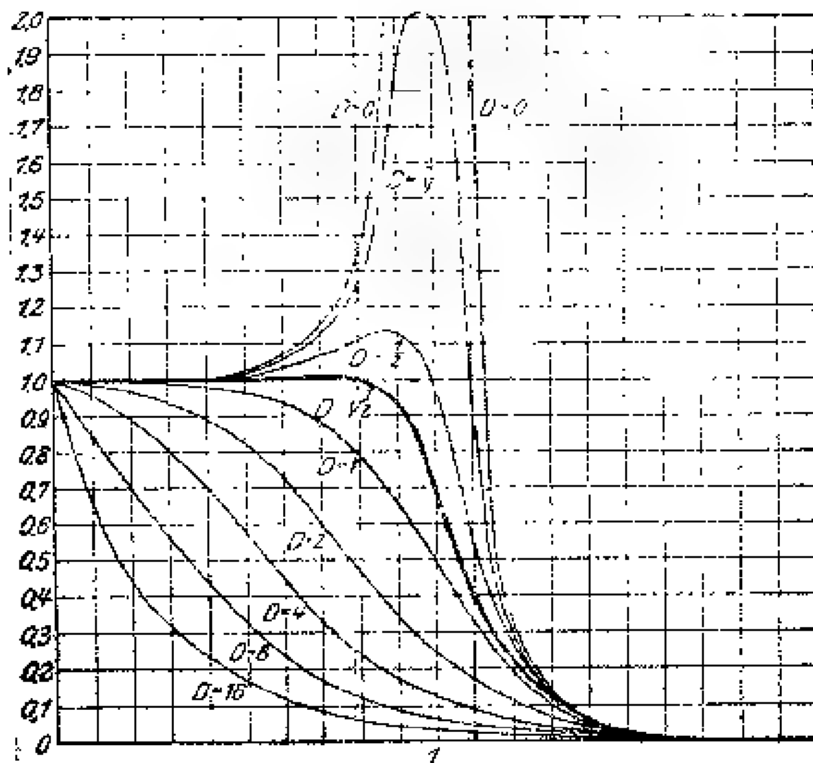


圖10.3

無莫大值而有一無限點．當 D 趨大時，ω_1 隨之左移，直至 $D=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，得 $\omega_1=0$，其時切線水平之處移於原點，不復有莫大值可言．若 $D>\frac{1}{\sqrt{2}}$，則 $\phi'(\omega)$ 不復有零點；其共振曲線不復有莫大值，而共振現象亦不可見．

要之，在

$$2km-r^2\leqq 0$$

成立時即無共振現象．當式中等號有效時，則共振曲線在 $\omega_1=0$ 時達其最高點 $\phi(0)=\frac{1}{k}$，其時之切線呈水平之勢，不久即趨於0，讀者可自思得之也．

10.3.4. 強迫振動之特性

共振現象之出現於強迫振動，已如上所述者，惟欲透澈闡明強迫振動之特性，當就

$$x(t)=ce^{-i(\omega t-\delta)}+c_1u_1+c_2u_2$$

而詳考之。此為其特解 $ce^{-i(\omega t-\delta)}$ 與固有振動重疊而成。惟固有振動隨時間而漸趨消滅，且其消滅之遲速，視 r 之大小而異，其結果終趨於

$$ce^{-i(\omega t-\delta)}.$$

試假定在 $t=0$ 時，質點處於靜止狀態，即 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$。以此條件規定 c_1 及 c_2，可見此二者不皆為 0。設外力之頻率為 ω_1，換言之，在共振發生時，其最大振幅 $c=\varphi(\omega_1)$ 必在 $c_1u_1+c_2u_2$ 漸消後而始現，且 r 愈小，則其出現愈遲，其理甚明，不待贅也。

若 $r=0$，即所謂無阻尼振動者，則於外力之頻率等於固有頻率 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 時，上述結果自不能有效，蓋 $\varphi(\omega)$ 無限制增大故也。由是以論，吾人不能希望以 $\sigma e^{i\omega t}$ 解 $m\ddot{x}+kx=e^{i\omega t}$，然未嘗不可以 $\sigma te^{i\omega t}$ 試解之。因

$$\dot{x}=\sigma e^{i\omega t}(1+i\omega t),\quad \ddot{x}=\sigma e^{i\omega t}(2i\omega-t\omega^2),$$

試將此代入於微分方程式，則有

$$\sigma(2im\omega-m\omega^2t+kt)=1,$$

因 $m\omega^2=k$ 之故，遂得 $\sigma=\frac{1}{2im\omega}$。

據是以論，若在無阻尼振動時有共振現象發生，則其解為

$$x=\frac{t}{2im\omega}e^{i\omega t}=\frac{t}{2i\sqrt{km}}e^{i\omega t}.$$

或以實數表之，若 $f(t)=\cos\omega t$，則 $x=\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{km}}\sin\omega t$，至 $f(t)=\sin\omega t$ 時，則 $x=-\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{km}}\cos\omega t$。此函數所表達者雖為一種振動，惟其振幅隨時間而增大。其所重疊之固有振動，因無阻尼之故，不復隨時間而消滅，且始終保持其原有之振幅，不過與強迫振動中隨時間變大之振幅相較，似已無足重輕。循是以觀，質點之坐標將在繼續變大之範圍中來往振動，永無盡期。所謂共振函數在無阻尼時之無限點，其意義

卽於此顯示無遺矣.

10.3.5. 記錄儀器之製造問題略論

上述理論在物理及工程學中有甚重要應用,茲將略示其大意,以引起讀者之興趣. 如電流計,傳音器及無線電之收音機等, 其主要用途,簡而言之, 不外記錄一受週期性外力而振動之質點坐標 x, 而 x 爲滿足上列微分方程式之解,至少近似滿足之,固理之顯而易見者.

試以 T 表外力 $f(t)$ 之週期,則 $f(t)$ 可展開如

$$f(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\gamma_l e^{\frac{i2\pi l}{T}t}$$

或以 $\sum_{l=-N}^{N}\gamma_l e^{\frac{i2\pi l}{T}t}$ 近似替代之,其準確程度已可滿足. 如是則上列微分方程式之解,除重疊之固有振動暫置不論外,爲一無盡級數

$$x(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sigma_l e^{\frac{i2\pi l}{T}t},$$

或其近似式

$$x(t)=\sum_{l=-N}^{N}\sigma_l e^{\frac{i2\pi l}{T}t}.$$

據上述結果, 可知

$$\sigma_l=\gamma_l a_l e^{-\frac{i2\pi l}{T}\delta_l}.$$

其中 a_l 及 δ_l 爲

$$a_l^2=\frac{1}{\left(k-ml^2\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2+r^2l^2\frac{4\pi^2}{T^2}},\qquad \tan\frac{2\pi l}{T}\delta_l=\frac{2\pi lr}{T\left(k-m\frac{4\pi^2l^2}{T^2}\right)}$$

於是任何週期性外力所引起之影響可設法闡明如次. 試將外力析爲若干分力,同具週期性者, 如 Fourier 級數中之各項,則每一分子皆足以促成其振幅之變, 同時又必引起週相位移,而此種影響重疊之後卽得其總影響.專就振幅之變化言之(週相位移之變,以非聽覺所及,故不甚重要;若欲討論之,與討論振幅之理同,故從略).但細考共振曲線之性質,卽可明記錄儀器之運動與外力所發生之影響爲何如.當 l 或 $\omega\left(=\frac{2\pi}{T}l\right)$ 甚大時,外力之頻率對於 x 之影響幾不可見,而其接近於共振頻率者,卽與 ω_1 相差不遠者對 x 之影響甚大.

在製造物理或工程中各種記錄儀器時, m, r 及 k 三常數自可供吾人任意選擇, 選擇之標準無他,必求共振曲線之形狀最能適應其所要求之條件.於是有兩事須特加考慮.其一,必求儀器富於靈敏度, 其意卽對於任何頻率 ω, 必求 a 愈大愈妙. 據上所述,當 ω 不甚大時, a 約與 $\frac{1}{k}$ 成比例,故 $\frac{1}{k}$ 在外力頻率相當小時可作爲量靈敏度之標準.故記錄儀器之靈敏度將隨 $\frac{1}{k}$ 之增大或 k 之減小而益見增強也.

其次，吾人當求 a 受外力作用之影響不致過甚．設以 $f(t)=\sum_{l=-N}^{N}\gamma_l e^{i\frac{2\pi l}{T}t}$ 爲外力之近似表達式，所欲求者，爲對於 $\omega\leq N\frac{2\pi}{T}$，$a$ 之值幾乎不變．吾人當設法選擇 m，k 及 r 使無特大之共振發生，又使共振曲線最初有一水平切線．如是則 $\Phi(\omega)=a$ 在 ω 相當小時幾爲一常數．據前所論，此事可令

$$2km-r^2=0$$

而實現之．故 m 及 k 如已定，可設法選擇 r 以求適應此條件，如插入適當之阻力於電路中即可．於是當 ω 自 0 變至 ω_0（無阻尼振動之固有頻率）鄰近之範圍中，所要求之條件已得滿足，觀於共振曲線自明，惟在 ω_0 以上，則阻尼甚大．由是以論，欲適應上述要求，當選擇 k 如是大，使 ω_0 大於任何欲量之外力頻率，然後依 $2km-r^2=0$ 以擇 r 可矣．

振動現象在自然界中之重要地位，殆爲人人所共認；本章僅就其最簡單者略述之．吾人當於本書下卷中，俟兩個以上變數之函數理論建立之後，更從系統之觀點研討此重要問題．

例　題

試就下列各方程式求其滿足開始條件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$ 之解．題 1－4 更決定其振幅、周相及振幅最大時 ω 之值：

1．$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\cos\omega t$．

2．$\ddot{x}+\dot{x}+x=\cos\omega t$．

3．$\ddot{x}+\dot{x}+x=\sin\omega t$．

4．$2\ddot{x}+2\dot{x}+x=\cos\omega t$．

5．$\ddot{x}+4\dot{x}+4x=\cos\omega t$．

定理及公式撮要

1. 雙曲函數

(第125—130頁)

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}).\qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}).\qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$

$$\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1\qquad \cosh^{2}x=\frac{1}{1-\tanh^{2}x}.$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y.$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y.$$

$$\cosh^{2}x=\frac{1}{2}(\cosh 2x+1).\qquad \sinh^{2}x=\frac{1}{2}(\cosh 2x-1).$$

$$\operatorname{ar}\sinh x=\log\{x+\sqrt{x^{2}+1}\}.$$

$$\operatorname{ar}\cosh x=\log\{x\pm\sqrt{x^{2}-1}\},(x\geqq 1).$$

$$\operatorname{ar}\tanh x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\ (|x|<1).$$

$$\operatorname{ar\,coth} x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\quad(|x|>1).$$

2. 數序及級數之審斂法

一　無盡數序(第 27 頁).

Cauchy 審斂法(第 29 頁)：一數序 a_n 收斂之充要條件，為任與一正數 ε，必有一數 N，當 $n>N$，$m>N$ 時恒致

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

極限之運算(第 30—31 頁)：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，則

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\quad 但 \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0.$$

二　無盡級數(第 273 頁以下).

Cauchy 審斂法(第 274 頁)：級數 $\sum a_n$ 收斂之充要條件，為任與一正數 ε，必有一數 N，當 $m>n>N$ 時，恒致

$$|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m|<\varepsilon.$$

注意——以下各審斂法均係充分條件，而非必要.

比較檢驗法(第 281 頁)：若有正數 b_n，於 n 之一切值均滿足 $b_n\geqq|a_n|$ 者，且 $\sum b_n$ 係斂級數，則 $\sum a_n$ 亦必收斂.

檢比與檢根法，(第 283—285 頁)：若有一數 N，又有一數 $q<1$，於一切 n 之大於 N 者恒致

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q\quad 或\quad \sqrt[n]{|a_n|}<q,$$

則 $\sum a_n$ 為收斂；推而言之，若有一數 $k<1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k,$$

即可知 $\sum a_n$ 為收斂.若有一數 $k>1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k,$$

則 Σa_n 爲發散.

Leibniz 審斂法(第 277 頁)：苟 Σa_n 之項交爲正負，而 $|a_n|$ 獨行趨 0，則 Σa_n 爲收斂.

3. 導數公式

一 一般法則(基本概念，第 66 頁以下).

$$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x).$$

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2},\quad g(x)\neq 0\ (\text{第 } 98-99 \text{ 頁})$$

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=f^{(n)}xg(x)+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x)$$
$$+\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x)+\cdots+f(x)g^{(n)}(x)$$

(Leibniz 公式，第 139 頁).

鏈導法：苟 $f(x)=g\{\phi(x)\}$,

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{d\phi}\frac{d\phi}{dx},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2g}{d\phi^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\frac{dg}{d\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2},\text{等等}$$

(第 109 頁以下，第 139 頁)

以參變數表達之函數：苟 $x=x(t)$，$y=y(t)$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}\ (\text{第 } 191 \text{ 頁})$$

逆函數：

$$\frac{dy}{dx}=1\bigg/\frac{dx}{dy}\ (\text{第 } 103 \text{ 頁})$$

二 特殊公式(第70—71,100—101,106—108,113以下,126—128頁)

$(x^n)'=nx^{n-1}$.

$(\sin x)'=\cos x$ $\qquad$ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\cos x)'=-\sin x$ $\qquad$ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$. $\qquad$ $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$, $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

$(\sinh x)' = \cosh x$. $(\operatorname{ar}\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$(\cosh x)' = \sinh x$. $(\operatorname{ar}\cosh x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (x>1)$.

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$. $(\operatorname{ar}\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}, (|x|<1)$.

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$.

$(\operatorname{ar}\coth x)' = \frac{1}{1-x^2}, (|x|>1)$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$；其特例，$(\log x)' = \frac{1}{x}$.

$(a^x)' = a^x \log_e a$；其特例，$(e^x)' = e^x$.

$(u^v)' = u^v(vu'/u + v'\log u)$.

4. 積分公式

一 一般法則(基本概念，第 58 頁以下)

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \text{(第 61, 101 頁)}.$$

積分之估值. 苟 $f(x) \geqq g(x)$, $b \geqq a$,

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx \quad \text{(第 91 頁)}.$$

分部積分法(第 151 頁)：

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

變數交替法(第 143—147 頁)：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\{\phi(u)\}\phi'(u)du,$$

其中 $$a=\varphi(\alpha),\quad b=\varphi(\beta).$$

導數與積分之關係(第80頁以下):

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du=f(x).$$

旁義積分(第170—177頁):

苟 $f(x)$ 在變程 $a\leqq x<b$ 中處處連續,而在 $x=b$ 點無限制趨大;則祇須在 $x=b$ 之鄰近,

$$|f(x)|\leqq\frac{M}{(b-x)^{\nu}},$$

其中 $\nu<1$,卽知 $\int_a^b f(x)dx$ 爲(絕對)收斂.(第172頁).

苟 $x\geqq A$ 時,有

$$|f(x)|\leqq\frac{M}{x^{\nu}},$$

其中 $\nu<1$,則 $\int_a^\infty f(x)dx$ 爲(絕對)收斂.(第172—173頁).

二 特殊公式(第61—66,92—94,101以下,106,113以下,142—143,144,147—150,152以下).

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}.\qquad \int\log x\,dx=x\log x-x.$$

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|.\qquad \int\frac{1}{x}\log x\,dx=\frac{1}{2}(\log x)^2.$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}.\qquad \int\frac{1}{x\log x}dx=\log|\log x|.$$

$$\int x^a\log x\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x-\frac{1}{a+1}\right),\quad a\neq-1.$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x.\qquad \int\sinh x\,dx=\cosh x.$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x.\qquad \int\cosh x\,dx=\sinh x.$$

$$\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|.\qquad \int\tanh x\,dx=\log\cosh x.$$

$$\int\cot x\,dx=\log|\sin x|.\qquad \int\coth x\,dx=\log|\sinh x|.$$

$$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$$

$$\int\arccos x\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}.$$

$$\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

$$\int \operatorname{arc\,cot} x\,dx = x \operatorname{arc\,cot} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

$$\int \operatorname{ar\,sinh} x\,dx = x \operatorname{ar\,sinh} x - \sqrt{1+x^2}.$$

$$\int \operatorname{ar\,cosh} x\,dx = x \operatorname{ar\,cosh} x - \sqrt{x^2-1}.$$

$$\int \operatorname{ar\,tanh} x\,dx = x \operatorname{ar\,tanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2).$$

$$\int \operatorname{ar\,coth} x\,dx = x \operatorname{ar\,coth} x + \frac{1}{2}\log(x^2-1).$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \qquad \int \frac{dx}{\sinh x} = \log\left|\tanh\frac{x}{2}\right|.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\operatorname{ar\,tanh}\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2\operatorname{arc\,tan}\left(\tanh\frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \log|\tan x|. \qquad \int \frac{dx}{\sinh x\cosh x} = \log|\tanh x|.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x. \qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x. \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x).$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x).$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{a}{b}\tan x\right) \\ \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x - b^2\cos^2 x} &= -\frac{1}{ab}\operatorname{ar\,tanh}\left(\frac{a}{b}\tan x\right) \end{aligned}\right\} a, b \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\operatorname{ar\,tanh}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\log\dfrac{a-x}{a+x}, & |x|<a. \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{ar\,coth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\log\dfrac{x-a}{x+a}, & |x|>a,\ a>0. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} +\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}. \\ -\operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{a}\operatorname{arc}\sin\frac{a}{x}. \\ +\frac{1}{a}\operatorname{arc}\cos\frac{a}{x}. \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{ar}\sinh\frac{x}{a} = \log\{\pm x+\sqrt{x^2+a^2}\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{ar}\cosh\frac{x}{a} = \log\{x\pm\sqrt{x^2-a^2}\}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{ar}\sinh\frac{a}{x} = -\frac{1}{a}\log\frac{\pm a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{ar}\cosh\frac{a}{x} = -\frac{1}{a}\log\frac{a\pm\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}a^2\operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = -\frac{1}{2}a^2\operatorname{ar}\cosh\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ar}\sinh\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-c}}\operatorname{ar}\tanh\frac{x+b}{\sqrt{b^2-c}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\log\left|\frac{\sqrt{b^2-c}-x-b}{\sqrt{b^2-c}+x+b}\right|,$$

$c<b^2$，卽 $x^2+2bx+c=0$ 有二實根。

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc}\tan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}},$$

$c>b^2$，卽 $x^2+2bx+c=0$ 有二虛根。

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx).$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx).$$

$$\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$$

遞演公式(第153頁以下)

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$$

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx.$$

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx.$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

$$\int (\log x)^n\, dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\, dx.$$

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx.$$

$$\int x^a (\log x)^n\, dx = \frac{x^{a+1}(\log x)^n}{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^a (\log x)^{n-1}\, dx \qquad (a \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

三　特殊函數之積分

(a)有理函數：分解爲部分分數後，可化成下列三種基本式(第156—162頁)：

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n} = \frac{1}{(c-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{du}{(1+u^2)^n},$$

其中 $c-b^2>0$，$u=\dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$，右方之積分已可應用上舉遞演公式之末一式.

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2bx+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} - b\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n}.$$

右方之積分即係第二種基本式.

以下各式中, R 表有理函數.

(b) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (第 163 頁).

交替式: $t=\tan\frac{x}{2}$, 於是

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}.$$

但 R 若爲一偶函數或僅含 $\tan x$, 則下之交替式較爲便利:

$u=\tan x$, $\sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}$, $\frac{dx}{du}=\frac{1}{1+u^2}$.

(c) $\int R(\cosh x, \sinh x)\,dx$ (第 164 頁):

交替式: $t=\tanh\frac{x}{2}$, 於是

$$\sinh x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1-t^2}.$$

(d) $\int R(e^{mx})dx$:

交替式: $t=e^{mx}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{mt}$.

(e) $\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$ (第 164 頁):

交替式: $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}$,

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

(f) $\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx$ (第 164 頁):

交替式: $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\quad x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\quad \sqrt{x^2-1}=\frac{2t}{1-t^2}$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4t}{(1-t^2)^2}.$$

(g) $\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$ (第 164—165 頁):

交替式: $t=x+\sqrt{x^2+1}$, $\quad x=\frac{t^2-1}{2t}$, $\quad \sqrt{x^2+1}=\frac{1+t^2}{2t}$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+1}{2t^2}.$$

(h) $\int R(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})dx$ (第 165 頁):

以変替式 $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 可將此積分化爲前列三式之一.

(i) $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx$(第 [illegible] 頁).

変替式: $\xi = \sqrt{\alpha x+\beta}$ 或 $x = \frac{1}{\alpha}(\xi^2 - \beta)$, $\frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{\alpha}$.

(j) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx$(第 166 頁).

変替式: $\xi = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$, $x = \frac{\beta\xi^n - b}{a - \alpha\xi^n}$, $\frac{dx}{d\xi} = \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha\xi^n - a)^2} n\xi^{n-1}$.

5. 勻斂性與無盡運算之互易先後

勻斂性之定義見第 [illegible] 頁.

在一閉程中勻斂而各項均係連續函數之級數，必在該變程中代表一連續函數(第 293 頁).

若 $|f_n(x)| \leqq a_n$ 而 $\sum a_n$ 爲收斂，則 $\sum f_n(x)$ 必(絕對)勻斂(第 293 頁).

求和與求導數之互易先後(第 [illegible] 頁): 任何由連續函數組成之斂級數可逐項求導數，惟以所得級數勻斂者爲限.

求和與求積分之互易先後 (第 294—295 頁): 任何由連續函數組成之勻斂級數可逐項求積分，所得之級數亦必勻斂.

6. 特殊極限

Stirling 公式(第 269 頁).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

Wallis公式(第 154—155, 271, 339 頁)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right).$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

(關於無盡乘積見第 316—318 頁).

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \qquad \text{(第 119 頁).}$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}^{\infty}\frac{1}{1-p^{-s}},\ s>1 \qquad (第 317 頁).$$

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad (第 338—339 頁).$$

Γ 函數之定義(第 173—174 頁).

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dx \qquad (x\geqq 1);$$

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x);$$

苟 x 爲一正整數 n，則

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

函數之數量級(第 130—134 頁).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{cx}}{x^{c}}=\infty,\quad c>0 \qquad (第 132 頁).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha}}=0,\quad \alpha>0 \qquad (第 132 頁).$$

$$\lim_{x\to 0}x^{\alpha}\log x=0,\quad \alpha>0 \qquad (第 134 頁).$$

7. 特殊定積分

三角函數之垂直關係(第 149—150 頁).

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n, n\neq 0.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0.$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n.\\ \pi, & m=n, n\neq 0.\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\pi. \qquad (第 174—175, 316, 343 頁).$$

8. 中値定理

導數之中値定理(第 74 頁):

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h), 0<\theta<1.$$

苟 $f(x)=f(x+h)=0$，卽得 Rolle 定理(第 75 頁): 在函數二零點之間恆有其導數之一零點.

普遍中值定理(第 97, 1[illegible] 頁):

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

其中 ξ 爲介於 a 及 b 間之中值.

Taylor 定理(第 233—235 頁):

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n,$$

其餘項(第 235—237 頁)

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{1}{n!}\int_0^h(h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)d\tau\\&=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)\\&=\frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h)\qquad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

積分之中值定理(第 91 頁):

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi),\quad a\leqq\xi\leqq b.$$

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b p(x)dx,\quad p(x)\geqq 0.$$

9. 級數展開式: Taylor 級數, Fourier 級數

一　冪級數(其定義見第 297 頁).

(a)一般冪級數:

任何含一個變數之冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

均有一收斂半徑 ρ (可爲零或無限大);此級數當 $|x|<\rho$ 時爲收斂,實則在每變程 $|x|\leqq\eta$ 中 $(\eta<\rho)$, 均爲絕對勻斂;當 $|x|>\rho$ 時, 則爲發散(第 298 頁).

苟 Taylor 定理中之餘項隨 n 之增加而趨於零, 即得無盡冪級數(第 236 頁):

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$$

(b)特殊 Taylor 級數 (第 230—232, 237—239, 302—305, 320—

321 頁):

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

$$-1<x\leqq 1.$$

$$\left.\begin{aligned}
e^x&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\sinh x&=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\
\cosh x&=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots
\end{aligned}\right\}\ x\text{ 不限何值.}$$

$$\tan x=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu-1},\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};$$

$$x\cot x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{2^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu},\qquad -\pi<x<\pi.$$

其中 $B_{2\nu}$ 爲 Bernoulli 數(第 321 頁).

$$\left.\begin{aligned}
\arcsin x&=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots\\
\operatorname{ar}\sinh x&=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots\\
\arctan x&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots
\end{aligned}\right\}-1\leqq x\leqq 1.$$

$$\operatorname{ar}\tanh x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\qquad |x|<1.$$

二項式級數:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1<x<1.$$

苟 $\alpha>-1$, $x=1$ 時亦合,

苟 $\alpha\geqq 0$, $x=-1$ 時亦合.

其特例:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots,$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots.$$

橢圓積分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right\}.$$

二　Fourier 級數

苟函數 $f(x)$ 在變程 $-\pi\leq x\leq\pi$ 中為按段光滑，即其首重導數為按段連續，則 Fourier 級數

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

其中　$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos\nu t\,dt,\quad b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin\nu t\,dt,$

必在全程中絕對收斂. 苟 $f(x)$ 作若干有限次之跳躍，而在其他各處其 $f'(x)$ 為按段連續，則此級數在不含間斷點之每閉程中均為均斂. 在 $f(x)$ 連續之各點上，此級數即代表函數 $f(x)$ 之值，而在 $f(x)$ 不連續之各點上，代表 $f(x)$ 左右兩極限之算術中數(第 340—344 頁).

10. 莫大及莫小值

下述法則僅適用於莫大及莫小值之在所考區域內部者.

欲函數 $y=f(x)$ 於 $x=\xi$ 時取一莫大或莫小值，必 $f'(\xi)$ 等於零. 若此條件已獲滿足，尚須考 $f(x)$ 之導數至第幾重始不等於零. 苟其重數為偶，則必有一莫大或莫小值；苟為奇，則既無莫大亦無莫小值. 在前一種情形，當視此不等於零之導數為負或正以決定其為莫大或莫小(第 179 頁以下).

11. 曲線

以下之 ξ,η 均指流動坐標.

曲線之方程式:

$$(a)\ y=f(x),\quad (b)\ F(x,y)=0,\quad (c)\ x=\phi(t),y=\psi(t).$$

在 (x,y) 點上之切線方程式(第 192 頁):

$$(a)\ \eta-y=(\xi-x)f'(x),\quad (b)\ (\xi-x)F_x+(\eta-y)F_y=0,$$

$$(c)\ \{\xi-\phi(t)\}\psi'(t)-\{\eta-\psi(t)\}\phi'(t)=0.$$

在 (x,y) 點上之法線方程式(第 192 頁):

$$(a)\ \xi-x+(\eta-y)f'(x)=0,\quad (b)\ (\xi-x)F_y-(\eta-y)F_x=0,$$

$$(c)\ \{\xi-\phi(t)\}\phi'(t)+\{\eta-\psi(t)\}\psi'(t)=0.$$

曲率(第 205—206 頁):

$$(a)\ k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

$$(b)\ k=-\frac{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2}{(F_x{}^2+F_y{}^2)^{3/2}},$$

$$(c)\ k=\frac{\dot\phi\ddot\psi-\dot\psi\ddot\phi}{(\dot\phi^2+\dot\psi^2)^{3/2}}.$$

曲率半徑(第 206 頁):

$$\rho=\frac{1}{|k|}.$$

法包線(曲率中心之軌跡)(第 207,226—229 頁):

$$(a)\ \xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''};$$

$$(b)\ \xi=x+F_x\frac{F_x{}^2+F_y{}^2}{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2};$$

$$\eta=y+F_y\frac{F_x{}^2+F_y{}^2}{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2};$$

$$(c)\ \xi=\phi-\dot\psi\frac{\dot\phi^2+\dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi-\ddot\phi\dot\psi},\qquad \eta=\psi+\dot\phi\frac{\dot\phi^2+\dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi-\ddot\phi\dot\psi}.$$

切展線(第 228 頁):

$$\xi=x+(a-s)\dot{x},\qquad \eta=y+(a-s)\dot{y},$$

其中 a 為一任意常數，而 s 為由一已知點起量之弧長.

反凹點(第 181 頁)：一反凹點之必要條件為

$$(a)\ y''=0,\quad (b)\ F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2=0,$$

$$(c)\ \dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=0.$$

兩曲線間之夾角(第 193 頁)：

$$(b)\ \cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\sqrt{G_x^2+G_y^2}},$$

$$(c)\ \cos\omega=\frac{\dot{x}\dot{x}_1+\dot{y}\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2}}.$$

其特例，若

$$(b)\ F_xG_x+F_yG_y=0,\qquad (c)\ \dot{x}\dot{x}_1+\dot{y}\dot{y}_1=0,$$

則兩曲線正交；若

$$(b)\ F_xG_y-F_yG_x=0,\qquad (c)\ \dot{x}\dot{y}_1-\dot{x}_1\dot{y}=0,$$

則兩曲線相切；若

$$f(x)=g(x),\quad f'(x)=g'(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x),$$

$$f^{(n+1)}(x)\neq g^{(n+1)}(x),$$

則兩曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 在 x 點上有 n 重接觸(第 242 頁).

12. 弧長、面積及體積

弧長(第 201—205 頁)：設一平面曲線之方程式為

$$(a)\ y=f(x),\quad (b)\ F(x,y)=0,\quad (c)\ x=\phi(t),\ y=\psi(t),$$

$$(d)\ (極坐標)\ r=r(\theta),$$

則弧長為

$$(a)\ s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2},\qquad (c)\ s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

$$(b)\ s=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2+F_y^2}\,dx,\quad (d)\ s=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

平面上之面積：由曲線

$$r=r(\theta)$$

及兩矢徑 θ_0,θ_1(其中 r,θ 爲圓坐標)所圍之面積爲

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\,d\theta. \qquad \text{(第 201 頁)}$$

由曲線

$$y=f(x),$$

兩縱線 $x=x_0, x=x_1$, 及橫軸所圍之面積爲

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx. \qquad \text{(第 60 頁)}$$

雜　題

第 一 章

1.設 p,q 均為整數，試證將 p/q 化為小數，非位數有盡，即自某位起循環．更證凡有盡或循環小數必代表一有理數．

2.試將 39 以三進位法表示之．

3.若(a)二進位法，(b)五進位法，為通常所習用者，問「一百五十六」一數將如何寫法?

4.將後列各數以十二進位法表示之：(a)1,000,(b)50,000,(c)20,736,(d)$^1/_8$,(e)$^1/_{64}$,(f)$^1/_5$.

5.吾人可以下法求 $\sqrt{2}$ 至一位小數：$1^2=1<2$，$2^2=4>2$，故 $1<\sqrt{2}<2$．其次，$1.3^2=1.69<2$，$1.4^2=1.96<2$，$1.5^2=2.25>2$，故 $1.4<\sqrt{2}<1.5$．

(a)如法再推求一步．

(b)同法計算 $\sqrt{7}$ 至兩位小數．

6.欲下列不等式成立，問 x 應取何值?

(a) $x^2+3x+1\geqq 0$.

(b) $x^2-x+1\geqq 0$.

(c) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqq 6$.

(d) $3x-2\geqq x^3$.

7.試證兩正數 a,b 之算術中數 $\dfrac{a+b}{2}$ 不小於幾何中數 $\sqrt{ab}$，

即
$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

問等號何時適用?

8 由 $\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ 定義之數 ξ 稱為兩正數 a,b 之調和中數．試證幾何中數不小於調和中數，即 $\sqrt{ab}\geqq\xi$.

問等號何時適用?

9* 設 a,b,c 為正數，試示下列不等式均能成立：

(a) $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$.

(b) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$.

(c) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqq abc(a+b+c)$.

10. x_1,x_2,x_3，及 $a_{ik}(i,k=1,2,3)$ 諸數均為正，復有 $a_{ik}\leqq M$ 及 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqq 1$，

試證 $$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{33}x_3^2\leqq 3M$$

11*. 若 $a_1,a_2,\cdots a_n$，及 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 諸數滿足不等式 $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n$，

$b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_n$，則

$$n\sum_1^n a_ib_i\geqq\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right).$$

試證之.

12. 試證下列二項式係數之性質：

(a) $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots\pm\binom{n}{n}=0.$

(b) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$

(c) $1\cdot2\binom{n}{2}+2\cdot3\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)n\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}.$

(d) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

(e) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$

13. 試求

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k+1)-(\nu-1)\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k)$$

自 $\nu=1$ 至 $\nu=n$ 之和，試證

$$\sum_{\nu=1}^n \nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)=\frac{n(n+1)\cdots(n+k+1)}{k+2}.$$

14. 試應用 $\nu^3=\nu(\nu+1)(\nu+2)-3\nu(\nu+1)+\nu$ 之關係，以求 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

15. 試求

(a) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

(b) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}.$

(c) $\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$

16. 試就下列算術級數各求一表達第 n 項之公式：

(a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, $\cdots$,

(b) $-7, -10, -9, 1, 25, 68, \cdots$.

17.*試證 k 階算術級數最初 n 項之和為

$$aS_k + bS_{k-1} + \cdots + jS_1 + gn,$$

其中 S_p 表最初 n 個 p 次冪之和，$a, b, \cdots, j, g$ 均與 n 無關．試就題 16 中各級數求此和數．

18.*試以數學歸納法證二項式定理

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n.$$

（參閱 §A 3·3·1）．

19.試求

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$.

20.若 $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$，試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i} = 0$.

21.試證　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n} = 0$.

22.試證　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{2^n} = 0$.

23.試證　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = 0$.

24.試證　$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\sqrt{n^2+n} = 0$.

25.試以 Cauchy 審斂法示下列各數序為收斂：

(a) $a_n = \frac{1}{n}$.

(b) $a_n = \frac{n+1}{n}$.

(c)* $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

(d)* $a_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}$.

26.*試示上題中 (c)，(d) 兩數序之極限互為倒數（故數序 (d) 之極限為 $1/e$！）．

27.*試證數序

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots$$

(a)有一極限,(b)此極限為2.

28.*試證數序

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

有一極限,並示此極限小於1而不小於$\frac{1}{2}$.

29.試證數序

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

有一極限,亦即上題之極限,且大於$\frac{1}{2}$而不大於1.

30.試爲前二題之極限l,求得下列距數:$\frac{37}{60}<l<\frac{57}{60}$.

31.*設a_1,b_1為任何二正數,並設$a_1<b_1$.設

$$a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\qquad b_2=\sqrt{a_1b_1},$$

推至一般,

$$a_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\qquad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

試證數序$a_1,a_2,\cdots$及$b_1,b_2,\cdots$皆爲收斂,且歛於同一極限.

32.*有$a_n>0$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$,則$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

33.*試應用題32以求下列各數序之極限:

$$(a)\sqrt[n]{n},\qquad (b)\sqrt[n]{n^5+n^4},\qquad (c)\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

34.試應用題33(c)以示

$$n!=n^ne^{-n}a_n,$$

其中a_n一數,其n次根趨於1.(參閱第七章附錄).

35.試證$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=2$.試求一$\delta$,於$|x|<\delta$時足使2與$\frac{x+2}{x+1}$相差之絕對值小於

(a)$\frac{1}{10}$,(b)$\frac{1}{1000}$,(c)$\varepsilon,\varepsilon>0$.

36.(a)試證$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$.試求一$\delta$,於$|1-x|<\delta$時足使$\frac{3}{2}$與$\frac{x+2}{x+1}$相差之絕對值小於$\varepsilon,\varepsilon>0$.

就(b)$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1+x^3}$;(c)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$求同上之事.

37.試證(a)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$.

(b) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ [illegible]

38. 試證 $\lim_{m\to\infty}(\cos \pi x)^{2m}$ 之存在，不限 x 為何值，但視 x 為整數或非整數而此極限等於 1 或 0.

39. *試證 $\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos \pi n!x)^{2m}]$ 之存在，不限 x 為何值，且視 x 為有理或無理而此極限等於 1 或 0.

40. 試於下列函數決定何者為連續，其不連續者，試求其間斷點.

(a) $f(x)=$ [illegible], $f(0)=0$.

(b) $f(x)=$ [illegible], $f(0)=0$.

(c) $f(x)=\lim_{m\to\infty}(\cos \pi x)^{2m}$.

(d) $f(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos \pi n!x)^{2m}]$.

41. 設 $f(x)$ 在 $0\leqq x\leqq 1$ 中為連續，更設 $f(x)$ 僅取有理值，而 $x=\frac{1}{2}$ 時，$f(x)=\frac{1}{2}$. 試證 $f(x)$ 必處處等於 $\frac{1}{2}$.

42. 問函數

$$f(x)=2\sin 3x+10\cos 5x$$

有無實數之零點?

43. *若 $f(x)$ 滿足函數方程式

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

x 及 y 均不限何值，試求 $f(x)$ 在有理點上之值，並證 $f(x)$ 若為連續，則 $f(x)=cx$, 其中 c 為一常數.

44. *試證下述關於均勻連續性之一逆定理：設 $f(x)$ 在半開程 $a<x\leqq b$ 中為均勻連續，則於 $x\to a$ 時 $f(x)$ 必趨於唯一極限(此極限即可取作 $f(a)$ 之值).

第　二　章

45. *試直接證明函數

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad x\neq 0;\quad f(0)=0,$$

在每一點上均有導數，而其值為

$$f'(x)=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x},\quad x\neq0;\quad f'(0)=0,$$

表示 $f'(x)$ 雖於 $x=0$ 不連續，但中值定理仍可應用並有題 51 中之性質.（參閱第 137——138 頁）.

46. 試作函數

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x},\quad x\neq0;\quad f(0)=0$$

之標繪圖，並求其 $x\neq0$ 時之導數. 試示其在 $x=0$ 原無導數，但差商 $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 於 $x\to0$ 時有上限 1 及下限 -1.

47. 試就函數

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}+x^2\sin\frac{1}{x},\quad x\neq0;\quad f(0)=0$$

考其導數之性質.

48. 試證函數

$$f(x)=\frac{1}{x}\sin x,\quad x\neq0;\quad f(0)=1$$

在每一點上均有導數，而其值爲

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x+\frac{1}{x}\cos x,\quad x\neq0;\quad f'(0)=0.$$

試示 $f'(x)$ 爲連續，並求 $f''(x)$.

49. 設 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中爲連續且有可導性，試示若在 $a\leqq x<\xi$ 中 $f'(x)\leqq0$ 而在 $\xi<x\leqq b$ 中 $f'(x)\geqq0$，則此函數決不小於 $f(\xi)$.

50.* 若連續函數 $f(x)$ 在鄰近 $x=\xi$ 之每一點 x 上有一導數 $f'(x)$，而於 $x\to\xi$ 時 $f'(x)$ 趨於一極限 L，則 $f'(\xi)$ 必存在，且即等於 L.

51.* 若 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中之每一點 x 上有一導數 $f'(x)$（不必連續），而 m 及 M 爲 $f'(x)$ 之二值，則 $f'(x)$ 必取 m 及 M 間之任何值 μ.

52. 若在 $a\leqq x\leqq b$ 中不論 x 爲何值均有 $f''(x)\geqq0$，則過曲線 $y=f(x)$ 之任意一點 $x=\xi$，$y=f(\xi)$ 作其切線，必居於曲線之下.（此曲線必上凹）.

53. 若在 $a\leqq x\leqq b$ 中不論 x 爲何值均有 $f''(x)\geqq0$，則於曲線 $y=f(x)$ 上任取兩點，其橫坐標爲 $x=x_1$，$x=x_2$ 者，而連接之，此線段必居於曲線之在變程 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 中者之上.

54. 若 $f''(x)\geqq0$，則 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

55.已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$，試求一數 δ，俾凡絕對值小於 δ 之 h，及在變程 $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ 中之 x，皆足以使下列不等式成立：

$$\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqq\frac{1}{100}.$$

56.試直接求下列各式之導數，並書出其相應之積分公式：

(a) $x^{\frac{1}{2}}$；　　　(b) $\tan x$.

57.試求 (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sec^2\frac{\pi}{4n}+\sec^2\frac{2\pi}{4n}+\cdots+\sec^2\frac{n\pi}{4n}\right)$.

58.試證

(a) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2dx=\frac{16}{15}$；　　　(b) $(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ndx=\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

59.試示

$$\frac{1}{\nu+1}<\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{\nu}$$

及
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

試證數序 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\int_{1}^{\nu}\frac{dx}{x}$，$\nu=1,2,\cdots$，爲一降數序，且有一下限.

60.*設 $f(x)$ 爲一函數，不限 x 何值均有 $f''(x)\geqq0$ 者，又設 $u=u(t)$ 爲一任意之連續函數，則

$$\frac{1}{a}\int_{0}^{a}f(u(t))dt\geqq f\left(\frac{1}{a}\int_{0}^{a}u(t)dt\right).$$

61.*苟一質點於時間 1 中行經距離 1，起迄時均入靜止狀態，則在歷程之某點上必一度有不小於 4 之加速率.

第　三　章

62.試求下列各函數之導數之導數：

(a) $e^{\tan^2x+\log\sin x}$.

(b) $(x+2)^2(1+x^2)^{\frac{1}{3}}(x^3+1)^{\frac{3}{7}}$.

(c) $\frac{x^3\sin x-x^5\cos x}{x^2\tan x}$.

63.欲

$$\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

處處有一導數,其值有限而不爲零,問其中各係數 α, β, a, b, c 須滿足何種條件?

64. 苟 $x\to\infty$ 時 $\phi(x)\to\infty$, 試示 $\log\phi(x)$ 之數量級較 $\phi(x)$ 爲小, $e^{\phi(x)}$ 之數量級較 $\phi(x)$ 爲大.

65. 苟 $x\to\infty$ 時正函數 $f(x)$ 之數量級大於,等於,或小於 x^m, 試證 $\int_a^x f(\xi)d\xi$ 對於 x^{m+1} 之數量級亦如之.

66. 試比較 $x\to\infty$ 時 $\int_a^x f(\xi)d\xi$ 對於 $f(x)$ 之數量級, $f(x)$ 分別爲:

(a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, (b) e^x, (c) xe^{x^2}, (d) $\log x$.

67. 試證苟 $f(x)$ 爲連續而

$$f(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi,$$

則 $f(x)$ 恆等於零.

68. 試證 $\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1}=\dfrac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$.

69. 試示

$$\frac{d^n(e^{x^2/2})}{dx^n}=u_n(x)e^{x^2/2},$$

其中 $u_n(x)$ 爲一 n 次之多項式,並建立下之遞演關係:

$$u_{n+1}=xu_n+u_n'.$$

70.* 試應用 Leibniz 公式於

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2})=xe^{x^2/2}$$

以求得下列遞演關係:

$$u_{n+1}=xu_n+nu_{n-1}.$$

71.* 試合併上二題中之遞演關係,以求得 $u_n(x)$ 所滿足之微分方程式:

$$u_n''+xu_n'-nu_n=0.$$

72. 試求微分方程式 $u_n''+xu_n'-nu_n=0$ 之多項式解

$$u_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

73.* 苟 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, 試證下列各關係式:

(a) $P_{n+1}' = \frac{x^2-1}{2(n+1)}P_n'' + \frac{[illegible]x}{[illegible]}P_n' + [illegible]P_n$.

(b) $P_{n+1}' - xP_n' = (n+1)P_n$.

(c) $\frac{d}{dx}((x^2-1)P_n') = n(n+1)P_n$.

74 試求微分方程式

$$\frac{d}{dx}((x^2-1)y') - n(n+1)y = 0$$

之多項式解

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + a_1 x^{n-2} + \cdots$$

75.試應用二項式定理以決定多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$。

76.*設 $\lambda_{n,p}(x) = \binom{p}{n}x^n(1-x)^{p-n}$，$n = 0, 1, 2, \cdots, p$. 試示

$$1 = \sum_{n=0}^{p}\lambda_{n,p}(x).\qquad x^k = \sum_{n=k}^{p}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{p}{k}}\lambda_{n,p}(x).$$

$$x = \sum_{n=1}^{p}\frac{n}{p}\lambda_{n,p}(x).\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad x^p = \lambda_{p,p}(x).$$

第 四 章

試作題 77—82 之積分式：

77. $\int\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

78. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$.

79. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

80. $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$.

81. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-1}}$.

82. $\int\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

試求題 83—88 中各積分之值：

83 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$.

84. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^7 3\theta\sin^4 6\theta\, d\theta$.

85. $\int_0^1\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

86. $\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

87. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

88. $\int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$.

試就題 89—93 之積分式各求一遞演公式：

89. $\int x^a(\log x)^m dx$.

90. $\int x^n e^{ax}\sin bx\, dx$.

91. $\int x^n e^{ax}\cos bx\, dx$.

92. $\int e^{ax}\sinh bx\, dx$.

93. $\int e^{ax}\cosh bx\, dx$.

94. 試以三種不同之方法求積分式 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$，並比較其結果.

95.*設 $P_n(x)=\frac{1}{2^2 n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 試示若 $m\neq n$,

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0.$$

96. 試證 $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{n+1}$.

97. 試證若 $m<n$, $\int_{1}^{-1}x^m P_n(x)dx=0$.

98. 試求 $\int_{-1}^{1}x^n P_n(x)dx$.

試考驗題 99—112 之各旁義積分爲收斂或發散：

99. $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

100. $\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

101. $\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$.

102. $\int_0^1 x^m\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$.

103. $\int_0^\infty e^{-x}x^m(\log x)^n dx$.

104. $\int_0^\pi\log\sin x\, dx$.

105. $\int_0^\pi\frac{1}{x}\log\sin x\, dx$.

106. $\int_0^\pi x\log\sin x\, dx$.

107. $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$.

108. $\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}dx$.

109. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^m dx}{(\sin x)^n}$.

110. $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$.

111. $\int_0^\infty\frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$.

112.* $\int_0^\infty\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2 x}$.

113.*若 $\int_a^\infty\frac{f(x)}{x}dx$ 於 a 爲任何正值時爲收斂而 $f(x)$ 於 $x\to 0$ 時趨於一極限 L，試示 $\int_0^\infty\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx$ 亦收斂，其值爲 $L\log\frac{\beta}{\alpha}$.

114. 試參照上題以示

(a) $\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\log\frac{\beta}{\alpha}$.

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log \frac{b}{a}$.

115.*若 $\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$ 於 a 及 b 爲任何正値時爲收斂,而於 $x \to \infty$ 時趨於一極限 M, 於 $x \to 0$ 時趨於一極限 L, 試示

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (L - M) \log \frac{b}{a}.$$

116.試求得下列Γ函數之表達式:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} dx,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx.$$

第　五　章

117.試草繪函數

$$y = (x^2)^x, \quad y(0) = 1$$

之圖形,試示此函數在 $x=0$ 爲連續.問此函數有極大,極小,或反曲點否?

118.在所有底邊及周長一定之三角形中,等腰三角形有最大之面積.

119.在所有底邊及頂角一定之三角形中,等腰三角形有最大之面積.

120.在所有底邊及面積一定之三角形中,等腰三角形有最大之頂角.

121.*在所有面積一定之三角形中,等邊三角形有最短之周圍.

122.*在所有周長一定之三角形中,等邊三角形有最大之面積.

123.*在所有內接於一圓之三角形中,等邊三角形有最大之面積.

124.試證下列各不等式:

(a) $e^x > \frac{1}{1+x}$, $x > 0$.

(b) $e^x > 1 + \log(1+x)$, $x > 0$

(c) $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$, $x > 0$.

125.*設 a, b 爲二正數, p 及 q 爲不等於零之任何二數,而 $p < q$. 試證在變程 $0 < \theta < 1$ 中, 無論 θ 爲何値,均有

$$\frac{[\theta a^p + (1-\theta) b^p]^{1/p}}{[\theta a^q + (1-\theta) b^q]^{1/q}} \leqq 1.$$

(此爲 Jensen 不等式，其意謂二正數 a,b 之 p 次冪中數 $[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{1/p}$ 爲 p 之升函數.)

126. 試示上列不等式中之等號於 $a=b$ 時適用，且僅於此時爲然.

127. 試證 $\lim\limits_{p\to 0}[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{1/p}=a^\theta b^{1-\theta}$.

128. 若將 a,b 之零次冪中數定義爲 $a^\theta b^{1-\theta}$，試示 Jensen 不等式在此仍可適用，而其形式變爲($a\neq b$)

$$a^\theta b^{1-\theta}\gtrless[\theta a^q+(1-\theta)b^q]^{1/q}，視 q\lessgtr 0 而定.$$

$q=1$ 時，則

$$a^\theta b^{1-\theta}\leqq\theta a+(1-\theta)b.$$

129. 試不由 Jensen 不等式，證明不等式

$$a^\theta b^{1-\theta}\leqq\theta a+(1-\theta)b,$$

其中 $a,b>0$，$0<\theta<1$，並示等號僅於 $a=b$ 時適用 (此不等式之意即謂 θ，$1-\theta$ 次之幾何中數小於相當之算術中數).

130. 試標繪下列圖形，並求其直角坐標方程式：

(a) $r=a+b\cos\theta$ (蝸線).

(b) $r=\dfrac{2}{2-\cos\theta}$ (橢圓).

(c) $r=\dfrac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$ (蔓葉線).

(d) $r=\dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$ (Descartes 葉形線).

131. *設有橢圓，其焦點之一適在原點，試示其方程式爲

$$r=\frac{k}{1-e\cos(\theta-\theta_0)}.$$

132. 試標繪下列曲線，並求其不含參變數之方程式：

(a) $x=\dfrac{5at^2}{1+t^5}$, $y=\dfrac{5at^3}{1+t^5}$.

(b) $x=at+b\sin t$, $y=a-b\cos t$.

133. *試示下列橢圓及雙曲線族

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1,\quad \lambda<b,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\tau}+\frac{y^2}{b^2-\tau}=1,\quad a<\tau<b,$$

爲共焦，且相交成直角.

134. 試求下列各曲線之垂足曲線(見 §[illegible] 之習題 [illegible]):

(a) 橢圓 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, 以中心為定點;

(b) 雙曲線 $x=a\cosh u$, $y=b\sinh u$, 以原點為定點;

(c) 拋物線 $y^2=4px$, 以頂點為定點;

(d) 拋物線 $y^2=4px$, 以焦點為定點.

135. 試示橢圓之切線與由焦點至切點之二徑線成等角.

136. 試示雙曲線之切線與由焦點至切點之二徑線成等角.

137. 沿拋物線之諸法線各截取定長 [illegible], 試求此線段端點所繪之曲線.

138. 試求由曲線 $x^2+y^2=$ [illegible] 圍成圖中之面積.

139. 試求曲線 $a^2(x^2+y^2)^2$ [illegible] 所圍成之面積.

140. 試求圓外圓擺線

$$x=(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t,$$

$$y=(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t,$$

之弧長, 由出發點 $t=0$ 算起.

141. 試證極坐標曲線 $r=f(\theta)$ 任一點上之曲率半徑為

$$\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

142. *若在 xy 平面上有一曲線, 其曲率為弧長之獨行函數, 試證此曲線不能週合, 且無雙點[1].

143. 一桿長 l, 試求其對下列各點之轉動慣量:

(a) 其中心;

(b) 其一端;

(c) 在沿桿直線上之一點, 其與中心之距離為 d;

(d) 距離中心為 d 之任何點.

144. 設有曲線, 處處與經過原點之直線成相等之交角 α, 試求其方程式.

(1) double point; point double; Doppelpunkt

145. 設有曲線，其法線之長恆爲 h，試求其方程式.（法線之『長』指夾於曲線及 x 軸間之法線部分）.

146. 試示曲率爲一固定常數 h 之曲線祇有半徑爲 $\frac{1}{h}$ 之圓線.

147. 設有曲線，其曲率中心皆在 x 軸上，故其曲率半徑卽等於法線之長，試求其方程式.

148. 設有曲線，其曲率半徑等於其法線之長，但其曲率中心不在 x 軸上，試求其方程式.

149. *試求曲線弧長之圓坐標方程式.

第　六　章

150. 試應用分部積分法於

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h f'(x+\tau)d\tau$$

以推求餘項 R_n 之積分式.

151. 試求下式之積分：

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)d\tau,$$

以推得

$$R_n=f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

152. *設函數 $f(x)$ 已用某種方法求得一級數展開式，卽

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R_n(x),$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均爲常數，$R_n(x)$ 爲連續 n 次有可導性者，而 $x\to 0$ 時 $\frac{R_n(x)}{x^n}\to 0$. 試示 $a_k=\frac{f^k(0)}{k!}$ $(k=0, \cdots, n)$，換言之，此級數卽爲 Taylor 級數.

153. *將 $\sin x$ 之 Taylor 級數自乘之，藉以求 $\sin^2 x$ 在 $x=0$ 隣近之 Taylor 級數至不爲零之最初三項.試說明此法之合理.

154. *試藉 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 之關係以求 $\tan x$ 在 $x=0$ 隣近之 Taylor 級數至不爲零之最初三項，並說明其法合理.

155. *試應用二項式定理於 $\cos x$ 之 Taylor 級數以求 $\sqrt{\cos x}$ 在 $x=0$ 隣近之 Taylor 級數至不爲零之最初三項，並說明其法合理.

156. 試求下列各函數在 $x=0$ 隣近之 Taylor 級數至不爲零之最初四項：

(a) $x\cot x$.　　(c) $\sec x$.　　(e) e^{e^x}.

(b) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}$.　　(d) $e^{\sin x}$.　　(f) $\log\sin x-\log x$.

157. 試應用

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

以求 arc sin x 在 $x=0$ 鄰近之 Taylor 級數（參照§A 3·3·3 習題 5）.

158. *試求$(\arcsin x)^2$ 之 Taylor 級數（參照§A 3·3·3 習題 5）.

159. 試求下列函數在 $x=0$ 鄰近之 Taylor 級數.

(a) $\sinh^{-1}x$.　　(b) $\int_0^x e^{-t^2}dt$.　　(c) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

160. *上題中之級數若僅取其最初 n 項,試估計其誤差

161. *電荷相反之二質點 $+e$, $-e$, 相去一小距離 d 者,成一電偶極子,其矩$M=ed$. 試示

(a)在偶極子之軸上而與偶極子之中心相距 r 之一點,其勢能爲$\frac{M}{r^2}(1+\varepsilon)$, 此中之 ε 約略等於$\frac{d^2}{4r^2}$.

(b)在偶極子之垂直二等分線上之一點,其勢能爲零.

(c)對於偶極子之中心及軸有極坐標 r, θ 之一點,其勢能爲$\frac{M\cos\theta}{r^2}(1+\varepsilon)$,此中之 ε 約略等於$\frac{d^2}{8r^2}(5\cos^2\theta-3)$

(在相距r之一點上,一單個電荷 q 之勢能爲 q/r; 若干電荷之勢能爲各電荷之勢能之和).

162. *試以$\frac{1}{x}$之羃求$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$之 Taylor 級數至三項.

163. 試求下列各極限:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e}{2}x+x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

(c) *$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

164. *試示在曲率半徑爲莫大或莫小之點上,其密切圓不與曲線交叉.

165. 試求下列函數之莫大及莫小值: (a) [illegible], (b) $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

第七章

166. 試示橢圓 $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ 之弧長爲

$$s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,\ 其中\ \varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

設 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 試用 Simpson 法將積分變程分成六段,以計算其長度至四位數字.

167. 將上題之被積函數展開爲級數,而仍欲其結果準確至四位數字,試估計其所需之項數.

168. 應用 Simpson 法,令 $h=0.1$, 試求 $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}dx$

169. 一直角三角形之弦,經準確量度,知爲 40; 其一角 30°, 則容或有 $\frac{1°}{2}$ 之誤差. 若由是求得兩邊之長,及三角形之面積,試估計其誤差.

170.* 試由 $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log(a+x)dx,\ a>0$ 以示

$$a(a+1)\cdots(a+n)=a_n n!\,n^a,$$

其中 a_n 有一正數之下限. 更示 a_n 在 n 充分大時爲單調下降. (當 $n\to\infty$ 時 a_n 之極限爲 $\frac{1}{\Gamma(a)}$).

171. 試爲 $\log\frac{n_1!\,n_2!\cdots n_l!}{n!}$, 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_l=n$, 求一近似表達式.

172. 試示在 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 之二項展開式中 x^n 之係數趨近於 $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

第八章

173. 試證 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ 若爲收斂, 則 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu}$ 亦然.

174. 若 a_n 爲一各項皆正之獨升數序,問級數 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\cdots$ 於何時收斂?

175.* 級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 係由遞小之正項組成,若其收斂,則 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

176. 試示級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\nu}$ 爲發散.

177.* 若 Σa_ν 爲收斂, 而 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 爲一有限獨行數序, 則 $\Sigma a_\nu b_\nu$ 爲收斂. 試證之.

178* 若 Σa_ν 在有限涯之間變動,而 b_ν 爲一獨行數序之趨於零者, 則 $\Sigma a_\nu b_\nu$ 必爲收斂. 試證之.

179. 試討論下列級數之斂散:

(a) $\Sigma\frac{(-1)^{\nu}}{\nu}$,　　(b) Σ[illegible],　　(c) $\Sigma\frac{\cos\nu\theta}{\nu}$,

(d) $\Sigma\frac{\sin\nu\theta}{\nu}$,　　(e) $\Sigma\frac{(-1)^{\nu}\cos\nu\theta}{\nu}$,　　(f) $\Sigma\frac{(-1)^{\nu}\sin\nu\theta}{\nu}$.

180. 下列級數係由 $\log 2$ 之級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 易位而得，試各求其和：

(a) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots$

181. 下列級數於 α 取何值時始為收斂？

(a) $1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{5^{\alpha}}+\frac{1}{7^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots$

182. 試考下列級數為收斂抑發散：

(a) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\cdots$

183. 試示

(a) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!}{(2\nu)!}$ 為收斂.

(b) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\log(\nu+1)-\log\nu}{(\log\nu)^2}$ 為收斂.

(c) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\nu}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\nu)}$ 於 $\alpha>1$ 時為收斂，$\alpha\leqq1$ 時為發散.

184. *以級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\alpha}}$ 相比較，試證下述審斂法：若 n 充分大時 $\frac{\log(1/|a_n|)}{\log n}>1+\varepsilon$，則 Σa_{ν} 為絕對收斂；若 n 充分大時 $\frac{\log(1/|a_n|)}{\log n}<1-\varepsilon$，則 Σa_{ν} 不為絕對收斂.

185. 試示級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\nu}$ 為收斂.

186. 以級數 $\Sigma\frac{1}{\nu(\log\nu)^{\alpha}}$ 相比較，試證下述審斂法：級數 $\Sigma|a_{\nu}|$ 之收斂或發散視 n 充分大時，

$$\frac{\log(1/n|a_n|)}{\log\log n}$$

大於 $1+\varepsilon$ 或小於 $1-\varepsilon$ 而定.

187.試由題 184 推出第 n 次檢根法.

188.*試證下述比較檢驗法:若正項級數 Σb_ν 爲收斂,而若干項以後

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

則 Σa_ν 爲絕對收斂;若 Σb_ν 爲發散,而若干項以後

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

則 Σa_ν 不爲絕對收斂.

189.以幾何級數相比較,試推出檢比法.

190.*以 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\alpha}$ 相比較,試證 Raabe 審斂法:級數 $\Sigma|a_\nu|$ 之收斂或發散視 n 充分大時,

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)$$

大於 $1+\epsilon$ 或小於 $1-\epsilon$ 而定.

191.以 $\Sigma\frac{1}{\nu(\log\nu)^\alpha}$ 相比較,試證下述審斂法:級數 $\Sigma|a_\nu|$ 之收斂或發散視 n 充分大時

$$n\log n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1-\frac{1}{n}\right)$$

大於 $1+\epsilon$ 或小於 $1-\epsilon$ 而定.

192.試證 Gauss 審斂法:若

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=1+\frac{\mu}{n}+\frac{R_n}{n^{1+\epsilon}},$$

其中 $|R_n|$ 爲有界,則 $\Sigma|a_\nu|$ 於 $\mu>1$ 時爲收斂,$\mu\leqq1$ 時爲發散.

193.試審下列級數之斂散:

(a) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cdots$

(b) $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots$

194.(a) 試示級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^x}$ 於 $x\geqq1+\epsilon$ 時勻斂.

(b) 試示導得之級數 $-\Sigma\frac{\log\nu}{\nu^x}$ 亦於 $x\geqq1+\epsilon$ 時勻斂.

195.*試示級數 $\Sigma\frac{\cos\nu x}{\nu^\alpha}$, $\alpha>0$, 在 $\epsilon\leqq x\leqq2\pi-\epsilon$ 中勻斂.

196.級數

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots$$

在 $\epsilon\leqq x\leqq N$ 中勻斂.

197. 試求下列冪級數之斂程：

(a) $\Sigma x^{\nu}!$

(b) $\Sigma\dfrac{(\nu!)^2x^{\nu}}{(2\nu)!}$.

(c) $\Sigma\dfrac{1}{\nu^x}$.

(d) $\Sigma\dfrac{(-1)^{\nu}}{\nu^x}$.

(e) $\Sigma\dfrac{a^{\nu}}{\nu^x}$, $a<1$.

(f) $\Sigma\dfrac{a^{\nu}}{\nu^x}$, $a>1$.

(g) $\Sigma\dfrac{\log\nu}{\nu^x}$.

(h) $\Sigma\dfrac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}}$.

198. *試證級數 $\Sigma\dfrac{a_{\nu}}{\nu^x}$ 苟於 $x=x_0$ 時收斂，必於任何 $x>x_0$ 時收斂；苟於 $x=x_0$ 時發散，必於任何 $x<x_0$ 時發散. 如是，可謂有一「收斂橫坐標」，凡大於此之 x 均令級數收斂，小於此之 x 均令級數發散.

199. 苟 $\Sigma\dfrac{a_{\nu}}{\nu^x}$ 於 $x=x_0$ 時收斂，則導得之級數 $-\Sigma\dfrac{a_{\nu}\log\nu}{\nu^x}$ 於任何 $x>x_0$ 時收斂.

200. 苟 $a_{\nu}>0$ 而 Σa_{ν} 爲收斂，則

$$\lim_{x\to1-0}\Sigma a_{\nu}x^{\nu}=\Sigma a_{\nu}.$$

201. 苟 $a_{\nu}>0$ 而 Σa_{ν} 爲發散，則

$$\lim_{x\to1-0}\Sigma a_{\nu}x^{\nu}=\infty$$

202. *試證 Abel 定理： 苟 $\Sigma a_{\nu}X^{\nu}$ 爲收斂，則 $\Sigma a_{\nu}x^{\nu}$ 在 $0\leqq x\leqq X$ 中勻斂.

203. *苟 $\Sigma a_{\nu}X_{\nu}$ 爲收斂，則 $\lim\limits_{x\to X-0}\Sigma a_{\nu}x^{\nu}=\Sigma a_{\nu}X^{\nu}$.

204. 試求下列 Taylor 級數所表達之有理函數：

(a) $x+x^2-x^3-x^4+x^5+x^6-\cdots$

(b) $1+2x-4x^3-5x^4+7x^6+8x^7-\cdots$

205. 試示 (a) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots=1$.

(b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

206. 設 c 爲複數 $x+iy$，其中 (x,y) 即表直角坐標系中之點. 試標繪下列曲線：

(a) $\left|\dfrac{c-i}{c+i}\right|=2$.

(b)* $\left|\dfrac{c-a}{c-\beta}\right|=k$, a,β 爲複常數.

(c) $|c^2-1|=k$.

207. 設 c_1, c_2 爲二複數. 試證

(a) $|c_1 \pm c_2| \leqq |c_1| + |c_2|$.

(b) $|c_1 \pm c_2| \geqq |c_1| - |c_2|$.

208. 試證等式

$$|c_1+c_2|^2+|c_1-c_2|^2=2|c_1|^2+2|c_2|^2,$$

並申明其幾何上之意義.

209. 試以數學歸納法證 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

210. 設 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，試由展開式 $\frac{1}{1-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ 以證

$$\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu}\cos\nu\theta.$$

及

$$\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu}\sin\nu\theta.$$

第 九 章

211. *試應用餘切之部分分數式將 $\pi x\cot\pi x$ 展開為 x 之冪級數，復與 §AS·5·2 中所得之級數相比較，試示

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}}=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2\cdot(2m)!}B_{2m}.$$

212. 試示

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}(2^{2m}-1)\pi^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}.$$

213. 試示

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^{2m}}=\frac{(-1)^{m}(2^{2m}-2)\pi^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}.$$

214. 試證

(a) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx=-\frac{\pi^2}{6}$;

(b) $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2}{12}$.

215. 應用正弦及餘弦之無盡乘積，試示

(a) $\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}B_{2\nu}}{(2\nu)!\,\nu}x^{2\nu}$;

(b) $\log\cos x=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}(2^{2\nu}-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!\,\nu}x^{2\nu}$.

216. 應用正弦及餘弦之無盡乘積，試求

(a) $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{1[illegible]}{[illegible]}\cdots;$

(b) $2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{[illegible]}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1[illegible]}{15}\cdot\frac{[illegible]}{[illegible]}\cdots.$

217. 試以部分分數表達雙曲餘切.

第十章

218. 試求切線有定長 a 之曲線.(切線之定長係指夾於曲線及 x 軸間之切線部分).

219. 試求與 $y=ce^{kx}$ 族相正交之曲線.

220. 若自切線極平之一點,計一懸鏈之弧長,以 s 表之,則此鏈之形式可由微分方程式

$$\frac{d}{dx}(\log s)=\frac{d}{dx}\left(\log\frac{dy}{dx}\right)$$

決定之.試示此鏈之方程式為 $y=c\cosh\frac{x}{c}+a$.

221. 試求下列電流方程式之積分:

$$L\dot{I}+RI=E,$$

其中 $E=E_0\sin\omega t$,而 L, R, E_0, ω 均為常數.

答案及提示

第一章

第一節，第5頁.

1.(d),(e) 先示 x 滿足一如下之方程式:

$$x^6+a_1x^5+\cdots+a_6=0,$$

其中 $a_1,\cdots,a_6$ 均爲整數；乃證 x 或爲無理數，或爲整數.

2.應用 $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之無理性.

4.在 Schwarz 不等式中，設

$$x=\frac{|a_i|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}},\quad y=\frac{b_i}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}.$$

依次令 $i=1,i=2,\cdots i=n$，而將所得之不等式相加.

5.可將 $ax^2+2bx+c$ 寫作 $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}$.

8.其充分與必要之條件爲諸 a 與諸 b 成比例；亦卽，不論 ν 爲何值，有 $ca_\nu+db_\nu=0$ 之關係，其中 c,d 爲與 ν 無關之常數，且不俱爲零．設 $a>0$ 而 $b^2-ac\leqq0$，則於 $b^2-ac=0$ 時，且僅於是時，得以 x 之某值使 $ax^2+2bx+c=0$；明乎此，卽可應用題7.

9.兩直線間所夾之角，其餘弦之絕對值 $\leqq1$.

10.應用 Schwarz 不等式.

11.將不等式之兩方平方之，卽可應用 Schwarz 不等式．三角形兩邊之和不小於第三邊.

第四節，第19頁.

2.(a),(d),(e),(g) 爲奇；(b)爲偶.

3.(b),(c)難行；(a),(d),(e),(l),(m) 爲偶；(d) 與 (e) 相同.

6.$\frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$.

7.(c)應用二項式定理將 $(1+1)^n$ 展開.

8.(a) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

(b) $\frac{n}{n+1}$. 求 $\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu}$ 自 $\nu=1$ 至 $\nu=n$ 之和卽可得之.

(c) $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. 求 $\frac{1}{(\nu+1)^2}-\frac{1}{\nu^2}$ 自 $\nu=1$ 至 $\nu=n$ 之和。

9. 3;193.

11. $\frac{1}{6}(2n^3+3n^2-11n+30)$.

第四節,第33頁.

1. (a) 1; (b) 333; (c) 333,333.

2. (a) 0; (b) ∞; (c) 0; (d) $\frac{a_0}{b_0}$; (e) $\frac{1}{3}$.

4. 19.

5. (a) 6; (b) 10; (c) 14.

6. (a) 25; (b) 2500; (c) 250,000.

9. (a) 0; (b) 否; (c) 是; (d) 小於 $\frac{10^{10}}{n!n}$; (e) 30.

15. $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中之最大者.

16. 2.

17. 可應用 $\frac{n}{2^n}\to 0$ 之關係.

21. 其誤差小於 $\frac{1}{n(n!)}$; $e=2.71828\cdots$

第五節,第38頁.

1. (a) 6; (b) 15; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 3.

3. (a) 及 (b) 無極限; (c) 有極限,等於 1.

第六節,第43頁.

3. (a) $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{600}$, $\frac{1}{6000}$. (b) $\frac{1}{10(1+2|\xi-1|)}$,等等.

(c) $\frac{1}{120(1+|\xi|)^3}$,等等. (d) $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$; $\frac{1}{1000000}$.

(e) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$.

4. (a) $\frac{1}{400}$; $\frac{\varepsilon}{4}$. (b) $\frac{1}{77600}$; $\frac{\varepsilon}{776}$. (c) $\frac{1}{10000}$; ε^2. (d) $\frac{1}{100}$; ε.

5. (a), (b), (c), (d), (g) 為連續.

(e) 在 $x=2,4$ 有間斷點.

(f) 在 $x=3$ 有間斷點.

(h), (k), (m) 在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 有間斷點.

(i), (j) 在 $x=n\pi$ 有間斷點.

(l) 在 $x=n\pi$, $n\neq 0$ 有間斷點.

附錄,第 56 頁.

1.(a) 上涯 $=\frac{324^*}{5}$,　　下涯 $=0$,　　最大聚點 $=0$,　　最小聚點 $=0$.

(b) 上涯 $=\frac{1^*}{2}$,　　下涯 $=-1^*$,　　最大聚點 $=0^*$,　　最小聚點 $=0^*$.

(c) 上涯 $=\frac{9^*}{10}$,　　下涯 $=-\frac{1^*}{3}$,　　最大聚點 $=\frac{1}{2}$,　　最小聚點 $=\frac{1}{2}$.

(d) 上涯 $=\frac{19^*}{10}$,　　下涯 $=-\frac{1^*}{3}$,　　最大聚點 $=\frac{3}{2}$,　　最小聚點 $=\frac{1}{2}$.

(e) 上涯 $=2^*$,　　下涯 $=0$,　　最大聚點 $=1$,　　最小聚點 $=0$.

2. 可先以 $a=x_0, x_1, x_2, \cdots x_n=b$ 諸點將變程分爲 n 個分段,使同在一分段中之點,如 x 及 $\bar{x}$,皆滿足 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ 之關係.乃依次以直線連接各端點 $x=x_i$, $y=f(x_i)$.

3. $\frac{3}{2}+x-\frac{3}{2}|x-2|+|x-3|-\frac{1}{2}|x-5|$.　函數 $-\frac{h}{2}|x-x_i|+\frac{h}{2}|x-x_{i-1}|+l$ 可代表一折線,其斜度在 x_{i-1}, x_i 之間爲 h, 在 x_{i-1}, x_i 之外爲零.故但須就 $\phi(x)$ 之各線段,一一求其相當之函數如上式者,而累加之卽得.

4.(a) $\frac{\varepsilon}{6}$; (b) $\frac{\varepsilon}{na^{n-1}}$, $n>0$; (c) $\frac{\varepsilon^3}{2}$.

第　二　章

第一節,第 65 頁.

1. $\frac{70}{3}$. 可應用 §2·1·3 之公式及 §2·1·2 之基本法則.

2. $\frac{10}{3}\sqrt{5}$. 所求面積可由某二面積之差得之.

3. $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

4. $\frac{1}{6}(a^2+4b)^{\frac{3}{2}}$.

5.(a) $\frac{(1+b)^{1+\alpha}-(1+a)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$; (b) $-\frac{\cos\alpha b-\cos\alpha a}{\alpha}$; (c) $\frac{\sin\alpha b-\sin\alpha a}{\alpha}$.

有 * 號者均屬於各該數序.

7. $\frac{b^4-a^4}{4}$.

8. $\frac{1}{n+1}$.

第二節,第79頁.

1. 任定一數 a 必隨之有一數 ε，致不論 δ 爲任何正數均有滿足後列不等式之 x 存在：
$|x-\xi|<\delta$，而 $\left|a-\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right|\geqq\varepsilon$.

2. (a) $-\frac{1}{(x+1)^2}$；(b) $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$；(c) [illegible]；(d) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$；

(e) $3\cos 3x$；　(f) $-4\sin 4x$；　(g) $2\sin x\cos x$；　(h) $-2\cos x\sin x$.

3. (a) ξ 爲 x_1 與 x_2 間之任何值；(b) $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$；(c) $\xi=\pm\sqrt{\frac{x_2^2+x_2x_1+x_1^2}{3}}$；

(d) ξ 爲一四次方程式之根；(e) $\xi=\pm\left(\frac{x_2^{2/3}+x_2^{1/3}x_1^{1/3}+x_1^{2/3}}{3}\right)^{3/2}$.

第三節,第87頁.

2. (a) $\frac{1}{2}$；(b) $\frac{1}{2}$.

第四節,第89頁.

1. $0.785\left(=\frac{\pi}{4}\right)$.

第六節,第94頁.

1. (a) $\xi=1$；(b) $\xi=\frac{a+b}{2}$；(c) $\xi=\sqrt[n]{\frac{a^n+a^{n-1}b+\cdots+b^n}{n+1}}$；(d) $\xi=\pm\sqrt{ab}$.

3. (a) $I_n=\frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_n=a$；

(b) $I_n=\frac{a^{n+1}}{n+1}$，$-1\leqq a\leqq 1$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$，$a>1$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\infty$.

4. (a) $F(x)$ 可寫作

$$F(x)=\frac{1}{2\delta}\left\{\int_{x-\delta}^{c} f(t)dt+\int_{c}^{x+\delta} f(t)dt\right\},$$

其中 c 爲一固定之數.

(b) $|F(x)-f(x)|\leqq\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|dt$ 應用 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中之均勻連續性.

5. 將 $a\leqq x\leqq b$ 之等分段將積分式寫作和數之極限，然後應用 §1·1·3 例題中之 Schwarz 不等式. 另一法爲取 $\{f(x)+tg(x)\}^2\geqq 0$ 之積分，而應用 §1·1·3 之題 3.

附錄,第 97 頁.

1. 設於 $f'(x)\geqq 0$ 之處令 $\varphi(x)=f'(x)$, 而於變號之其餘各處令 $\varphi(x)=0$ 又設 $\psi(x)=f'(x)-\varphi(x)$; 則 $\psi(x)\leqq 0$. 於是可由積分 $\int_a^b \varphi(x)dx$, $\int_a^b \psi(x)dx$ 推得欲證之理.

第三章

第二節,*第 102 頁.

1. $f'(1)=1$, $f''(1)=8$, $f'''(1)=36$, $f^{iv}(1)=96$, $f^{v}(1)=120$, $f^{vi}(1)=0$, $f^{vii}(1)=0$, $\cdots$

2. 0.

3. (a) a; (b) $175\,cx^6$; (c) $2(b+cx)$; (d) $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

(e) $\dfrac{2x^2(a\beta-\alpha b)+2x(a\gamma-\alpha c)+2(b\gamma-\beta c)}{(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)^2}$; (f) $\dfrac{4x(1+x^4)}{(1-x^4)^2}$; (g) 0.

4. (a) $F(x)=a_n x^n+(a_{n-1}+na_n)x^{n-1}+\{a_{n-2}+(n-1)(a_{n-1}+na_n)\}x^{n-2}$
$+\cdots+(a_0+a_1+2a_2+\cdots+n!a_n)$.

(b) $\dfrac{a_n}{c_0}x^n+\left(\dfrac{a_{n-1}}{c_0}-na_n\dfrac{c_1}{c_0^2}\right)x^{n-1}+\left\{\dfrac{a_{n-2}}{c_0}-(n-1)a_{n-1}\dfrac{c_1}{c_0^2}\right.$
$\left.-n(n-1)a_n\dfrac{c_0c_2-c_1^2}{c_0^3}\right\}x^{n-2}+\cdots$

5. (a) $2\cos 2x$; (b) $-\dfrac{1}{1+\sin 2x}$; (c) $\tan x+x\sec^2 x$;

(d) $-\dfrac{2}{1-\sin 2x}$; (e) $\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$.

6. $2\sec^3 x-\sec x$; $24\sec^5 x-20\sec^3 x+\sec x$; $\operatorname{cosec} x\cot x(1-6\operatorname{cosec}^2 x)$;

$24\sec^5 x-20\sec^3 x+\sec x\quad\cos x$.

7. ∞.

8. (a) $\dfrac{ax^2}{2}+bx$; (b) $\dfrac{ax^3}{3}+bx^2+cx$; (c) $x^9+x^7+x^5+x^3+x$;

(d) $-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{3x^3}\right)$; (e) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}$; (f) $a\sin x-b\cot x$; (g) $\sec x$;

(h) $\dfrac{3x^2}{2}-7\cos x-\dfrac{5}{2x^2}-9\tan x$.

*答案中遇有應加積分常數之處大都略而不書,讀者幸注意及之

第三節，第 109 頁．

1. 4．

3. (a) $\frac{\sqrt[n]{x}\{1-(n-1)x\}}{nx(1+x)^2}$；(b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2 x-2\sqrt{x}\sin x\cos x$；(c) $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$；

(d) $\frac{1-\tan x+3x\sec^2 x}{3x^{2/3}(1-\tan x)^2}$；(e) [illegible]；(f) $\frac{2}{(1+x^2)(1-\arctan x)^2}$；

(g) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arctan x}-\frac{\arcsin x}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$；

(h) $-\frac{5}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$．

4. 0.785

第四節，第 112 頁．

1. $3(x+1)^2$．　2. $6(3x+5)$．　3. $15x^{14}(3x^6-6x^3-1)(x^6-3x^3-1)^4$．

4. $-\frac{1}{(1+x)^2}$．　5. $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$．　6. $an(ax+b)^{n-1}$．

7. $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$．　8. $\frac{x^2(am-bl)+2x(an-cl)+(bn-cm)}{2\sqrt{(ax^2+bx+c)(lx^2+mx+n)^3}}$．

9. $-\frac{5}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}}$．　10. $\sin 2x$．　11. $2x\cos(x^2)$．　12. $-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$．

13. $2\left(x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$．　14. $\frac{2}{(1-x)^2}\sec^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$．

15. $(2x+3)\cos(x^2+3x+2)$．　16. [illegible] $\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$．　17. -1．

18. ± 1．　19. $\frac{\sqrt{2}}{x}\left(x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}\right)$．　20. $\sqrt{5}\cos(x+7)[\sin(x+7)]^{\sqrt{5}-1}$．

21. $-\frac{a\alpha\sin x[\arcsin(a\cos x+b)]^{\alpha-1}}{\sqrt{1-(a\cos x+b)^2}}$．

第五節 §3·5·4，第 120 頁．

1. 0·693．

2. (a) $\log x$；(b) $\frac{1}{x\log x}$；(c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；(d) $\frac{1-2x\sqrt{1+\log x}\cos x}{2x\sqrt{1+\log x}(\sqrt{1+\log x}-\sin x)}$．

3. $\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(2+x)}$．

4. $\frac{\sqrt[3]{7x^2+1}}{\sqrt[4]{x-2}\sqrt{x^4+1}}\left(\frac{14x}{3(7x^2+1)}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2x^3}{x^4+1}\right)$．

7. 試立次之遞演公式：$P_{n+1}(x)=(2-3nx^2)P_n(x)+x^3P_n'(x)$．

3.(a)$a^{a^x+x}(\log a)^2$; (b)$a^{\sin x(\log x)^2}\log a\log x\left\{\cos x\log x+\frac{2\sin x}{x}\right\}$.

第五節 §3·5·5, 第 124 頁.

1.(a)設 x 爲常數而對 y 取導數;然後令 y 等於 0.

(b)先就 x 之有理值求得 $f(x)$,然後由其連續性而推之於無理值.

2.對 y 求導數,然後令 $y=1$.

3. 2307 年(用七位對數表求得).

4.(a)$y=\beta+ce^{\alpha x}$; (b)$y=-\frac{\beta}{\alpha}+ce^{\alpha x}$, $\alpha\neq0$; $y=\beta x+c$, $\alpha=0$.

(c)$y=\beta xe^{\alpha x}+ce^{\alpha x}$; (d)$y=\frac{\beta}{\gamma-\alpha}e^{\gamma x}+ce^{\alpha x}$, $\gamma\neq\alpha$.

第六節,第 130 頁.

1.$\sinh a-\sinh b=2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$\cosh a+\cosh b=2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$\cosh a-\cosh b=2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

2.$\tanh(a\pm b)=\frac{\tanh a\pm\tanh b}{1\pm\tanh a\tanh b}$.

$\coth(a\pm b)=\frac{1\pm\coth a\coth b}{\coth a\pm\coth b}$.

$\sinh\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{\cosh a-1}{2}}$;$\cosh\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cosh a+1}{2}}$.

3.(a)$\sinh x+\cosh x$;(b)$-\frac{8e^{\tanh x+\coth x}}{\cosh 4x-1}$; (c)$(1+\sinh 2x)\coth(x+\cosh^2x)$;

(d)$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (e)$\frac{a\sinh x}{\sqrt{a^2\cosh^2x+1}}$; (f)$\frac{2}{1-x^2}$.

4.$\sinh b-\sinh a$.

第七節,第 134 頁.

1.(a)大於 x^N; (b)小於 x^ε; (c)小於 x^ε; (d)大於 x^N; (e),(f) 小於 $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$; (g)與 x 相同; (h)大於 x^N; (i) 小於 x^ε.

2.(a) $\beta>1$ 時,大於 $e^{\alpha x}$, $\beta<1$ 時, 小於 $e^{\alpha x}$; 與 e^{x^β} 相同; 大於$(\log x)^\alpha$; (b)小於 $e^{\alpha x}$, e^{x^α};(c)小於 $e^{\alpha x}$, e^{x^α}, $(\log x)^\alpha$; (d)與 e^x 相同; $\alpha>1$ 時, 小於 e^{x^α},$\alpha<1$ 時,大於 e^{x^α},大於 $(\log x)^\alpha$;(e),(f)小於 $e^{\alpha x}$,e^{x^α},與 $(\log x)^\alpha$ 不能較量;(g)小於 $e^{\alpha x}$,e^{x^α};大於 $(\log x)^\alpha$; (h)大於 $e^{\alpha x}$, $(\log x)^\alpha$; 大於 $e^{x^{1-\varepsilon}}$,小於 $e^{x^{1+\varepsilon}}$; (i)小於 $e^{\alpha x}$, e^{x^α};與 $\log x$

相同。

3.(a)與 x^5 相同;(b)小於 $\left(\frac{1}{x}\right)^5$;(c)、(d)與 x 相同;(e)與 $x^{\frac{5}{2}}$ 相同,(假定 arc tan x 僅取主值);(f)與 $x^{\frac{3}{2}}$ 相同;(g)大於 [illegible];(h)大於 [illegible],小於 x;(i)小於 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon}$.

4.是,0. 5. 0,1

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=0$. 8,9. 應用題 7 所得之結果.

附錄,第 140 頁.

1. $f''[g\{h(x)\}]g'^2\{h(x)\}h'^2(x)+f'[g\{h(x)\}]g''\{h(x)\}h'^2(x)$

$+f'[g\{h(x)\}]g'\{h(x)\}h''(x)$.

2.(a) $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\log x\cos x\right)$.

(b) $(\cos x)^{\tan x}\left(-\tan^2 x+\frac{\log\cos x}{\cos^2 x}\right)$.

(c) $\frac{u'(x)}{u(x)\log v(x)}-\frac{v'(x)\log u(x)}{v(x)\{\log v(x)\}^2}$.

4.(a) $e^{ax}[a^n x^3+3na^{n-1}x^2+3n(n-1)a^{n-2}x+n(n-1)(n-2)a^{n-3}]$;

(b) $\frac{2(-1)^n(n-1)!}{x^n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu}-\log x\right)$;

(c) $n=2m$ 時,$\frac{(-1)^m}{2}\{\cos x-3^{2m}\cos 3x\}$;

$n=2m+1$ 時,$\frac{(-1)^m}{2}\{3^{2m+1}\sin 3x-\sin x\}$;

(d) $n=2l$ 時,$\frac{(-1)^l}{2}[(m+k)^{2l}\sin(m+k)x-(m-k)^{2l}\sin(m-k)x]$;

$n=2l+1$ 時,$\frac{(-1)^l}{2}[(m+k)^{2l+1}\cos(m+k)x-(m-k)^{2l+1}\cos(m-k)x]$;

(e) $e^x\left[\left(\sum\limits_{l=0}^{2l\leq n}(-1)^l\binom{n}{2l}2^{2l}\right)\cos 2x\right.$

$\left.+\left(\sum\limits_{l=0}^{2l+1\leq n}(-1)^{l+1}\binom{n}{2l+1}2^{2l+1}\right)\sin 2x\right]$

$=5^{\frac{n}{2}}e^x\cos(2x+n\alpha)$,其中 $\tan\alpha=2$.

欲得後一式,可用二項式定理將 $(1+2i)^n$ 展開而分別集合其實數及虛數項。

(f) $e^x\cdot\sum\limits_{\nu=0}^{6}\nu!\binom{6}{\nu}\binom{n}{\nu}(1+x)^{6-\nu}$.

5.令 $y=\arcsin x$,則

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right).$$

應用 Leibniz 公式於最後一式：

$$\left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=0}=(n-2)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right)_{x=0}$$

$$=3\cdot(n-2)\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}\left(\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\right)_{x=0}.$$

如是繼續行之：

$$\left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=0}$$

$$=1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)\cdot(n-2)(n-4)\cdots(n-2\nu-2)\frac{d^{n-2\nu-2}}{dx^{n-2\nu-2}}\left(\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^{2\nu+1}}}\right)_{x=0},$$

苟 $n=2l$, $\left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=0}=0$;

苟 $n=2l+1$, $\left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=0}=1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2l-1)^2$,

$$\left.\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(\text{arc}\sin x)^2\right|_{x=0}=\sum_{k=0}^{l-1}\binom{2l}{2k+1}1^2\cdot3^2\cdots(2k-1)^2\cdot1^2\cdot3^2\cdots(2l-2k-3)^2.$$

$$\left.\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}(\text{arc}\sin x)^2\right|_{x=0}=0.$$

6. 取$(1+x)^n$之第二重導數而令$x=1$.

第 四 章

第二節，第 150 頁.

1. $\frac{1}{2}e^{x^2}$.　　2. $-\frac{1}{4}e^{-x^4}$.　　3. $\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}$.　　4. $\frac{1}{2}(\log x)^2$.

5. $-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\log x}\right)^{n-1}$.　　6. $\text{arc}\tan(3x-1)$. 可將分母書作$(3x-1)^2+1$.

7. $\text{ar}\sinh\frac{x-1}{2}$.　　8. $2x-\frac{4}{3}\log|2+3x|$. 注意$\frac{6x}{2+3x}=2-\frac{4}{2+3x}$.

9. $\text{arc}\sin x-\sqrt{1-x^2}$.　　10. $\text{ar}\sinh\frac{1+x}{2}$.　　11. $\text{arc}\sin\frac{x+1}{2}$.

12. $\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc}\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13. $2\,\text{ar}\cosh\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{x^2-4x+1}$.

14. $-\frac{1}{3}\sqrt{2+2x-3x^2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arc}\sin\frac{3x-1}{\sqrt{7}}$.

15. $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc}\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.　　16. $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc}\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

17. 若 $b-a^2>0$, $\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$;

若 $b-a^2=0$, $-\frac{1}{x+a}$;

若 $b-a^2<0$, $-\frac{1}{\sqrt{a^2-b}}\operatorname{artanh}\frac{x+a}{\sqrt{a^2-b}}$.

18. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\log|x+1|$.

19. $-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}$. 注意 $\sin^3 x\cos^4 x=\sin x\cos^4 x(1-\cos^2 x)$

$=\sin x\cos^4 x-\sin x\cos^6 x$.

20. $\frac{\sin^3 x}{3}-2\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}$.　　21. $\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{9}{2}}-\frac{1}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}}$.

22. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.　　23. $\frac{\pi^2}{32}$.

24. $\frac{1+(-1)^n}{n+1}$.　　25. 1.　　26. $\frac{1}{2(1+a^2)}-\frac{1}{2(1+b^2)}$.

27. $\frac{1}{3}(a^3-b^3)+\frac{1}{2}(a^2-b^2)+(a-b)+\log\frac{a-1}{b-1}$.

28. $\frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi^2}{2}\right)$.　　29. $\frac{1}{n+1}$. 參照第 65 頁題 8.

第三節,第 155 頁.

1. $-\frac{x}{\sin x}+\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$, 可取 $f=x$, $g'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

2. $\frac{x^4}{4(1-x^4)}+\frac{1}{4}\log|1-x^4|$. 可取 $f=\frac{x^4}{4}$, $g'=\frac{4x^3}{(1-x^4)^2}$.

3. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$.　　4. $-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$.

5. $\frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$.　　6. 0.　　7. $\frac{1}{2}(x^2\sin x^2+\cos x^2)$.

8. $\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x$.

9. $\frac{1}{192}\sin 6x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{5}{16}x$.

10. $x\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{6}x^4\right)+\frac{1}{16}\arcsin x$. 可設 $x=\cos\theta$.

11. $e^x(x^2-2x+2)$.　　12. $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\log x-\frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}$.

13. $\frac{x^{m+1}}{m+1}\log x-\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$.　　14. $\frac{1}{3}x^3\left\{(\log x)^2-\frac{2}{3}\log x+\frac{2}{9}\right\}$.

16. 設 $x^2=t$,然後應用題 15.

17. 可屢用分部積分法.

19. 應用數學歸納法：假定 n 疊積分 $f_n(x)$ 爲 $\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)(x-u)^{n-1}du$，而將被積函數依二項式定理展開. 則 $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$；即可逐項用分部積分法.

第四節，第 162 頁.

1. $\log\sqrt{\left|\frac{x}{2-3x}\right|}$. 2. $\log\left|1-\frac{1}{x}\right|$.

3. $\log\left|\frac{x}{x+1}\right|^3+\frac{3}{x+1}+\frac{3}{2(x+1)^2}$.

4. $\frac{x}{3}-\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{49}{72}\log|3x-5|$.

5. $-\frac{1}{2(x-1)}+\log\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$. 6. $-\frac{1}{2(x-1)}-\log\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$.

7. $-\log\sqrt[3]{|x-1|}+\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

8. $\log\sqrt[3]{|x+1|}-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

9. $\log\sqrt[5]{\frac{x^2+1}{(x-2)^2}}+\frac{9}{5}\arctan x$.

10. $\frac{2}{3}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-1|-\frac{3}{2}\log|x+1|$.

11. $-\frac{x^2}{2}+\log\sqrt[4]{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}-\frac{1}{2}\arctan x$.

12. $\frac{1}{3}\arctan x+\frac{\sqrt{3}}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})$

$$+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}).$$

13. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$.

14. $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\arctan x$.

第五節，第 167 頁.

1. $-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$. 2. $\tan\frac{x}{2}$. 3. $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $\frac{1}{8}\left(\tan^2\frac{x}{2}-\cot^2\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

5. $\log\left|\dfrac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$. 7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}$.

8. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{2\tan x}{\sqrt{3}}$. 9. $\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\log\cos x$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|$.

11. $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{\cos^2 x-\cos x+1}{(\cos^2 x+\cos x+1)^3}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{2\cos x-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}$.

12. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\operatorname{ar\,cosh}\dfrac{x}{2}$.

13. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{4+9x^2}+\dfrac{2}{3}\operatorname{ar\,sinh}\dfrac{3}{2}x$.

14. $2\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$.

15. $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x)^3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x}+4\operatorname{ar\,cosh}\dfrac{x+2}{2}$.

16. $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right|$.

17. $\log\left|x\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+\sqrt{1-x^2}$.

18. $\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{x-a}+\sqrt{(x-a)^2+(x-a)}-2\sqrt{x-a}$.

19. $\dfrac{2}{3(b-a)}\left(\sqrt{(x-a)^3}-\sqrt{(x-b)^3}\right)$. 可先將分母有理化.

第七節,第 176 頁.

1. 發散. 2. 收斂. 3. 收斂. 4. 收斂. 5. 發散.

6. 收斂. 7. 收斂. 8. 發散. 9. 收斂. 10. 收斂.

11. 收斂. 14. (a) $0<s<1$. (b) $0<s<2$. 15. 是.

17. $\dfrac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,sin} x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$. 可設 $\operatorname{arc\,sin} x=t$.

18. $\dfrac{1}{9}\cos^9 x-\dfrac{1}{7}\cos^7 x$. 19. $x\{(\log x)^2-2\log x+2\}$.

20. $\frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$.

21. $x-\sqrt{1-e^{-2x}}+\log\left(1+\sqrt{1-e^{-2x}}\right)$. 可設 $\sqrt{1-e^{-2x}}=t$.

22. 0.　　23. 0.　　26. 0.

28. $\log 2$.　可在變程 $1\leqq x\leqq 2$ 中考察函數 $\frac{1}{x}$.將此變程分成 n 等分後,如§2·1·1之法作其 F_n,適爲題中之 a_n.

29. $\frac{\pi}{2}$. 可與 $x=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ 時之 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 比較.

30. 可應用定積分之定義,先求得

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log 1+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\log\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

31. $\frac{1}{1+a}$.

第　五　章

第一節,第183頁.

1 (a)極大值在 $x=-\sqrt{2}$,　極小值在 $x=\sqrt{2}$,　反凹點在 $x=0$.

(b)極大值在 $x=\frac{2}{5}$,　極小值在 $x=0$,　反凹點在 $x=-\frac{1}{5}$.

(c)極大值在 $x=1$,　極小值在 $x=-1$,　反凹點在 $x=0,\pm\sqrt{3}$

(d)極大值在 $x=\sqrt[4]{3}$,　極小值在 $x=-\sqrt[4]{3}$,反凹點在 $x=0,\pm\sqrt[4]{6\pm\sqrt{33}}$.

(e)極大值在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,極小值在 $x=n\pi$,　反凹點在 $x=\frac{2n+1}{4}\pi$.

2. 極大值在 $x=-\sqrt{-p}$,極小值在 $x=\sqrt{-p}$,反凹點在 $x=0$. 若 $p\geqq 0$,無極大或極小值.其根或皆爲實數,或二爲複數,一爲實數,視 $q^2+4p^3\leqq 0$ 或 >0 而定.

3. $x=\frac{1}{\lambda}$,但必 $\lambda^{\alpha+1}>0$;否則,無極大值.其軌跡爲冪函數 $y=\frac{1}{e}x^{\alpha-1}$.

4. 點(0,1).

5. $\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}$.

6. $\sqrt{189}$ 呎.

7. 分 ab 線爲比率 $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$ 之點.

8. 正方形.

9. 頂點在 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$ 之矩形.

10. 直角三角形,即 $c^2=a^2+b^2$.

11. 矩形中與 g 相對之一邊須距圓心 $\frac{1}{4}\{\sqrt{g^2+h^2}+h\}$.

12. 底面直徑與高等長之圓柱體.

14. 設 ϕ 為稜鏡之角,而 n 為折射率,則入射角必須等於 $\arc\sin\left(n\sin\frac{\phi}{2}\right)$.

15. $x=\frac{\sum\limits_i a_i}{n}$.

16 求 x^p-px 之最小值.

17. 在變程 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 中求 $x-\sin x$ 及 $\sin x-\frac{2}{\pi}x$ 之最小值. 或證 $\frac{\sin x}{x}$ 在此變程中為獨行亦可.

19. $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}}$.

第二節,第 195 頁.

1. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$.

2. $x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{(R+r)\theta}{r}$, $y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{(R+r)\theta}{r}$. 設 c 以恆定速度滾動,並假定當 P 點與 c 圓相接觸時 $t=0$.

3. $x=2R\cos\theta(1-\cos\theta)+R$, $y=2R\sin\theta(1-\cos\theta)$.

4. $x=(R-r)\cos\theta+r\cos\frac{(R-r)\theta}{r}$, $y=(R-r)\sin\theta-r\sin\frac{(R-r)\theta}{r}$.

6. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$. 取直角坐標之原點於C之中心,而設 $t=0$ 時 P 點在 x 軸上.

7. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

10. $\alpha=\arc\tan\left(\frac{r(f'-g')}{r^2+f'g'}\right)$.

11 $x=\frac{f'(y_0g'+x_0f')-g'(gf'-fg')}{f'^2+g'^2}$, $y=\frac{g'(y_0g'+x_0f')+f'(gf'-fg')}{f'^2+g'^2}$.

12. (a)即 C 本身;(b)一心臟線,由直徑為 PM 之定圓所產生者,其頂點在 P.

第三節,第 212 頁.

1. $\frac{2}{5}(b^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}})$.　2. $\frac{5}{4}a^2$.　3. $\frac{1}{6}a^2(\theta_2{}^3-\theta_1{}^3)$.　4. $6\pi R^2$.

5. $6\pi r^2$.　6. $\pi(1+\frac{1}{2}x_0{}^2)$.　7. $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2+x_0{}^2)$.

8. $x=R+s\left(1-\frac{s}{2R}+\frac{s^2}{32R^2}\right)\left(1-\frac{s}{16R}\right)$.

$$y=R\left(\frac{s}{R}-\frac{s^2}{16R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{s}{8R}\right),\quad 0\leqq s\leqq 16R.$$

9. $x=2a\ \mathrm{arc\,cos}\left(1-\frac{s}{4a}\right)-\left(1-\frac{s}{4a}\right)\sqrt{\frac{s}{2a}\left(1-\frac{s}{8a}\right)}$,

$y=s-\frac{s^2}{8a}$, $0\leqq s\leqq 8a$.

10. $s=\sqrt{\left(\frac{4}{9}+x\right)^3}-\frac{8}{27}$. 11. $6R$.

12. (a) $\frac{1}{2}a(\mathrm{ar\,sinh}\,\theta+\theta\sqrt{1+\theta^2})$. (b) $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{m\theta}-e^{m\theta_0})$.

(c) $8R(1-\cos\frac{1}{2}\theta)$. (d) $a\left\{\frac{1}{3}(\theta^3-\theta_0^3)+\theta-\theta_0\right\}$.

13. (a) $\frac{1}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}$；在 $x=0$ 有極小值 $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{1}{ab}(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)$，設 $a>b$，在 $\phi=0,\ \pi$ 有極小值 $\frac{b}{a}$，在 $\phi=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$ 有極大值 $\frac{a}{b}$.

14. $\rho=\frac{1}{\sqrt{t}}$.

17. 體積 $\pi r^2(h_2-h_1)-\frac{1}{3}\pi(h_2^3-h_1^3)$. 表面積 $2\pi(h_2-h_1)r$.

18. 設 ρ 為圓半徑而 r 為由圓心至軸線之距離,則所求之體積為 $2\pi^2r\rho^2$，表面積為 $4\pi^2r\rho$.

19. $\pi(x_1-x_0)+\frac{\pi}{2}(\sinh 2x_1-\sinh 2x_0)$.

20. $h=\pi s$.

21. $y=-\mathrm{ar\,cosh}\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}+$ 常數；$s=\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$；

$x=e^s$，$y=-\mathrm{ar\,cosh}\,e^{-s}+\sqrt{1-e^{2s}}+$ 常數.

22. 設以 ds，ds' 分別表原曲線及平行曲線之弧長，l, l' 其全長，A, A' 其所包面積，k, k' 其曲率半徑,則有

$$ds'=(1+pk)ds;\qquad k'=\frac{k}{1+pk};$$

$$A'=A+lp+\pi p^2;\quad l'=l+2\pi p.$$

23. (a) $\xi=\frac{r(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}{\phi_2-\phi_1}$，$\eta=\frac{-r(\cos\phi_2-\cos\phi_1)}{\phi_2-\phi_1}$，

其中 ϕ_1，ϕ_2 為圓弧兩端之 θ 坐標.

(b) $\xi=\dfrac{x_2\sinh x_2-x_2\sinh x_1-\cosh x_2+\cosh x_1}{\sinh x_2-\sinh x_1}$,

$$\eta=\frac{2(x_2-x_1)+\sinh 2x_2-\sinh 2x_1}{4(\sinh x_2-\sinh x_1)},$$

其中 (x_1,y_1),(x_2,y_2) 爲弧之端點.

24. $(\alpha^2+\beta^2)(b-a)+\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)$.

25. (a) $\sinh x_2-\sinh x_1+\frac{1}{3}(\sinh^3 x_2-\sinh^3 x_1)$,

(b) $(x_2^2+2)\sinh x_2-(x_1^2+2)\sinh x_1-2x_2\cosh x_2+2x_1\cosh x_1$,假定 $0\leqq x_1\leqq x_2$.

第四節,第 223 頁.

1. $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{r\sin(2t/r)}{2\sqrt{l^2-r^2\sin^2(t/r)}}-\sin\dfrac{t}{r}$;

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{l^2\cos(2t/r)+r^2\sin^4(t/r)}{\sqrt{\{l^2-r^2\sin^2(t/r)\}^3}}-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}.$$

2. 0.

3. $u=\dfrac{v_0}{1+ksv_0}$, $t=\dfrac{s}{v_0}+\dfrac{1}{2}ks^2$

4. (a) $x=4\arctan e^t-\pi$; $x=\pi$.

5. (a) $t=\dfrac{1}{\sqrt{2\mu M}}\left(y_0\sqrt{y_0-y}-y_0^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{\dfrac{y}{y_0-y}}+\dfrac{1}{2}\pi y_0\right)$;

(b) $\sqrt{2\mu M\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{y_0}\right)}$; (c) $\sqrt{\dfrac{2\mu M}{R}}$.

6. $\theta=at$, $r=\dfrac{k}{1-e\cos at}$, 其中 $a=\dfrac{(1-e)^2}{k^2}\sqrt{ck}$;

週期 $=\dfrac{2\pi}{a}=\dfrac{2\pi}{(1-e)^2c^{\frac{1}{2}}}k^{\frac{3}{2}}$.

第　六　章

第一節,第 232 頁.

1. 0.28.　　2. 0.182.　　3. 不可能;展開爲級數無效.

第二節,第 237 頁.

1. 應用 Taylor 展開式至三項.

2. $\dfrac{1}{1-x}$: $\theta=\dfrac{1-(1-x)^{\frac{1}{n+2}}}{x}$; $\dfrac{1}{1+x}$: $\theta=\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{n+2}}-1}{x}$.

第三節，第 240 頁。

1. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4(1+\theta x)^{3/2}}$；$-\frac{1}{4}<R<-\frac{\sqrt{2}}{16}$.

2. 1·5；誤差適過 6%.

3. $1+\frac{1}{3}x$；$|x|<0\cdot3$.

4. $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$；$\frac{5}{81}\times10^{-3}$

5. (a) $1+\frac{x}{n}$；$\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\times10^{-2}$.

(b) $1+\frac{x}{n}+\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}-1\right)x^2$；$\frac{1}{6n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\times10^{-3}$.

6. 0·0100.　　7. (a) 0·9999；(b) 5·0133；(c) 9·8489.　　8. 0·515.

9. $x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}+\frac{x^8}{8!}(-128\cos(2\theta x))$.

10. $1-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}-\frac{3}{4}\frac{x^6}{6!}(243\cos(3\theta x)+\cos(\theta x))$.

11. $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-16\frac{x^8}{8!}(17+248\tan^2(\theta x)+756\tan^4(\theta x)$
$+840\tan^6(\theta x)+315\tan^8(\theta x))$.

12. $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+16\frac{x^7}{7!}(17+248\tan^2(\theta x)+756\tan^4(\theta x)$
$+840\tan^6(\theta x)+315\tan^8(\theta x))$.

13. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{45}x^6+16\frac{x^8}{8!}(17+248\tan^2(\theta x)+756\tan^4(\theta x)$
$+840\tan^6(\theta x)+315\tan^8(\theta x))$.

14. $1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{x^6}{3!}e^{-\theta^2x^2}$.

15. $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{x^6}{6!}(720\sec^7(\theta x)-840\sec^5(\theta x)+182\sec^3(\theta x)-\sec(\theta x))$.

16. $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots$.

17. $\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\cdots$.

18. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+\frac{x^4}{4!}\frac{1}{(1+\theta x)^5}(-50+24\log\overline{1+\theta x})$.

19. $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{24}x^4+\frac{x^5}{5!}e^{\sin\theta x}(\cos^5(\theta x)-10\cos^3(\theta x)+\cos(\theta x)$
$-10\sin(\theta x)\cos^3(\theta x)+15\sin(\theta x)\cos(\theta x)+6\sin^2(\theta x)\cos(\theta x))$.

20. $x+\frac{1}{3}x^3$；$0<x<\frac{\pi}{4}$.

21. (a) $y=x^2+x^4+2x^6+\cdots$；　(b) $y=1-x^2-x^4-2x^6-\cdots$；

(c) $y=x^3+x^9+\cdots$.

第四節，第 244 頁.

1. 2.　2. 4.　3. $a=-\frac{8}{3}$，$b=-\frac{16}{3}$，$c=\frac{5}{3}$，$d=-\frac{5}{3}$.

4. 在(0,0)爲三重，又爲零重；在$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$爲零重.

5. 在(0,0)爲三重.

7. 取 P 爲原點，曲線上 P 點之切線爲 x 軸. 令 Q 之坐標爲(x,y). 則題中圓線之中心必在 y 軸上 $\eta=\frac{y}{2}+\frac{x^2}{2y}$ 之點；更應用題6.

8. 取軸如題 7；設曲線在 Q 點之斜度爲 y'，則二法線必相交於 y 軸上 $\eta=y+\frac{x}{y'}$ 之點. 乃可書 $y=\frac{y''(0)}{2!}x^2+\cdots$ 而令 $x\to 0$.

9. 在 $\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ 爲莫大爲莫小之點，必有 $y'''=\frac{3y'y''^2}{(1+y'^2)}$. 取軸如題 7；則 $y'''(0)=0$，因之在 $x=0$ 鄰近此曲線之方程式爲 $y=\frac{1}{2\rho}x^2+ax^4+\cdots$. 密切圓之方程式爲 $y=\frac{1}{2\rho}x^2+bx^4+\cdots$，故其接觸重數至少爲三.

10. 在 $x=0$ 有莫小值.

附錄，第 249 頁.

1. na^{n-1}.　2. $\frac{1}{6}$.　3. $\frac{1}{30}$.　4. 2.　5. 1.

6. $\frac{1}{5}$. 原式可書作$\frac{\cot x}{\cot 5x}$.

7. $\frac{1}{2}$.　8. $\frac{1}{3}$.　9. 1. 可先取對數.

10. e.　11. 2.　12. -2.

第　七　章

第一節，第 259 頁.

1. (a) 3.14；(b) 3.1416.　2. 0.89.　3. 0.93.

第二節,第 264 頁.

1.誤差 < -0.03 米 $< 0.007\%$　　2. 0.693.　　3. 1.609438.

4. 3.14159.

第三節,第 269 頁.

1. 1.0765.　　2. 4.4934.　　3. 1.175.　　4. 0, 1.90, -1.90.

5. 1.045.

6. 1.519.原方程式可書作 $x = 1 - 0.3x^3 - 0.1x^4$.

7. $-1.2361, 3.2361, 5.0000$.

第八章

第一節,第 281 頁.

1 應用 $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$ 之關係.

2.先分裂 $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ 爲部分分數:乃依次以 $x=1, x=2, \cdots x=\nu$ 代入之而一一相加.

4. $a>0$ 時收斂.

5.設 $\Sigma a_\nu = A$.任與一正 ε,俟 n 大於某一 m,即有 $|s_n - A| < \varepsilon$.可書

$$\frac{s_1 + \cdots + s_N}{N} = \frac{s_1 + \cdots + s_m}{N} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{s_{m+1} + \cdots + s_N}{N-m},$$

而令 $N \to \infty$.

6.收斂.

7.發散.

第二節,第 285 頁.

1.收斂.

2.收斂.先證 $n>2$ 時 $\frac{n!}{n^n} \leqq \frac{2}{n^2}$.

3.發散.　　4.發散.參閱第三章第七節.

5.收斂.注意 n 相當大時 $(\log n)^{\log n} = n^{\log(\log n)}$ 而 $\log(\log n) > 2$.

6.收斂.　　7. $\frac{1}{(n+1)^2}$.

8.誤差 $=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}<\frac{1}{n\cdot n!}.$$

9.誤差 $=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\frac{1}{(n+1)^{n+3}}+\cdots<\frac{1}{n(n+1)^n}.$$

10.誤差 $=\frac{n+1}{2^{n+1}}+\frac{n+2}{2^{n+2}}+\cdots$,但於 $n>1$ 時,

$$n+2<\frac{3}{2}(n+1),\ n+3<\frac{3}{2}(n+2)<\left(\frac{3}{2}\right)^2(n+1),\ \cdots;$$

故　　誤差 $<\frac{n+1}{2^{n+1}}\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\right]<\frac{n+1}{2^{n-1}}.$

12.是.

13.可與 $\int\frac{dx}{x(\log x)^a}$ 比較.

14.可與 $\int\frac{dx}{x\log x(\log\log x)^a}$ 比較.

16.應用 Schwarz 不等式.

17. $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\cdots-\frac{2}{3n+3}=\sum_{\nu=1}^{3n+3}\frac{1}{\nu}-3\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{1}{3\nu}=\sum_{\nu=n+2}^{3n+3}\frac{1}{\nu}$;

乃應用第 284 頁脚注中之公式,即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}=\log n+c+\varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

18.取自 $\nu=1$ 至 $\nu=mn$ 之和:

$$\sum_{\nu=1}^{mn}\frac{a_\nu^{(n)}}{\nu}=\sum_{\nu\neq kn}\frac{1}{\nu}-\sum_{\nu=kn}\frac{n-1}{\nu}=\sum_{\nu=1}^{mn}\frac{1}{\nu}-\sum_{k=1}^{m}\frac{n}{kn}=\sum_{\nu=m+1}^{mn}\frac{1}{\nu}.$$

第三節,第 296 頁.

3.(a) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, x=0,\\ 1, x\neq 0.\end{cases}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, x=0,\\ 1, x\neq 0\end{cases}$ $(a>0)$.

其收斂也不勻,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx$

4. $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

9. 一正方形，中心在原點而各邊與坐標軸平行，邊長爲 1. 可由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1-x^{2n}}$，其中 $-1<x<+1$ 及 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1-y^{2n}}$；其中 $-1<y<+1$ 而知之。

10. 設 $\varepsilon>0$. 以 $x_0=a, x_1, \cdots, x_m=b$ 各點將區間分爲長度小於 $\frac{\varepsilon}{3M}$ 之分段. 在每一 x_i 點，可選擇充分大之 n_i，俾 n 及 $m>n_i$ 時，$|f_n(x_i)-f_m(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 設 N 爲 $n_0, n_1, \cdots n_m$ 中之最大者，乃可藉中值定理以證明 n 及 $m>N$ 時 不等式 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ 在每分段中均得成立.

第四，五節，第 305 頁.

在題 1－20 中，檢比法大都有效，但題 12－15 以用檢根法爲佾.

1. $|x|<1$.　　2. $|x|<1$.　　3. $|x|<1$.

4. $|x|<1$.　　5. $|x|<1$.　　6. $-\infty<x<+\infty$.

7. $|x|<1$.　　8. $|x|<1$.　　9. $|x|<1$.

10. $|x|<1$.　　11. $|x|<1$.　　12. $|x|<\frac{1}{a}$.

13. $|x|<1$.　　14. $|x|<1$.　　15. $-\infty<x<+\infty$.

16. $|x|<4$.　　17. $|x|<1$.　　18. $|x|<1$ 或 a，視何者較大.

19. $|x|<1$.　　20. $|x|<1$.　　注意 $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ 之值在 $\frac{1}{n}$ 及 $\frac{1}{n^2}$ 之間.

21. $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\log a)^{\nu}}{\nu!}x^{\nu}$.

22. $-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n+2}-\cdots=-\frac{1}{x^2}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{\nu}$.

23. $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}}{(2\nu)!}x^{2\nu}$.　　可先改書 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

24. $1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}2^{2\nu-1}}{(2\nu)!}x^{2\nu}$.

25. $\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(2x)^{2\nu}}{32(2\nu)!}(15+3^{2\nu}-6\cdot 2^{2\nu})$.

26. $x^3+\frac{1}{2}\frac{x^9}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^{15}}{5}+\cdots=x^3+\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(x^3)^{2\nu-1}}{2\nu-1}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2\nu-3)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2\nu-2)}$.

27. 1.4142.

28.(a) $1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{320}+\frac{1}{3\cdot 2^{12}}+\cdots$

(c) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots$

(d) $\frac{1}{10}-\frac{2^6-1}{10^6}+\frac{2^9-1}{24\cdot 10^9}-\cdots$ 試設 $x=\frac{1}{t}$.

29.(a) $x+x^2+\frac{x^3}{3}$.　　(b) $x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}$.

(c) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{13x^4}{24}+\frac{19x^5}{48}$.　　(d) $x^2-\frac{x^4}{3}$.

31. $|x|<\rho$.

32. $f(x)=4e^x-x-1$.

附錄,第 321 頁.

1.於第 n 項將級數斷去;則

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n<1-\sqrt{1-x}\leqq 1.$$ 令 $x=1$;

可知所有部分和皆 $\leqq 1$.

2.應用題 1.試示在 $x=1$ 時有最大之誤差,且可令其小於 ε.

3.可書 $|t|=\sqrt{t^2}=\sqrt{1-(1-t^2)}$;乃於題 2 中令 $x=1-t^2$.

4.以交替式 $x=a+(b-a)t$ 將函數 $f(x)$ 化爲另一函數 $\phi(t)$,$0\leqq t\leqq 1$;復以一多角形函數 $\psi(t)$ 近似表達 $\phi(t)$,使其誤差不大於 $\frac{\varepsilon}{2}$(參閱第 56 頁題 2).$\psi(t)$ 可寫成一和數之形式,如 $a+bt+\Sigma c_i|t-t_0|$.此式又可藉一多項式近似表達之(參照題 3),然後易 t 以由 x 表達之式.

7.倘素數之個數有盡,則此恆等式於任何正 s 均將有效,於 $s=1$ 亦然.(絕對斂級數之相乘).

8.先用歸納法證

$$(1-x)\prod_{\nu=0}^{n-1}(1+x^{2^\nu})=1-x^{2^n}.$$

第 九 章

第一,二節,第 332 頁.

3. $\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x\sin\frac{n}{2}x/\sin\frac{1}{2}x$. $\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x$ 爲 $\sum_{\nu=0}^{n}e^{i\nu x}$ 之虛數部分.

4. 應用 §9·2·3 中之公式 $\sigma_n(x)=\frac{1}{2}(1-e^{ix})^{-1}(e^{-ix}-e^{(n+1)ix})$.

5. 求 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_k(x)dx$ 之值，然後應用由 $\sigma_k(x)$ 表達之 $s_n(x)$ 公式.

第三節,第 339 頁.

1. (a) $\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{a^2+\nu^2}(a\cos\nu x-\nu\sin\nu x)\right\}$.

(b) $\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^4}\cos\nu x$.

(c) 若 a 非整數，$\frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\nu\left[\frac{1}{\nu^2-(a+1)^2}+\frac{1}{\nu^2-(a-1)^2}-\frac{[illegible]}{\nu^2-a^2}\right]\sin\nu x$;

若 a 爲整數，$\frac{1}{2}\sin(a-1)x+\sin ax+\frac{1}{2}\sin(a+1)x$.

(d) $\frac{b-a}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu b-\sin\nu a}{\nu}\cos\nu x-\frac{\cos\nu b-\cos\nu a}{\nu}\sin\nu x\right)$.

2. 應用交替式 $x=-\pi+2\pi t$ 於 §9·3·2 例一.

3. $B_2(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$; $B_3(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$; $B_4(t)=t^4-2t^3+t^2-\frac{1}{30}$.

4. $B_1(t)$ 已見題 2. 據題 3 (b) 之定義，其餘各展開式可由逐求積分得之. 各積分常數須證明爲零.

5. 在題 3,4 所得之 $B_2(t)$ 與 $B_4(t)$ 中，令 $t=0$.

6. 在題 3 所得之 $B_3(t)$ 中，令 $t=\frac{1}{4}$.

8. $\cos\pi x=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}\right)$.

第十章

第二節,第 351 頁.

1. $c_1e^{t}+c_2e^{2t}$; $e^{2t}-e^{t}$.

2. $c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$; $e^{-t}-e^{-2t}$.

3. $c_1e^{\frac{1}{2}t}+c_2e^{-t}$; $\frac{2}{3}(e^{\frac{1}{2}t}-e^{-t})$.

4. $c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$；te^{-2t}.

5. $c_1e^{-\frac{1}{2}t}+c_2te^{-\frac{1}{2}t}$；$te^{-\frac{1}{2}t}$.

6. $e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=ae^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\delta)$；

$\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$；$\nu=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tau=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$，$a=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\delta=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\pi\right)$；$a=\sqrt{2}$，$\delta=-\frac{\pi}{2}$，$\nu=\frac{1}{2}$.

第三節，第 361 頁.

1. $-\frac{e^{-t}}{1+\omega^2}+\frac{2e^{-2t}}{4+\omega^2}+\frac{(2-\omega^2)\cos\omega t+3\omega\sin\omega t}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$；

$a=\frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}}$，$\tan\omega\delta=\frac{3\omega}{2-\omega^2}$，$\omega=0$.

2. $\frac{e^{-\frac{1}{2}t}\left((\omega^2-1)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega^2+1)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{1-\omega^2+\omega^4}+\frac{(1-\omega^2)\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{1-\omega^2+\omega^4}$；

$a=\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2+\omega^4}}$，$\tan\omega\delta=\frac{\omega}{1-\omega^2}$，$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $\frac{e^{-\frac{1}{2}t}\left(\omega\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega(2\omega^2-1)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{1-\omega^2+\omega^4}+\frac{(1-\omega^2)\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{1-\omega^2+\omega^4}$；

a，$\tan\omega\delta$，ω 與題 2 同.

4. $\frac{-e^{-\frac{1}{2}t}\left[(1-2\omega^2)\cos\frac{1}{2}t+(1+2\omega^2)\sin\frac{1}{2}t\right]}{1+4\omega^4}+\frac{(1-2\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{1+4\omega^4}$；

$a=\frac{1}{\sqrt{1+4\omega^4}}$，$\tan\omega\delta=\frac{2\omega}{1-2\omega^2}$，$\omega=0$.

5. $e^{-2t}\left(\frac{\omega^2-4}{(\omega^2+4)^2}-\frac{2t}{\omega^2+4}\right)+\frac{(4-\omega^2)\cos\omega t+4\omega\sin\omega t}{(\omega^2+4)^2}$.

雜　　題

1. 應用 §1·4·2 例六(第 26 頁).

2. $39=1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3+0$，故所求答案爲 1110.

3. (a) 10011100；(b) 2130.

4. (a) 758；(b) 5954；(c) 10,000；(d) 0.2；(e) 0.023；(f) $0.\dot{2}40\dot{7}$.

5. (a) $1\cdot41<\sqrt{2}<1\cdot42$；(b) 2·65.

6. (a) $x\leq\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$x\geq\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

(b)x 不限何值.

(c)$x\leqq-3-2\sqrt{2}$; $-3+2\sqrt{2}\leqq x\leqq 3-2\sqrt{2}$; $x\geqq 3+2\sqrt{2}$.

(d)$x\geqq -2$.

7.將兩邊平方之卽得.等號僅於 $a=b$ 時適用.

8.應用題 7.等號僅於 $a=b$ 時適用.

9.(a)將下列三不等式 $a^2+b^2\geqq 2ab, b^2+c^2\geqq 2bc, c^2+a^2\geqq 2ca$ 相加.

(b)將下列三不等式 $\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2}\geqq\sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2}\geqq\sqrt{ca}$ 相乘.

(c)將不等式之形如 $a^2b^2+b^2c^2\geqq 2b^2ac$ 者相加.

10.應用 Schwarz 不等式於 x_1, x_2, x_3 及 1,1,1 諸數.

11.由 $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqq 0$ 之關係得

$$a_ib_i+a_jb_j\geqq a_ib_j+a_jb_i;$$

依次令 i 及 j 取各整數值而求其由 1 至 n 之和.

12.(a)用二項式定理將 $(1-1)^n$ 展開.

(e)在恆等式 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ 中,將兩邊分別展開而集其含 x^n 之項.

14.$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

15.(a)$\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}$.可書 $\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)}-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\right)$ 而求其由 $\nu=1$ 至 n 之和.

(b)$\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$; (c)$\frac{7n^2+21n+8}{36(n+1)(n+2)}$.

16.(a)$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$; (b)$\frac{1}{6}(5n^3-18n^2+n-30)$.

17.(a)$\frac{1}{6}n(n^2+5)$; (b)$\frac{1}{24}n(n-5)(5n^2+11n+26)$.

19.(a)1;(b)$\frac{1}{4}$;(c)∞.

25.(c)若 $m>n$, $|a_m-a_n|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots m}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

(d)與(c)相仿.

26. 設 $c_n=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}$, $d_n=\sum_{\tau=0}^{n}\frac{(-1)^\tau}{\tau!}$.

$c_nd_n=\sum_{\nu,\tau=0}^{n}\frac{(-1)^\tau}{\tau!\nu!}$，又令 $\tau+\nu=\mu$，則

$$c_nd_n=\sum_{\mu=n+1}^{2n}\sum_{\tau=0}^{n}\frac{(-1)^\tau}{\tau!(\mu-\tau)!}+\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\tau=0}^{\mu}\frac{(-1)^\tau}{\tau!(\mu-\tau)!}.$$

但 $\mu>0$ 時，$\sum_{\tau=0}^{\mu}\frac{(-1)^\tau}{\tau!(\mu-\tau)!}=0$，故

$$|c_nd_n-1|=\left|\sum_{\mu=n+1}^{2n}\sum_{\tau=0}^{\mu}\frac{(-1)^\tau}{\tau!(\mu-\tau)!}\right|<\sum_{\mu=n+1}^{2n}\frac{2^\mu}{\mu!}$$

$$<\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{2}{n+1}+\frac{2^2}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{n+1}}<\frac{2^{n+1}}{(n-1)\cdot n!}.$$

因 $n\to\infty$ 時 $\frac{2^n}{n!}\to0$，故 $c_nd_n\to1$ 而 $\lim_{n\to\infty}d_n=\frac{1}{e}$.

27. (a)此數序爲漸升而有上界2，蓋若 $a_n<2$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{4}<2$ 也.

(b)設 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 然後用 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 之關係以得 $a=\sqrt{2+a}$ 或 $a=2$.

33. (a)1; (b)1; (c)$\frac{1}{e}$.

35. (a)$\frac{1}{11}$; (b)$\frac{1}{1001}$; (c)$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

36. (a)$\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$; (b)$\frac{\varepsilon}{7}$; (c)arc cos$(1-\varepsilon)$.

39 若 x 爲有理，$n!x$ 於 n 充分大時爲一偶數.

40. (a)連續;(b)在 $x=0$ 有間斷點;(c)在 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 有間斷點. (d)在 x 之所有值均不連續.

42. 有;可將其在 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{5}$ 之符號.

44. 設 ε 爲任意; 則僅須 $|x'-x''|<\delta$ 即有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 特別若 $|x'-a|<\delta$, $|x''-a|<\delta$, 則 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, 此即爲 Cauchy 審斂法.

46. $\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

47. $f'(x)=(1+2x)\sin\frac{1}{x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

48. $f''(x)=\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{2}{x^2}\cos x$, $x\neq 0$; $f''(0)=-\frac{1}{3}$.

49. 可用中值定理.

50. 可用中值定理.

51. 可由 $\varphi(x)=\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}$ 考之. 試證其於 h 極小(而固定)時,取在 μ 上下之值;由是知有 x 之某值使 $\varphi(x)=\mu$,再應用中值定理.

52. 求出切線之方程式 $y=g(x)$;應用中值定理於 $f'(x)-g'(x)$,並用題 49 之結果.

53. 求出該弦之方程式 $y=g(x)$;取 $h(x)=f(x)-g(x)$, $h''(x)=f''(x)\geqq 0$, 而考之. 若在變程 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 之某處 $h(x)>0$, 則將有一點 ξ 令 $h'(\xi)=0$, $h(\xi)>0$;然後應用題 52.

54. 應用題 53.

55. 0.006.

56. (a) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; (b) $\sec^2 x$.

57. (a) 2; (b) 1. 可應用題 56.

60. 設 $\mu=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt$. 求出曲線 $y=f(x)$ 在 $x=\mu$ 點上之切線方程式 $y=g(x)$. 則可知於 x 之一切值 $f(x)\geqq g(x)$(參照題 52). 令 $x=u(t)$ 而求其積分.

61. 假定加速度處處小於 4. 則 $v<4t$, 而同理 $v<4-4t$. 於是其所經距離, $s=\int_0^1 v\,dt$, 將小於 1.

62. (a) $\left(\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\cot x\right)e^{\tan^2 x+\log\sin x}$.

(b) $4(x+2)^3(x^2+1)^{\frac{5}{7}}\sqrt[3]{1-x^2}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}(x+2)^4(x^2+1)^{\frac{5}{7}}$

$+\frac{10}{7}x(x^2+1)^{-\frac{2}{7}}(x+2)^4\sqrt[3]{1-x^2}$,

(c) $-x\sin x+\cos x+3x^2\sin x+x^3\cos x-\frac{3x^2}{\sin x}+\frac{x^3\cos x}{\sin^2 x}$.

63. 條件為 $ac-b^2>0$, $a>0$, $ab-a\beta=0$, $\alpha\neq 0$, 或 $a=b=0$, $\alpha\neq 0$, $c\neq 0$. 無論 x 為任何實數值,分母須不為零;此可考其判別式. 又,導數之分子亦須不為零.

66. (a) 較大; (b) 相同; (c) 較小; (d) 較大.

68. 求左方之積分，一一相加，然後復求導數.

70. 據 Leibniz 式，$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2/2}) = \frac{d^n}{dx^n}(-xe^{-x^2/2})$

$$= -x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) - n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2/2}).$$

71. 自二方程式消去 u_{n+1} 得 $u'_n = nu_{n-1}$；求第一方程式之導數並應用此關係式.

72. $u_n(x) = x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}x^{n-4} + \cdots$.

73. (a) 應用 Leibniz 公式於 $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} = \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}[(x^2-1)\cdot(x^2-1)^n]$；

(b) 應用 Leibniz 公式於 $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[2(n+1)x\cdot(x^2-1)^n]$；

(c) 將 (a) 及 (b) 中表 P''_{n+1} 之兩式相等.

74. $P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}\cdots\right)$.

75. 與題 74 相同.

76. 據兩項式定理，$\sum_{n=0}^{p}\lambda_{n,p}(x) = (x+1-x)^p = 1$.

又，求

$$(a+x)^p = \sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}a^{p-n}x^n$$

之導數 k 次之後，得

$$\binom{p}{k}(a+x)^{p-k} = \sum_{n=k}^{p}\binom{p}{n}\binom{n}{k}a^{p-n}x^{n-k}.$$

以 x^k 乘此式而令 $a=1-x$，即有

$$\binom{p}{k}x^k = \sum_{n=k}^{p}\binom{n}{k}\binom{p}{n}(1-x)^{p-n}x^n = \sum_{n=k}^{p}\binom{n}{k}\lambda_{n,p}(x).$$

77. $\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 12x^{\frac{1}{12}}$

$$-2\log(1+x^{\frac{1}{4}}) - 4\log(1+x^{\frac{1}{12}}) - 4\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{12}} - \frac{1}{2}\right).$$

78. $\frac{4}{7}(1+e^x)^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{4}}$.

79. $-6\sqrt[6]{(1+x)^2}\left\{-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\sqrt[6]{1+x} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{1+x} + \frac{1}{7}\sqrt{1+x} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x)^2}\right.$

$$\left. + \frac{1}{9}\sqrt[6]{(1+x)^5}\right\}.$$

80. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.　令 $x+\frac{1}{x}=t$.

81. $\frac{1}{n}\arccos\frac{1}{x^n}$.

82. $\frac{1}{n!}\left[\log x-\binom{n}{1}\log(x+1)+\binom{n}{2}\log(x+2)-\cdots\pm\binom{n}{n}\log(x+n)\right]$.

83. 若 n 為偶，$\frac{(n-1)(n-3)\cdots1}{n(n-2)\cdots2}\cdot\frac{\pi}{2}$；若 n 為奇，$\frac{(n-1)(n-3)\cdots2}{n(n-2)\cdots3}$.

84. $\frac{2^{12}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}$.　　85. $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

86. $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.　　87. $\frac{\pi}{16}$.　　88. $\frac{\pi}{8}$.

89. $\int x^a(\log x)^m\,dx=\frac{x^{a+1}(\log x)^m}{a+1}-\frac{m}{a+1}\int x^a(\log x)^{m-1}dx$.

90. $\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$

$$-\frac{an}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx+\frac{bn}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx.$$

91. $\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$

$$-\frac{an}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx-\frac{bn}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx.$$

92. $\int e^{ax}\sinh bx\,dx=\frac{e^{ax}}{b^2-a^2}(b\cosh bx-a\sinh bx)$.

93. $\int e^{ax}\cosh bx\,dx=\frac{e^{ax}}{b^2-a^2}(b\sinh bx-a\cosh bx)$.

95,96,97. 用分部積分法.

98. $\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

99. 收斂.　　100. 收斂.

101. $n>-1$ 時收斂；$n\leqq-1$ 時發散.

102. $n>-1, m>-1$ 時收斂；否則發散.

103. $n>0, m>-1$ 時收斂；否則發散.

104. 收斂.　　105. 發散.

106. 收斂.　　107. 收斂.

108. $n>0$ 時收斂；$n\leqq0$ 時發散.

109. $m>n-1$ 時收斂；$m\leqq n-1$ 時發散.

110. 收斂.　可書

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}=\left(\int_{\nu\pi}^{(\nu+\epsilon)\pi}+\int_{(\nu+\epsilon)\pi}^{(\nu+1-\epsilon)\pi}+\int_{(\nu+1-\epsilon)\pi}^{(\nu+1)\pi}\right)\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}.$$

而考之，在右方首末兩積分中，其被積函數皆 <1，而在第二個積分中，其被積函數

$<\frac{1}{\pi^4\nu^4\sin^2\varepsilon\pi}$，由是

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}<2\varepsilon\pi+\frac{\pi}{\pi^4\nu^4\sin^2\varepsilon\pi}.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{\nu^{\frac{4}{3}}}$；則 $\sin\varepsilon\pi>\frac{1}{2}\varepsilon\pi$，而

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}<\frac{k}{\nu^{\frac{4}{3}}}<k\int_{\nu-1}^{\nu}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

其中 k 爲一常數.最後，

$$\int_A^B\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}<\int_{n\pi}^{m\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}<k\int_{(n-1)\pi}^{(m-1)\pi}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{3k}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{m-1}}\right]<\frac{3k}{\pi^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{n-1}}\to0 \quad 當\ n\to\infty.$$

或，$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2x}<\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+(\nu\pi)^4\sin^2x}<\frac{\pi}{\sqrt{1+(\nu\pi)^4}}<\frac{k}{\nu^2}.$$

111.發散. $$\int_0^A\frac{xdx}{1+x^2\sin^2x}>\int_0^A\frac{xdx}{1+x^2}>\frac{1}{2}\log(1+A^2).$$

112.於 $\beta<-2$, $\beta+1<\alpha<-1$ 或 $\beta>0$, $-1<\alpha<\frac{\beta}{2}-1$ 時爲收斂；否則發散.

假定 $\beta\leqq0$. 則 $\int^\infty\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}$ 僅於 $\alpha<-1$ 時收斂；$\int_0\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}$ 之性質與 $\int_0\frac{x^\alpha dx}{1+x^{\beta+2}}$ 相似，即苟 $\beta+2\geqq0$，則 $\alpha>-1$ 適與前相反；苟 $\beta+2<0$，則 $\alpha-\beta-2>-1$.

假定 $\beta>0$. 則 $\int_0\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}$ 僅於 $\alpha>-1$ 時收斂. 且

$$\frac{\nu^\alpha\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(\nu+1)^\beta\pi^\beta}}=\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{(\nu\pi)^\alpha dx}{1+(\nu+1)^\beta\pi^\beta\sin^2x}$$

$$<\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}<\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{(\nu+1)^\alpha\pi^\alpha dx}{1+(\nu\pi)^\beta\sin^2x}<\frac{(\nu+1)^\alpha\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(\nu\pi)^\beta}},$$

或 $$k_1\nu^{\alpha-\frac{\beta}{2}}<\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}<k_2\nu^{\alpha-\frac{\beta}{2}}.$$

故 $\int_\pi^\infty\frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta\sin^2x}$ 於 $\alpha-\frac{\beta}{2}<-1$ 時，且僅於此時爲收斂.

此積分之估值可用題 110 之法.

113. $$\int_a^\infty\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=\int_{a\alpha}^\infty\frac{f(x)}{x}dx-\int_{a\beta}^\infty\frac{f(x)}{x}dx.$$

$$=\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(x)}{x}dx=L\log\frac{\beta}{\alpha}+\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(x)-L}{x}dx.$$

此最後之積分可證其於 $a\to0$ 時趨於零

115. 可由$\int_a^b \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx$考之,如題113.

116. 可在公式$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt$中,分別以$t^2$及$\log\frac{1}{t}$代之.

117. 在$x=-\frac{1}{e}$有極大點,$x=\frac{1}{e}$有極小點,在$(0,1)$及方程式$(2+\log x^2)^2+\frac{2}{x}=0$所定之點上有反凹點.

121. 設T為面積一定而周圍最小之三角形,又設b為其任何一邊.於是,令b固定不變,T必為有已知面積與底邊b之三角形,其周圍最小者.故T必為等腰,即T之其他兩邊必相等.但b為任何一邊,故T必等邊.

以解析法作證,祇須就等腰三角形論之.設三點之坐標為$(-x,0)$,$(x,0)$及$(0,\frac{A}{x})$;則其周圍為$2x+\frac{2}{x}\sqrt{x^4+A^2}$.令其首重導數等於零,並求其第二導數.

122. 由題118之故,就等腰三角形論之可矣.

123. 由題119之故,就等腰三角形論之可矣.

124. (a)$x\geqq0$時,$(1+x)e^{-x}$之導數,恆為正;$x\geqq0$時於$x=0$有最小值,即1是也;(b)求(a)自0至x之積分;(c)求(b)自0至x之積分.

125. 設$f(\theta)=\frac{[\theta a^p+(1-\theta)b^p]^{\frac{1}{p}}}{[\theta a^q+(1-\theta)b^q]^{\frac{1}{q}}}$,於是$f(0)=f(1)=1$.求$f'(\theta)$,並示在變程0至1中或有$f'(\theta)\equiv0$,或恰有$\theta$之一值,令$f'(\theta)=0$.在後一種情形,示$f(\theta)$於$0<\theta<1$之間決不為1.乃可求$f'(0)$;其值除一正因數外等於

$$b^q\frac{a^p-b^p}{p}-b^p\frac{a^q-b^q}{q}=\int_b^a b^p x^{p-1}[b^{q-p}-x^{q-p}]dx,$$

除非$a=b$,此式為負.故$f(\theta)\leqq1$.

126. 等號僅於$f'(0)=0$,即$a=b$時,有效.

129. 使$a^{-\theta}b^{\theta-1}(\theta a-(1-\theta)b)$之值為最小.

130. (a)$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2)$.

(b)$3x^2-4x-4+4y^2=0$.

(c)$x^3=y^2(2a-x)$.

(d)$x^3+y^3=3axy$.

132. (a)$x^5+y^5=5ax^2y^2$;　(b)$x=a\arccos\frac{a-y}{b}+\sqrt{b^2-(a-y)^2}$.

134.(a)$x^2+y^2=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.　　(c)$a(x^2+y^2)+by^2=0$.

(b)$x^2+y^2=\sqrt{a^2x^2-b^2y^2}$.　　(d)$x=0$.

137.$x=t-\frac{l\sqrt{p}}{\sqrt{t+p}}$, $y^2=4pt\left(1+\frac{l}{2\sqrt{p}\sqrt{t+p}}\right)^2$.

138.$\frac{5}{2}a^2$.　　139.$\frac{\pi b}{2a^2}(2a+b)(a+b)^2$

140.$\frac{4b(a+b)}{a}\left(1-\cos\frac{a}{2b}t\right)$.

142.可取坐標軸如次:令曲線在原點與x軸相切,並以(x,y)點上切線與x軸所成夾角之函數表達其縱坐標y.

143.(a)$\frac{l^3}{12}$; (b)$\frac{l^3}{3}$; (c),(d)$l\left(\frac{l^2}{12}+d^2\right)$.

144.$r=ce^{\cot\alpha\cdot\theta}$.　　145.$(x-c)^2+y^2=b^2$

147.$(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$.　　148.$y=a\cosh\frac{x-b}{a}$.

149.連接曲線兩點(r_ν,φ_ν),及$(r_{\nu+1},\varphi_{\nu+1})$之直線,其長度為

$$\sqrt{(r_{\nu+1}-r_\nu)^2+2r_\nu r_{\nu+1}\{1-\cos(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)\}}$$

而內接於曲線之多角形線,其長度為

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sqrt{(\Delta r_\nu)^2+r_\nu r_{\nu+1}(\Delta\varphi_\nu)^2+r_\nu r_{\nu+1}(\Delta\varphi_\nu)^4R_\nu},$$

其中諸$|R_\nu|$均為有界.令$\Delta\varphi_\nu$之最大者趨於零,即得

$$\int\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}\ d\varphi.$$

153.$x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+\cdots$,$(\sin x)^2=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-x^7R\right)^2$

$$=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+x^8R',$$

其中R及R'於$x\to0$時均為有界.

154.$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$, $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-x^7R}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-x^6S}$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+x^7T,$$

其中R,S,T於$x\to0$時均為有界.

155.$1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}-\cdots$,$\sqrt{\cos x}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-x^6R\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^6R\right)+[illegible]\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^6R\right)^2$$

$$+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^6R\right)^3S=1-\frac{x^2}{4}+[illegible]\frac{x^4}{96}+x^6T,$$

其中 R,S,T 於 $x\to 0$ 時均為有涯.

156. (a) $1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}-\frac{2x^6}{945}-\cdots$ (b) $1-\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{1440}-\frac{x^6}{23712}+\cdots$

(c) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots$ (d) $1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$

(e) $e+ex+ex^2+\frac{5}{6}ex^3+\cdots$ (f) $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\cdots$

157. $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{x^7}{7}+\cdots$

158. $\sum_{\tau=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\tau}\binom{2n}{n}\binom{2\tau-2n}{\tau-n}\frac{1}{(2n+1)(2\tau-2n+1)}\right)\frac{x^{2\tau+2}}{2^{2\tau}}$.

159. (a) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$;

(b) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$; (c) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$.

160. (a) $\frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$; (b) $\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$; (c) $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$.

162. $e-\frac{e}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{11e}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^2-\cdots$

163. (a) $-\frac{e}{2}$; (b) $\frac{11e}{24}$; (c) 0; (d) $e^{-\frac{1}{2}}$; (e) 1.

165. (a) 莫小值在 $x=0$; (b) 莫大及莫小值在 $\tan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ 之點，如是之點每變程

$\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}<x<\frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}$, $n=\pm 1,\pm 2,\cdots$ 出現一次；莫大及莫小值更番相間.

166. $5\cdot 881a$. 167. 11.

168. $0\cdot 82247$. 168. $0.175, 0.302, 3\cdot 490$.

170. 因 $\log(a+x)$ 爲向下凸出，而 $a>0$,

$$\log(a+1)+\cdots+\log(a+n)>\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log(a+x)\,dx,$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}+a\right)\log\left(n+\frac{1}{2}+a\right)-\left(a+\frac{1}{2}\right)\log\left(a+\frac{1}{2}\right)-n,$$

或
$$a(a+1)\cdots(a+n)>a\frac{\left(n+\frac{1}{2}+a\right)^{n+\frac{1}{2}+a}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}}}e^{-n}>h(a)n!n^{a},$$

其中 $h(a)$ 爲一正數，視 a 而定．且

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{a}=1-\frac{a(a+1)}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{R}{n^3},$$

其中 R 於 $n\to\infty$ 時爲有涯．是以於 n 充分大時，$a_n<a_{n-1}$ 而此數序爲遞降。

171．$c+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-\sum_{\nu=1}^{l}\left(n_\nu+\frac{1}{2}\right)\log n_\nu$．

174．若 $\lim a_n\leqq 1$，其項不趨於零，若 $\lim a_n>k>1$，可將此級數與 $\sum\frac{1}{kn}$ 比較．

175．不論 ε 爲何，於 n,m 充分大時 $\sum_{\nu=n}^{m}a_\nu<\varepsilon$．但 $\sum_{\nu=n}^{m}a_\nu>(m-n)a_m$，

或 $ma_m<\varepsilon+na_m$ 令 n 固定不變，而取相當大之 m 俾 $na_m<\varepsilon$；凡如是之 m 均有 $ma_m<2\varepsilon$．

176．應用題 175．

177．設 s_n 表 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 之部分和，s 表其和，又設 $\sigma_n=s_n-s$．則

$$\sum_{\nu=n}^{m}a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=n}^{m}(\sigma_\nu-\sigma_{\nu-1})b_\nu=\sum_{\nu=n}^{m}\sigma_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})-\sigma_{n-1}b_n+\sigma_m b_{m+1}.$$

於 ν 充分大時，$|\sigma_\nu|<\varepsilon$，而

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m}a_\nu b_\nu\right|<\varepsilon\sum_{\nu=n}^{m}|b_\nu-b_{\nu+1}|+\varepsilon|b_n|+\varepsilon|b_{m+1}|$$

$$<\varepsilon|b_n-b_{m+1}|+\varepsilon|b_n|+\varepsilon|b_{m+1}|.$$

此式又小於 $4B\varepsilon$，其中 B 爲 $|b_\nu|$ 之涯，故級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_\nu$ 爲收斂．

178．如題 177：

$$\sum_{\nu=n}^{m}a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=n}^{m}(s_\nu-s_{\nu-1})b_\nu=\sum_{\nu=n}^{m}s_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})-s_{n-1}b_n+s_m b_{m+1}$$

並應用 b_n 之獨行性，及下之事實：$b_n\to 0$，而不論 ν 爲何數 $|s_\nu|<s$．

179．(a)，(b)，(d)，(f) 收斂；(c)若 $t\neq 2n\pi$，則收斂；(e)若 $t\neq(2n+1)\pi$ 則收斂．

180．(a)$\frac{1}{2}\log 2$；(b)$\log 2$．

181．(a)$\alpha=1$；(b)$\alpha\geqq 1$．

182．(a)發散；(b)收斂．

184．若 n 充分大時 $|a_n|<\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$，則

$$\log\frac{1}{|a_n|}>(1+\varepsilon)\log n\quad\text{或}\quad\frac{\log 1/|a_n|}{\log n}>1+\varepsilon.$$

反而言之：$\frac{\log 1/|a_n|}{\log n}>1+\varepsilon$ 即含有 $|a_n|<\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$，發散亦如之.

185.應用題 184.

186.證法如題 184.

187.第 n 次檢根法可書之如下：若 $\frac{1}{n}\log\frac{1}{|a_n|}>\varepsilon$，則級數為收斂；若 $<-\varepsilon$，級數為發散.又可書

$$\frac{\log 1/|a_n|}{\log n}=\frac{n}{\log n}\cdot\frac{1}{n}\log\frac{1}{|a_n|}.$$

188.若 $n\geqq N$ 時有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n}$，則

$$|a_{n+1}|<\frac{b_{n+1}}{b_n}|a_n|<\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}|a_{n-1}|<\cdots<\frac{|a_N|}{b_N}b_{n+1};$$

故若 Σb_ν 為收斂，$\Sigma|a_\nu|$ 亦然.其發散可同法證之.

190.應用題 188，與 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^a}$ 相比較.若

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^a>1+\frac{a}{n}+\frac{R}{n^2},$$

其中 $a>1$，則級數 $\Sigma|a_\nu|$ 為收斂.於是

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)>a+\frac{R}{n}>1+\varepsilon.$$

反而言之：

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)>1+\varepsilon$$

即含有 $\Sigma|a_\nu|$ 之收斂性.其發散可同法證之.

191.若

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^a>1+\frac{1}{n}+\frac{a}{n\log n}+\frac{R}{n^2\log n},$$

其中 $a>1$，則 $\Sigma|a_\nu|$ 為收斂.於是

$$n\log n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1-\frac{1}{n}\right)>a+\frac{R}{n}>1+\varepsilon.$$

反而言之即得欲證之收斂法；其發散可同法證之.

193.(a)$\beta-\alpha>1$ 時為收斂，$\beta-\alpha\leqq 1$ 時為發散.

(b)$\gamma>\alpha+\beta$ 時為收斂，$\gamma\leqq\alpha+\beta$ 時為發散.

194.(a)若 $x\geqq 1+\varepsilon$，$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^x}\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}}$.　　(b)亦如之.

195.$\Sigma\cos\nu x$ 之部分和於 $\varepsilon\leqq x\leqq 2\pi-\varepsilon$ 中之 x 皆為均勻有界.

(可書 $\cos\nu x=\frac{e^{i\nu x}+e^{-i\nu x}}{2}$ 及 $\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu x=\frac{1}{2}\sum_{\nu=-n}^{n}e^{i\nu x}$). 於是證明與題 178 相仿之勻斂定理.

196. 若 x 在變程 $\varepsilon\leqq x\leqq N$ 中,則 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 在變程 $-1+\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\leqq y\leqq 1-\frac{2}{N+1}$ 中.

197. (a) $-1<x<1$; (b) $-4<x<4$; (c) $x>1$; (d) $x>0$; (e) 任何 x; (f) 無一 x; (g) $x>1$; (h) $-1<x<1$.

198. 苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}$ 爲收斂,可書 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}\cdot\frac{1}{\nu^{x-x_0}}$,並應用題 177 或 178.

苟 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}$ 爲發散,由適纔所證之理 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x}}$ 不能於 $x<x_0$ 時收斂.

199. 可書 $\Sigma\frac{a_\nu\log\nu}{\nu^{x}}=\Sigma\frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}\cdot\frac{\log\nu}{\nu^{x-x_0}}$.

200. $x<1$ 時明明有 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu<\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$. 而另一方面,

$$\lim_{x\to1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu>\lim_{x\to1}\sum_{\nu=0}^{N}a_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{N}a_\nu;\ 或\ \lim_{x\to1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\geqq\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu.$$

201. 如題 200, $\lim_{x\to1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\geqq\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$, 故而爲 ∞.

202. 可書 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu X^\nu\left(\frac{x}{X}\right)^\nu$. 於是證明與題 177 相似之勻斂定理:苟 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ 爲收斂, 而數序 $b_0(x)$, $b_1(x)$, $\cdots b_n(x)$, $\cdots$ 在 x 之某變程中爲獨行而均勻有限者,則 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(x)$ 在該變程中爲勻斂.

203. 此由級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ 在變程 $0\leqq x\leqq X$ 中爲勻斂而來. 蓋如是之 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ 必在該變程中連續也.

204. (a) $\frac{x(1+x)}{1+x^2}$;　　(b) $\frac{1-x^2}{(1-x+x^2)^2}$.

205. (a) 此級數即等於 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1}$;

(b) 此級數即等於 $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}\Big|_{x=1}$.

206. (a) 中心在 $-\frac{5}{3}i$ 及半徑爲 $\frac{4}{3}$ 之圓.

(b) $k>1$ 時,乃中心在 $-\frac{1}{k^2-1}\alpha+\frac{k^2}{k^2-1}\beta$ 及半徑爲 $\frac{k}{k^2-1}|\beta-\alpha|$ 之圓; $k<1$ 時, α 及 β 互易; $k=1$ 時,乃 α,β 連線之垂直二等分線.

(c)分別考察 $k<1$, $=1$, >1 之三種可能情形.

207.『三角形不等式』:三角形兩邊之和大於第三邊

208.平行四邊形對角線平方之和等於該平行四邊形各邊平方之和.

211. $\pi x \cot \pi x = 1 - 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - x^2} = 1 - 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\nu^{2m}} \right)$

$$= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m}} \right) x^{2m}.$$

214.(a) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$; (b) $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}$.

216.(a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{3}$.

217. $\coth \pi x - \frac{1}{\pi x} = \frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{1^2 + x^2} + \frac{1}{2^2 + x^2} + \frac{1}{3^2 + x^2} + \cdots \right)$.

218. $x + c = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$.

219. $\frac{1}{2} k y^2 + x = c$.

221. $I = \frac{E_0}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2 \mu^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{A}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2 \mu^2}} e^{-\frac{\rho t}{\mu}}$,其中 $\tan \phi = \frac{\omega \mu}{\rho}$.

柯氏微積分學

下　卷

第一章　立體解析幾何學及矢量解析中之重要概念

本書下卷所述理論，得藉解析幾何及矢量學析中概念之闡明而益見透徹明瞭．因此，特將其中基本概念擇要言之，作為本卷之引論．讀者可就已學之知識，按本節所述，以備考覽而已．

第一節　垂直坐標及矢量

1.1.1.　垂直坐標系

欲規定一點在平面或空間中之位置，常應用直角坐標之法，吾人固已熟知之矣．如在平面中立兩垂直坐標軸，世常稱之為縱橫軸或 x 軸及 y 軸者，或在空間中任擇三條互相垂直之坐標軸，即所謂 x 軸、y 軸及 z 軸者，並在每坐標軸上取同一長度單位，則平面中之點得由其 x 及 y 坐標，空間中之點由其 x、y 及 z 坐標而定，觀圖 1.1，其理甚顯．倒而論之，每兩數(x, y)必代表平面中之一點，每三數(x, y, z)必代表空間中之一點．惟如是，乃知點者，必完全為其坐標所規定也．

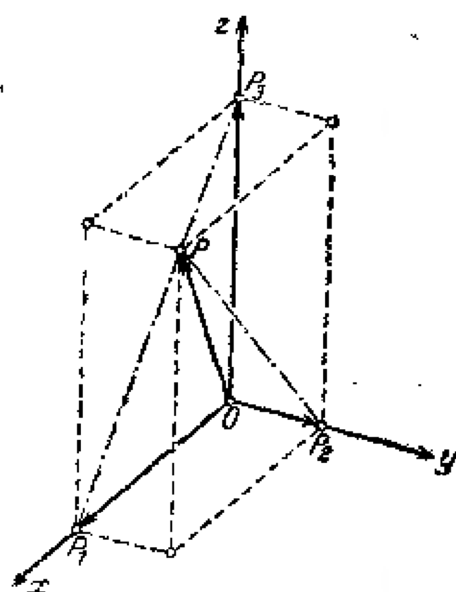


圖　1.1

兩點(x_1, y_1)及(x_2, y_2)間之距離，據 Pythagoras 定理，必為

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

而兩點之坐標分別為(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)者，其間距離為

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

垂直坐標系有左右手系之別，不可不略加申述．在本書上卷第五章中，知平面中之轉動，有正負向旨之可言．將正 x 軸循最短途徑轉一直角而達於正 y 軸者即規定一確定向旨．循此向旨

爲正,則謂之右手坐標系,否則謂之左手坐標系(見圖1.2及1.3).左右手坐標系之不同,猶人之有左右手,欲自左手系換爲右手系,或自右手系換爲左手系,苟其運動限於平面之內,爲絕對不可能之事.至於空間中之坐標系,亦有如是之別.試設想已身站立於x、y平面之上,而頭在正z軸方向,則坐標系之爲右手爲左手,當以x、y平面中坐標系之爲右手爲左手而決定之.若令右手坐標系之xy平面以z軸爲轉軸而轉動,更向正z軸盤旋而上,則其運動實與一右手螺旋相同.至左手坐標系則與一左手螺旋相應.此兩種坐標系根本性質之不同,可於是見之.吾人在本書中所應用者均爲右手坐標系.

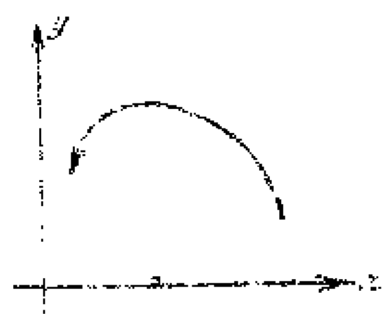


圖 1.2

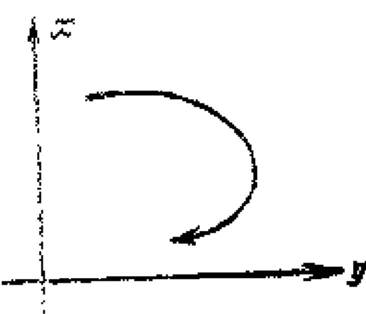


圖 1.3

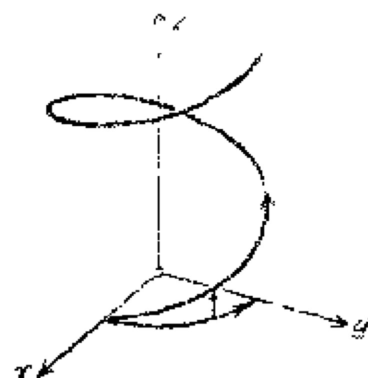


圖 1.4

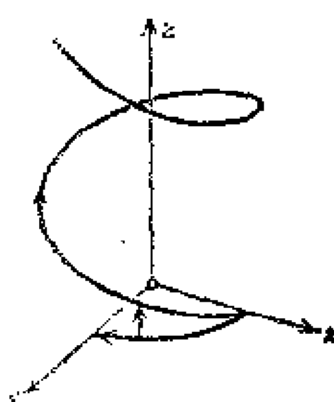


圖 1.5

1.1.2　矢量

凡空間或平面中直線之有一向者皆可用以代表一方向,是謂有向直線.設一有向直線l,其他有向直線可藉平行移動而在位置及向皆上完全與l相符合者必代表同一方向.就一坐標系規定一方向,必作一有向直線通過坐標原點,其方向與欲規定之方向相同;更於其上取一點,與原點相去之距離爲1,則其坐標α、β、γ即可用以規定此直線之方向,是謂方向餘弦,即此直線分別與正x、y、z軸所成交角δ_1、δ_2、δ_3之餘弦①,且必滿足下列關係

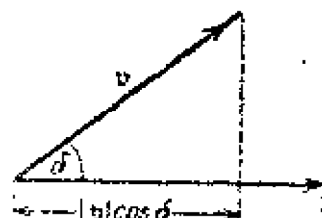


圖 1.6

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

明乎是,可知平面中一有向直線l,當視其與x、y軸所成之角δ_1、δ_2,取其餘弦$\alpha=\cos\delta_1$,

①有向二直線所成夾角恆可視爲在0與π之間,蓋今後所論之者皆爲此等夾角之餘弦也.

$\beta=\cos\delta_2$ 以規定之，而 α 及 β 復滿足等式

$$\alpha^2+\beta^2=1,$$

自無待論.

凡直線線段有確定長度及確定方向者謂之矢量.任何矢量,以一有向線段表達之且其長確定者,自必有一起點及一終點.其起點可隨意移動者謂之無定位矢量[1],其他爲固定矢量[2],茲所論者,皆爲無定位矢量,故即簡稱爲矢量.矢量在本書中悉以黑體字如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 表之.兩矢量之一如可平移而得其他者,則彼此謂之相等.矢量 $\mathbf{A}$ 之長常稱爲 $\mathbf{A}$ 之絕對值以 $|\mathbf{A}|$ 表之.

試由矢量 $\mathbf{v}$ 之起點與終點作垂直線於一有向直線 l, 則沿 l 即得一有向線段, 與矢量相應;倘其向旨與 l 之向旨相同,即稱之爲矢量 $\mathbf{v}$ 沿 l 之部分,否則其長之負值謂之 $\mathbf{v}$ 沿 l 之部分. 矢量 $\mathbf{v}$ 沿 l 上之部分常以 v_l 表之.若以 δ 表 $\mathbf{v}$ 及 l 間之角,則其間之關係爲

$$v_l=|\mathbf{v}|\cos\delta.$$

矢量之長爲 1 者謂之單位矢量;其沿 l 部分自等於 l 及 $\mathbf{v}$ 所含角之餘弦.試以 v_1, v_2, v_3 分別表一矢量 $\mathbf{v}$ 沿坐標軸之部分, 復將 $\mathbf{v}$ 之起點移於坐標原點,則

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

之眞確,顯而可見.更以 α,β,γ 表 $\mathbf{v}$ 之方向餘弦,則有

$$v_1=|\mathbf{v}|\alpha,\qquad v_2=|\mathbf{v}|\beta,\qquad v_3=|\mathbf{v}|\gamma.$$

由是以觀,一無定位矢量得由其沿坐標軸部分 v_1, v_2, v_3 完全決定.明乎是,乃知矢量 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{w}$ 相等者:

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}$$

實其沿坐標軸部分彼此一一相等:

$$v_1=w_1,$$

$$v_2=w_2,$$

$$v_3=w_3$$

之謂也.

---

(1) free vector; freier Vektor　(2) bound vector; gebundener Vektor.

幾何觀念中多矢量，在物理學中尤夥，如力、速度、加速度等皆是。運算矢量之道，與數之法則無異，且與所選坐標系無關，故應用殊爲便利。茲欲首先說明者，爲矢量 $\boldsymbol{a}$ 加矢量 $\boldsymbol{b}$ 之和。試將 $\boldsymbol{b}$ 平移，令其起點與 $\boldsymbol{a}$ 之終點相合，則 $\boldsymbol{a}$ 之起點與 $\boldsymbol{b}$ 之終點又規定一矢量，是謂 $\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$ 之和，而以

$$a+b=c$$

表之。由此定義，可知

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

必成立無疑，觀圖 1.7 及 1.8，更可瞭然。復次，設有任何兩矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，就其和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 沿任何直線 l 之部分而論，必等於 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 沿 l 之部分之和，換言之，

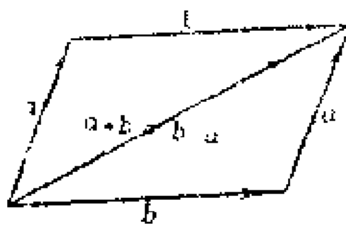


圖 1.7

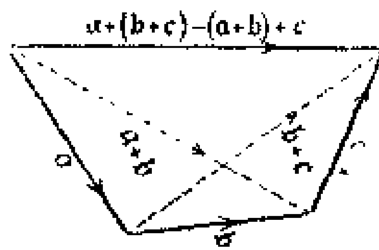


圖 1.8

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_l=a_l+b_l.$$

觀是以論，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 沿各坐標軸之部分必爲 a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，可斷言矣。

任何一點 P，其坐標爲 (x, y, z) 者，得由一矢量規定之；蓋由坐標原點作一矢量直達於 P，其沿坐標軸之部分即爲 P 之坐標。試沿坐標軸各取單位矢量而分別以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表之，沿 x 軸者爲 $\boldsymbol{e}_1$，沿 y 軸者爲 $\boldsymbol{e}_2$，沿 z 軸者爲 $\boldsymbol{e}_3$，則任何矢量 $\boldsymbol{v}$，其沿坐標軸之部分爲 v_1，v_2，v_3 者，得由下式表達之，

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3.$$

於是 $\boldsymbol{v}_1=v_1\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{v}_2=v_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{v}_3=v_3\boldsymbol{e}_3$ 常稱之爲 $\boldsymbol{v}$ 之矢量部分。

明乎上述之理，吾人即可從而推論所謂坐標之轉換公式者，其意義如次。設有兩坐標系，其一之坐標軸爲 Ox, Oy, Oz，其他之坐標軸爲 Ox', Oy', Oz'，即其原點相同，而其一之坐標軸由其他轉動得之者，其間所成交角之餘弦如下表：

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

例如 α_1 爲 x' 軸與 x 軸所成角之餘弦，γ_2 爲 y' 軸與 z 軸所成角之餘弦，餘可類推. 試由 P 點作垂直線於 Ox, Oy, Oz 軸，其垂足分別爲 P_1, P_2 及 P_3. 如圖1.1，從而可見由 O 達 P 之矢量 $\boldsymbol{OP}$ 實爲矢量 $\boldsymbol{OP}_1$, $\boldsymbol{OP}_2$ 及 $\boldsymbol{OP}_3$ 之和. 更觀 x' 軸與 Ox, Oy, Oz 軸所成角之餘弦爲 α_1, β_1, γ_1，y' 軸與 Ox, Oy, Oz 軸所成角之餘弦爲 α_2, β_2, γ_2，z' 軸與 Ox, Oy, Oz 軸所成角之餘弦爲 α_3, β_3, γ_3. 惟如是，則 x'，即矢量 $\boldsymbol{OP}$ 沿 x' 軸之部分，必等於 $\boldsymbol{OP}_1$, $\boldsymbol{OP}_2$, $\boldsymbol{OP}_3$ 三矢量沿 x' 軸部分之和：

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$

據同理，復有

$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$

$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

於是 P 點在 x', y', z' 軸之坐標已由其 x, y, z 坐標表而出之. 試倒其關係，則有

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

是即所謂坐標轉換公式，由矢量概念說明之，固極淺顯而易明也.

據上述之理，可知一固定矢量 $\boldsymbol{v}$，其沿坐標軸部分爲

$$v_1 = x_2 - x_1,$$

$$v_2 = y_2 - y_1,$$

$$v_3 = z_2 - z_1$$

者，而 (x_1, y_1, z_1) 爲其起點之坐標，(x_2, y_2, z_2) 爲其終點之坐標，則必滿足

$$v_1' = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \gamma_1 v_3,$$

$$v_2' = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma_2 v_3,$$

$$v_3' = \alpha_3 v_1 + \beta_3 v_2 + \gamma_3 v_3,$$

由是知矢量部分及坐標固服從同一轉換公式也.

1.1.3. 矢量之乘積

矢量之義既明，乃可進而討論如何運算之道. 欲運算矢量，自必爲其和及其積建立確切之定義. 何謂兩矢量之和，前已言之. 其次，一矢量可與一常數 c 相乘；若一矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿坐標軸部分爲 v_1, v_2, v_3，所謂 c 乘 $\boldsymbol{v}$ 乃爲一矢量，其沿坐標軸部分爲 cv_1, cv_2, cv_3 者. 此定義自與矢量相加之道不相抵觸，蓋 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}$. 若 $c>0$，則 $c\boldsymbol{v}$ 之方向與 $\boldsymbol{v}$ 相同，而其長爲

$c|v|$；若 $c<0$，則 cv 之方向與 v 相反，而其長成爲 $(-c)|v|$．若 $c=0$ 時，則 cv 爲一矢量，其部分爲 0，0，0，因之可稱爲零矢量．

論矢量之乘法，有所謂標積[1]與矢積[2]兩種不同乘積之別．茲先述標積之定義．所謂兩矢量 u 及 v 之標積者，即兩者絕對值之積乘以其方向間所成角 δ 之餘弦：

$$uv=|u|\,|v|\cos\delta.$$

據此，可知兩矢量之標積無他，其一沿其他之部分乘其他之長是已．由是以論，乘法之分配律

$$(u+v)w=uw+vw,$$

及交換律 $$uv=vu,$$

爲上述定義之必然結果，無待贅也．

惟兩矢量之標積與普通兩數相乘，有其不同之點，不可不注意者．例如兩矢量雖無一爲零，其標積未始不可爲零．假定 u 及 v 之長俱不等於零，倘其方向互相垂直，則其標積爲零，倒言之，苟其標積爲零，則其方向必相垂直．故 u 及 v 之長若無一爲零，則其標積之爲零，爲其方向垂直之必要與充分條件也．

明乎此，吾人可將兩矢量 u 及 v 之標積 uv 由 u 及 v 之部分表而出之．試將 u 及 v 之起點移於坐標原點，而以 u_1，u_2，u_3 表 u 之矢量部分，v_1，v_2，v_3 表 v 之矢量部分，於是有 $u=u_1+u_2+u_3$ 及 $v=v_1+v_2+v_3$．然後根據前述之理以展開 $uv=(u_1+u_2+u_3)(v_1+v_2+v_3)$，並注意 u_1v_2，u_1v_3，u_2v_1，u_2v_3，u_3v_1 及 u_3v_2 各標積因方向垂直均等於零，而據定義又有 $u_1v_1=u_1v_1$ 等關係即得

$$uv=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

此關係可視爲標積之定義，在運算時極爲便利．據此，若假定 u 及 v 爲兩單位矢量，其方向餘弦分別爲 α_1，α_2，α_3 及 β_1，β_2，β_3 者，則其標積爲方向夾角之餘弦，因之遂有

$$\cos\delta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

1.1.4. 直線與平面之方程式

設有 xy 平面中之一直線，或 xyz 空間中之一平面；如欲求其方程式，可先立其法線並在法線上指定一正方向，至何者爲正，何者爲負，可隨意決定，無關宏旨；又一單位矢量，其方向與

(1) scalar product; skalar Produkt.

(2) vector product; vector Produkt.

法線之正向相同者，以 n 表之。於是欲求上述直線或平面之方程式，但注意其下列性質即可：自坐標原點直達此直線或平面上一點之矢量 x 在其法線上皆有不變之投影，換言之，此種矢量與 n 之標積必為一常數。因此之故，若以 α,β（或 α,β,γ）表法線正向之方向餘弦，即 n 之矢量部分，則直線上點之坐標 x,y（或平面上點之坐標 x,y,z）必滿足

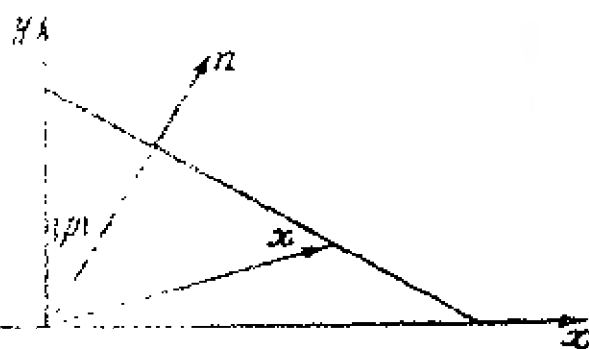


圖　1.9

$$\alpha x+\beta y-p=0,$$

$$(\text{或}\quad \alpha x+\beta y+\gamma z-p=0),$$

是即所欲求之直線（或平面）方程式。考其中 p 之意義，p 之絕對值 $|p|$ 實所以表示原點與此直線（或平面）相去之距離。若此直線（平面）未曾經過原點而自原點直達此直線（平面）之垂直線方向與 n 相同者，則 p 為一正數；與 n 相反者，則 p 為一負數；倘其經過原點，則 p 將等於零。復次，苟以 α,β 或（α,β,γ）表示方向餘弦，則上列方程式必表示一直線（平面），與原點相去之距離為 p，而其法線即由此方向餘弦規定之，可瞭審也。

上列直線（平面）方程式常簡稱為法式[1]；其左方 $\alpha x+\beta y-p$ 或（$\alpha x+\beta y+\gamma z-p$）於不在直線（或平面）上之任何點 P 亦有一極簡明之幾何意義。因 $\alpha x+\beta y$（或 $\alpha x+\beta y+\gamma z$）如由原點達 P 點之正矢量投於法線之影，即可知 $\alpha x+\beta y-p$（或 $\alpha x+\beta y+\gamma z-p$）實為 P 點與此直線（或平面）相去之垂直距離，且當 P 在直線（平面）之一邊（即法線為正之一邊）時為正，在其他一邊時為負。

將直線（平面）之法式乘以一任意不等於零之常數，即可獲得其方程式之其他形式。倒論之，任何一次方程式：

$$Ax+By+D=0\qquad(\text{或 } Ax+By+Cz+D=0),$$

其中 A,B（或 A,B,C）不全等於零者，必代表一直線（或平面）。例如將 $Ax+By+Cz+D=0$ 以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 除之，復令

$$\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

(1) normal or canonical form, Normalform

$$p=-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其所代表者爲一平面,與原點相去之垂直距離爲 p 而其法線之方向餘弦爲 α,β,γ 者.

復次,空間中之直線可視爲兩平面相交而成,因之線上任何點之坐標(x,y,z)必同時滿足兩個平面之方程式如

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

惟經過一直線之平面,不僅此兩者而已,因此之故,此種表達直線之形式顯無唯一性之可言也.

按其實際而論,欲表達一直線,以應用一參變數 t 爲最便.如

$$x=a_1+b_1t,$$

$$y=a_2+b_2t,$$

$$z=a_3+b_3t,$$

其中 x,y,z 與 t 間之關係爲一次多項式而 b_1,b_2,b_3 不皆爲零,則當 t 在相當範圍內變化時,x,y,z 即從而描繪一直線;蓋由其中每兩式中消去 t,即得兩個含 x,y,z 之一次方程式,可以見也.所當注意者,如將一直線寫成參變數方程式,則其方向餘弦與 b_1,b_2,b_3 成比例.試觀圖1.10,設線上兩點 P_1 及 P_2 之坐標分別爲

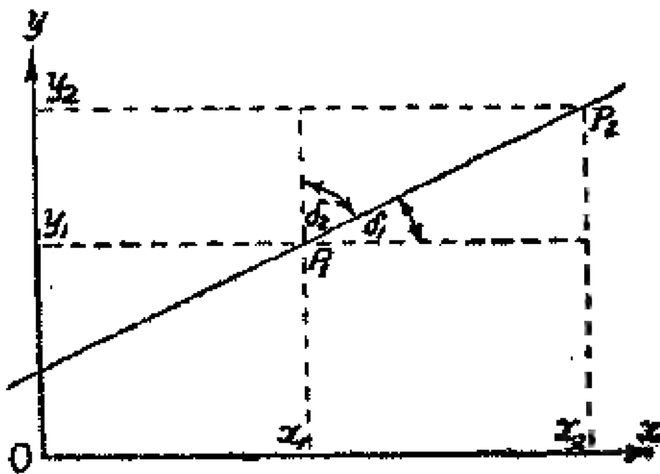


圖 1.10

$$x_1=a_1+b_1t_1,$$

$$y_1=a_2+b_2t_1,$$

$$z_1=a_3+b_3t_1,$$

及 $x_2=a_1+b_1t_2,\qquad y_2=a_2+b_2t_2,\qquad z_2=a_3+b_3t_2,$

則其方向餘弦與 $x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2$ 成比例.

由是知

$$\overline{P_1P_2}\cos\delta_1=x_2-x_1=b_1(t_2-t_1),$$

$$\overline{P_1P_2}\cos\delta_2=y_2-y_1=b_2(t_2-t_1),$$

$$\overline{P_1P_2}\cos\delta_3=z_2-z_1=b_3(t_2-t_1),$$

其中 $\overline{P_1P_2}$ 即爲線段 P_1P_2 之長.因此之故,遂得

$$\alpha=\rho l_1,\qquad \beta=\rho l_2,\qquad \gamma=\rho l_3,\qquad \left(\rho=\frac{t_2-t_1}{r_1 r_2}\right).$$

從而可知

$$\alpha=\frac{l_1}{\pm\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}},\qquad \beta=\frac{l_2}{\pm\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}},$$

$$\gamma=\frac{l_3}{\pm\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}}.$$

蓋方向餘弦平方之和爲1而式中正負兩號之並存與直線具有正負向旨之事實適相符合也.

既明上述之理,吾人可將直線之參變數方程式寫如

$$x=x_0+\alpha\tau,$$

$$y=y_0+\beta\tau,$$

$$z=z_0+\gamma\tau,$$

其中(x_0,y_0,z_0)爲直線上一固定點之坐標而τ爲一新參變數,與前之t有下列關係

$$x_0+\alpha\tau=a_1+b_1t.$$

因$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$之成立,可知

$$\tau^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

由是以言,τ之絕對値即可用以表示(x_0,y_0,z_0)與(x,y,z)相去之距離,而由其正負,可以推知直線之向旨係由(x_0,y_0,z_0)以達(x,y,z),抑由(x,y,z)以達(x_0,y_0,z_0): 由前者言之,其τ爲正,由後者言之,其τ爲負.

據上述之理,可知連接$P_0(x_0,y_0,z_0)$及$P_1(x_1,y_1,z_1)$之線段上之任何一點$P(x,y,z)$得以

$$x=\lambda_0x_0+\lambda_1x_1,\qquad y=\lambda_0y_0+\lambda_1y_1,\qquad z=\lambda_0z_0+\lambda_1z_1$$

表而出之,其中λ_0及λ_1爲正數,且滿足$\lambda_0+\lambda_1=1$者.何以言之?設以τ及τ_1分別表P及P_1與P_0相去之距離,則必有$\lambda_0=1-\frac{\tau}{\tau_1}$及$\lambda_1=\frac{\tau}{\tau_1}$之關係;蓋由$x_1=x_0+\alpha\tau_1$求得$\alpha$後,$\alpha=\frac{x_1-x_0}{\tau_0}$,代入$x=x_0+\alpha\tau$,即可見之.

設有一直線如

$$x=x_0+\alpha\tau,$$

$$y=y_0+\beta\tau,$$

$$z=z_0+\gamma\tau.$$

試求一經過(x_0, y_0, z_0)之平面而又垂直於此直線者，其方程式將為何如．吾人所知者，其法線之方向餘弦必為α, β, γ，因之所欲求之平面當為

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0.$$

因(x_0, y_0, z_0)既在此平面上，故

$$p=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0.$$

由是知平面之經過(x_0, y_0, z_0)又垂直於方向餘弦為α, β, γ之直線者，必滿足下列方程式：

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0.$$

據同理，試在xy平面中作一直線，經過(x_0, y_0)而又垂直於方向餘弦為α, β之另一直線者，其方程式必為

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0,$$

自無待論．

最後所欲附述者，設有任何兩平面如

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0,$$

$$\alpha' x+\beta' y+\gamma' z-p'=0,$$

其間之角δ即為兩者法線矢量間所成之角，因之此兩矢量之標積必為$\cos\delta$無疑，故得

$$\cos\delta=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'.$$

據同理，可知xy平面中如有兩直線如

$$\alpha x+\beta y-p=0 \quad \text{及} \quad \alpha' x+\beta' y-p'=0,$$

則其間之角δ必為

$$\cos\delta=\alpha\alpha'+\beta\beta'.$$

例 題

1. 試證坐標軸轉動所由規定之諸數量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \gamma_3$（第411頁）滿足下列關係：

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0, \qquad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,$$

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0, \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1,$$

$$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0, \qquad \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1.$$

2. 若a及b為二矢量，其起點在O，終點分別在A及B，則起點在O，終點在C之矢量，即為

$$(1-\theta)a+\theta b,$$

惟C為分割AB成比率$\theta:1-\theta$之點。

3. 四面體 $PQRS$ 各頂點之質量中心可定義為分割 MS 成比率 1:3 之點，其中 M 為三角形 PQR 之質量中心. 試證此定義與各頂點先後次序無關，且與質量中心之一般定義相合(上卷第 193 頁).

4. 苟在四面體 $PQRS$ 中以 A, A', B, B', C, C' 分別表其各稜 PQ, RS, PR, QS, PS, QR 之中心，則 AA', BB', CC' 諸線均通過質量中心，並於此互相平分.

5. 設 P_1, ……, P_n 為空間 n 個任意質點，其質量分別為 m_1, ……, m_n. 設 G 為其質量中心，並設 $\mathbf{p}_1$, ……, $\mathbf{p}_n$ 為起點在 G 終點在 P_1, ……, P_n 之矢量. 試證

$$m_1\mathbf{p}_1+m_2\mathbf{p}_2+\cdots+m_n\mathbf{p}_n=0.$$

第二節 矢量之矢積

1.2.1. 三角形之面積

在 xy 平面中如欲計算三角形之面積，可假定其一頂點為原點，蓋任何三角形皆可平移之，使其有如是之位置，其他兩頂點假定為 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$. 於是連接 P_1 及原點之直線將有下列方程式:

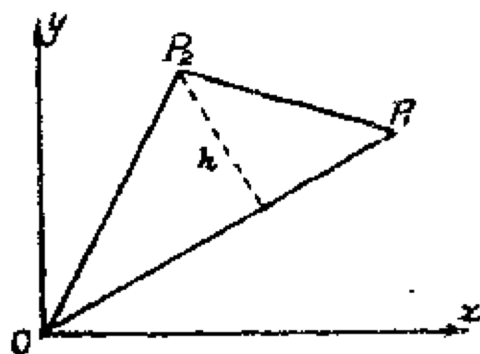
$$\frac{-y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}x+\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}y=0.$$

復考 P_2 與此直線之距離 h 為:

$$\pm h=\frac{-y_1x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{x_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}.$$

因 OP_1 之長為 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，由是知三角形 OP_1P_2 面積 A 之兩倍即底 OP_1 乘 h(除其正負暫置不論外)必為

$$2A=x_1y_2-x_2y_1.$$



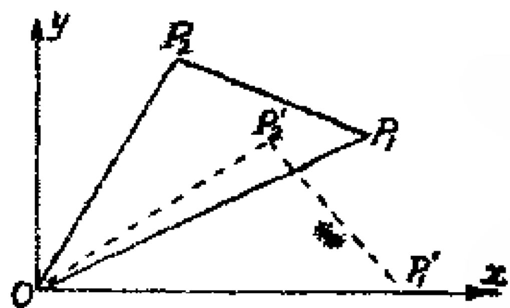


圖 1.11

此面積 A 自有正負之別，當 P_1 與 P_2 互易位置時，即一反其正負．吾人所欲證者，爲下列定理：三角形 OP_1P_2 面積之正負，當視繞行各頂點 OP_1P_2 之向旨與坐標系之向旨是否符合以決定之．欲證此，可先設想 OP_1P_2 作連續性之變動，如令 P_1 及 P_2 在不影響 A 原有正負之條件下移動之，即在其移動過程中，A 從不因之而變零，換言之，在三角形 OP_1P_2 之變動過程中，此三角形從不變爲一直線．果如是，若其繞行向旨與坐標系向旨相同者，則 P_1 在上述條件下可移於(1,0)，P_2 可移於(0,1)，於是 $A=\frac{1}{2}(1\cdot1-0\cdot0)$ 爲一正數．反之，則 P_1 可移於(1,0)，P_2 可移於(0,−1)，而 $A=\frac{1}{2}(1\cdot-1-0\cdot0)$ 爲一負數．故欲證之理，至此可以恍然矣．

此三角形之面積 A 常可寫成行列式之形式：

$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix};$$

若其一頂點未與原點相合，而移於(x_0,y_0)者，則其面積將爲

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\end{vmatrix}.$$

1.2.2. 兩矢量之矢積

除上述矢量之純積外，又有所謂矢積者，是爲矢量之又一種乘法，其定義如次．試由 O 點作兩矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 如圖 1.12，如是則 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 可視爲一平行四邊形之兩邊．所謂 $\boldsymbol{a}$ 乘 $\boldsymbol{b}$ 之矢積，普常以$[\boldsymbol{ab}]$表之者，爲一矢量 $\boldsymbol{c}$，其長等於四邊形之面積，其方向垂直於此四邊形所居之平面，而其向旨則爲自 $\boldsymbol{a}$ 達 $\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 之右手轉軸（即由 $\boldsymbol{c}$ 之終點觀此平面，自 $\boldsymbol{a}$ 達 $\boldsymbol{b}$ 之最短轉動爲一正向轉動）．據此，如 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 在一直線之上，則$[\boldsymbol{ab}]=0$，蓋其四邊形之面積爲零故也．

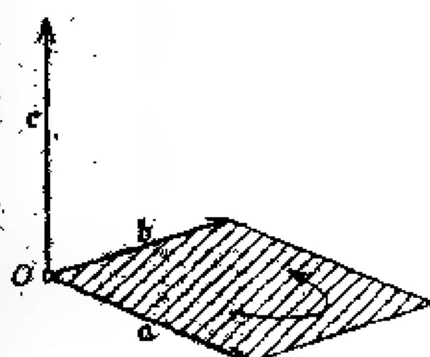


圖 1.12

次就矢積之運算言之，有下列事實，顯而可見：

(一)苟 $\boldsymbol{a}\neq0$ 及 $\boldsymbol{b}\neq0$，則$[\boldsymbol{ab}]=0$成立之必要與充分條件爲 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 之方向相同或相反．蓋如是，且亦惟如是，$\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 所組成之平行四邊形之面積等於零也．

(二)由定義可知　$[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}]$.

(三)若 a 及 b 爲任何實數，則$[a\boldsymbol{a}\,b\boldsymbol{b}]=ab[\boldsymbol{ab}]$，其理甚顯，無待贅證．

(四)分配律　$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$

之成立，擬證之如次．由此，更可根據上述之理(二)以推

$$[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}].$$

茲先述矢積$[\boldsymbol{ab}]$之幾何作法，藉以直接證明分配律之眞確。設 E 爲一平面，經過 O 而垂直於 $\boldsymbol{a}$，將 $\boldsymbol{b}$ 垂直投影於 E，得一矢量 $\boldsymbol{b}'$，見圖 1.13，於是可知$[\boldsymbol{ab}']=[\boldsymbol{ab}]$。蓋就兩平行四邊形觀之，其一之邊爲 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，其他之邊爲 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}'$，其面積實彼此相等；更考$[\boldsymbol{ab}']$及$[\boldsymbol{ab}]$之方向亦彼此相同，其故由於 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'$ 居於同一平面之中，而自 $\boldsymbol{a}$ 達 $\boldsymbol{b}'$ 之轉動向旨又同於自 $\boldsymbol{a}$ 達 $\boldsymbol{b}$ 之向旨也。復因矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 爲一長方形之邊，可見$[\boldsymbol{ab}']=[\boldsymbol{ab}]$之長即爲$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}'|$，故吾人如將 $\boldsymbol{b}'$

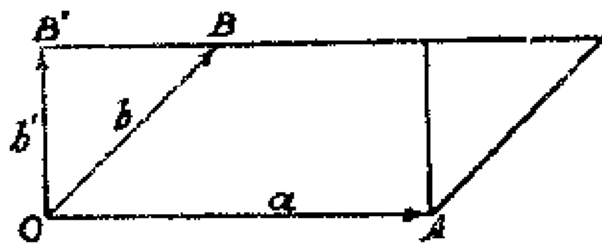


圖　1.13

依$|\boldsymbol{a}|:1$之之比例伸長之，則得一矢量 $\boldsymbol{b}''$，其長爲$[\boldsymbol{ab}']$之長。惟$[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{ab}']$既與 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 同時垂直，因之遂得由 $\boldsymbol{b}''$ 獲得$[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{ab}']$，但以 $\boldsymbol{a}$ 爲轉軸轉 $90°$ 可矣。由 $\boldsymbol{a}$ 之終點觀之，其轉動向旨自必爲正，是乃以 $\boldsymbol{a}$ 爲轉軸之正轉動。由是以論，$[\boldsymbol{ab}]$可由下法獲得之：將 $\boldsymbol{b}$ 垂直投影於平面 E，然後依$|\boldsymbol{a}|:1$之比例伸長之，更以 $\boldsymbol{a}$ 爲轉軸，作一 $90°$ 之正轉動可矣。

至此，可以討論如何證明$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$之法。吾人可設想 $\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 由 OB 及 OC 表達之，見圖 1.14，是爲平行四邊形之兩邊，其對角線 OD 即爲 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。然後根據上述之

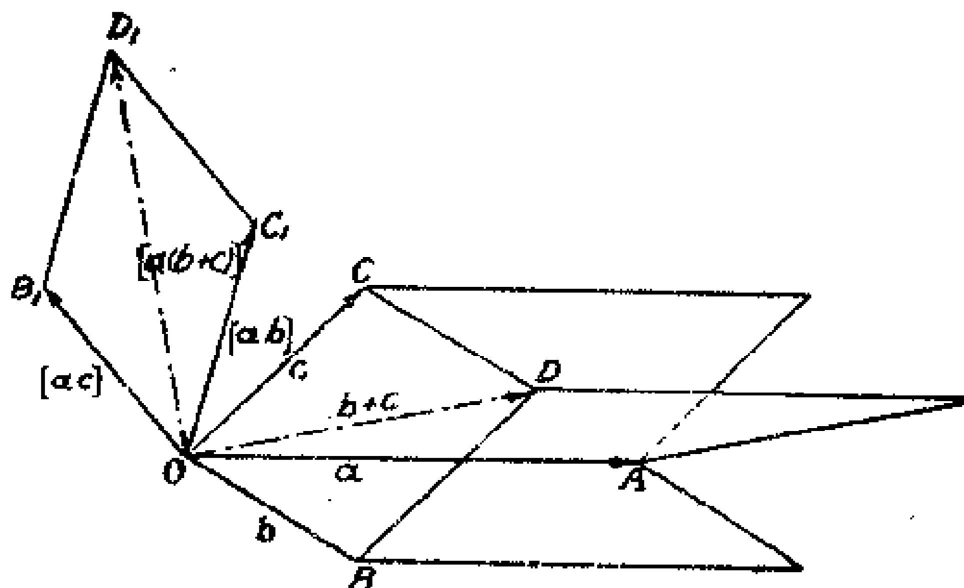


圖　1.14

法，以求$[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$及$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]$，即可見矢量$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]$爲一平行四邊形之對角線，其兩邊適爲$[\boldsymbol{ab}]$及$[\boldsymbol{ac}]$，於是欲證之理，已在是矣。

（五）最後請一論下列問題：設 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 沿坐標軸部分分別爲 a_1, a_2, a_3 及 b_1, b_2, b_3，則

其矢積由矢量部分表達之，其形式當爲何如？此問題自上述分配律得證之後，不難迎刃而解．蓋以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 爲沿坐標軸之單位矢量，則有

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3.$$

根據分配律，可知

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{ab}]=&[(a_1\boldsymbol{e}_1)(b_1\boldsymbol{e}_1)]+[(a_1\boldsymbol{e}_1)(b_2\boldsymbol{e}_2)]+[(a_1\boldsymbol{e}_1)(b_3\boldsymbol{e}_3)]\\&+[(a_2\boldsymbol{e}_2)(b_1\boldsymbol{e}_1)]+[(a_2\boldsymbol{e}_2)(b_2\boldsymbol{e}_2)]+[(a_2\boldsymbol{e}_2)(b_3\boldsymbol{e}_3)]\\&+[(a_3\boldsymbol{e}_3)(b_1\boldsymbol{e}_1)]+[(a_3\boldsymbol{e}_3)(b_2\boldsymbol{e}_2)]+[(a_3\boldsymbol{e}_3)(b_3\boldsymbol{e}_3)],\end{aligned}$$

由是得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{ab}]=&a_1b_2[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]+a_1b_3[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3]+a_2b_1[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1]\\&+a_2b_3[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]+a_3b_1[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1]+a_3b_2[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2].\end{aligned}$$

惟因 $\boldsymbol{e}_1=[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]=-[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2]$, $\boldsymbol{e}_2=[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1]=-[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3]$, $\boldsymbol{e}_3=[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]=-[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1]$ 之故，遂得

$$[\boldsymbol{ab}]=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3.$$

由是知 $[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{c}$ 之矢量部分 c_1, c_2, c_3 爲

$$c_1=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\qquad c_2=\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\qquad c_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

1.2.3. 四面體之體積

設一四面體，其頂爲坐標原點及 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$. 欲將其體積由其頂之坐標表示之，可設想 $\boldsymbol{x}_1=OP_1$ 及 $\boldsymbol{x}_2=OP_2$ 兩矢量爲一三角形之兩邊，如圖 1.15，此三角形之面積，即爲 $[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2]$ 之長之半．考 $[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2]$ 之方向，爲 P_3 垂直於 OP_1P_2 平面之直線．此垂直線之長 h（即四面體之高），因此必爲矢量 $\boldsymbol{x}_3=OP_3$ 乘以沿 $[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2]$ 之單位矢量之標積，蓋 h

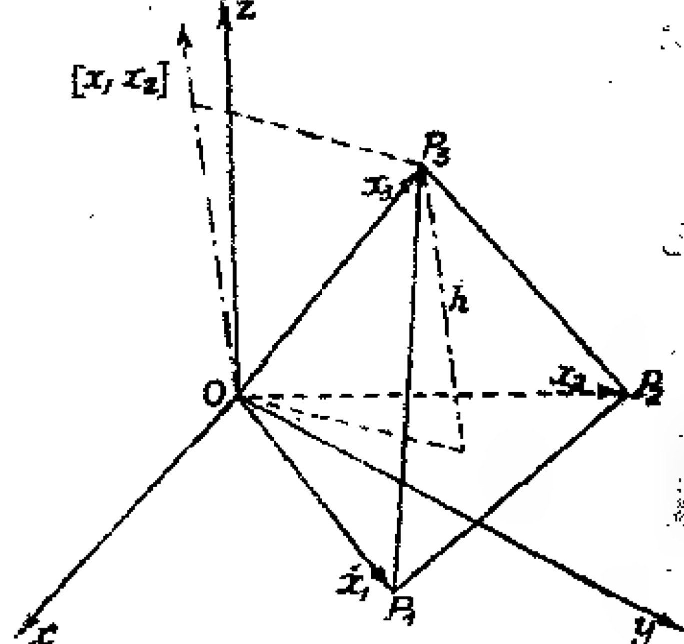


圖 1.15

爲 OP_3 沿 $[x_1x_2]$ 之部分故也．惟 $[x_1x_2]$ 之絕對值既兩倍於三角形 OP_1P_2 之面積 A，而四面體之體積 V 復爲 $\frac{1}{3}hA$，故　　$V=\frac{1}{6}([x_1x_2]x_3)$．

又若 $[x_1x_2]$ 之矢量部分爲

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

遂得

$$V=\frac{1}{6}\left\{x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

是即欲求之公式．此公式當 O、P_1、P_2 三點成一直線上時亦依然有效，蓋此時 $[x_1x_2]$ 之方向固未能確定，因之 h 不復能視爲 x_3 沿 $[x_1x_2]$ 方向之部分，但因 $A=0$ 而得 $V=0$，此結果亦得由上列公式推斷之，蓋在此情形下 $[x_1x_2]$ 之矢量部分均爲零也．

所當注意者，四面體之體積在此亦有正負之分，與前論三角形之面積時正復相似．吾人不難證明如下事實：若 OP_1，OP_2 及 OP_3 依次所組成之系與坐標系同類者(同爲右手或同爲左手)則其體積爲正，反是爲負．蓋由前者而言，$[x_1x_2]$ 及 x_3 間之角 δ 介於 $0\leqq\delta\leqq\frac{\pi}{2}$ 之間，由後者而言，則介於 $\frac{\pi}{2}\leqq\delta\leqq\pi$ 之間，由 $[x_1x_2]$ 之定義及

$$([x_1x_2]x_3)=|[x_1x_2]|\,|x_3|\cos\delta$$

可以見之也．

復次，上列公式中之

$$x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

可縮寫如

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

是爲一三行之行列式．又若四面體居於原點之一頂移於 (x_0, y_0, z_0)，則其體積當爲

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}.$$

例　題①

1．自直線 l：

$$x=at+b,\qquad y=ct+d,\qquad z=et+f,$$

至　$P(x_0, y_0, z_0)$ 點之距離爲何？

2．* 空間有二直線 l 及 l'，其方程式分別爲

---

①較難之習題綴有星號．

$$x=at+b,\quad y=ct+d,\quad z=et+f,$$

及

$$x=a't+b',\quad y=c't+d',\quad z=e't+f',$$

試求其間之最短距離.

3.試證經過(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)三點之平面為

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix}=0.$$

4.在一均速旋轉中,設(α, β, γ)為轉軸之方向餘弦,ω為角速度,此轉軸通過原點.試求(x, y, z)點之速度.

5.試證 Lagrange 恆等式

$$[\boldsymbol{xy}]^2=|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2-(\boldsymbol{xy})^2.$$

6.頂點為$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ……, $P_n(x_n, y_n)$之凸多邊形,其面積等於下式絕對值之一半:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots\cdots+\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}.$$

第三節　行列式之簡單定理及應用

188.1. 行列式之簡單性質

討論三角形及四面體時,已見有所謂二行及三行之行列式者.茲略論其簡單性質,至如何推廣其理以論n行之行列式,因在實用上不甚重要,故置之不論.

行列式之定義,已為讀者所熟知.如二行行列式為

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

三行行列式為

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=aek+bfg+cdh-ceg-afh-bdk.$$

今論其性質,約有下列數種:

(1)行列式中行列對調,其值不變;意即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}.$$

(2)行列式中兩行或兩列對調，則其值正負一變，卽其值將乘以 -1，其理甚顯，自無待證.

(3)據定義既知

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

吾人可根據(2)而變其形式如下:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

是卽所謂依第三行展開之法.據同理,又有

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -x_2\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_2\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z_2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

爲依第二行展開,及

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

乃依第一行展開之結果.復因行列對調不影響其原有之值,遂有依第一列、第二列及第三列之展開如下:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_2\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(4)行列式中每行(或每列)之各數如乘以 ρ,則其值將乘以 ρ.此由上述之理可以推斷之.

復由(2)及(4)可以推知:

(5)行列式中兩行(或列)之各數彼此成比例者,則其值爲零.又由定義可知行列式中有一行(或列)全爲零者,其值亦爲零.

(6) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & p & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+m & c \\ d & e+n & f \\ g & h+p & k \end{vmatrix},$$

蓋將左列兩式依第二列展開之,其眞確卽顯而可見

(7)行列式中任何一行(或列)之各數乘以一數後加於其他任何一行(或列),則其值不變.其理由從(5),(6)可以見之.

應用上述各種性質,行列式之計算,得隨之而化簡.舉例於後,藉資參覽:

〔例一〕
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = aeh.$$

〔例二〕
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{因第二行加於第一行})$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{依第一行展開})$$

於是知其值為 -4.

〔例三〕
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}.$$

然後依第一列展開之,即得

$$\begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

1.3.2.　行列式之應用於聯立一次方程式

設有兩聯立一次方程式如

$$ax + by = A,$$

$$cx + dy = B,$$

則在
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

之條件下,其解為
$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},$$

此由直接代入兩可以見之.若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$等於零,而$\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}$及$\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}$兩者中不皆為零,則

$$x\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}, \qquad y\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}$$

將陷於矛盾.至於
$$\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix} = 0$$

時,其解如何,由上述公式尚無法斷定之.要之,上列兩聯立一次方程式在$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 時必有唯

一之解,則可斷言耳.苟 $A=0$, $B=0$, 即上列聯立一次方程式有齊次性者,則在$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 時其解為 $x=0$, $y=0$.

次論三個聯立一次方程式如

$$ax+by+cz=A,$$

$$dx+ey+fz=B,$$

$$gx+hy+kz=C,$$

其情形亦復相似.試以$\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}$乘第一式,$-\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}$乘第二式,$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$乘第三式後相加,則有

$$x\left\{a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\right\}+y\left\{b\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}-e\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}+h\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\right\}$$

$$+z\left\{c\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}-f\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\right\}=A\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}-B\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}+C\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

是卽

$$x\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & k \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ k & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & k \end{vmatrix},$$

或

$$x\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & k \end{vmatrix}.$$

據同理,復有

$$y\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & k \end{vmatrix},$$

$$z\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix}.$$

故在

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

不等於零之條件下有唯一之解,若 $A=B=C=0$ 時其唯一之解為 $x=0$, $y=0$, $z=0$. 苟 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ 為零,則欲求上列方程式之成立,必 A, B, C 滿足相當條件而後可.

以上乃就方程式之個數與未知數之個數相等時情形論之.設有兩齊次性之方程式用以規定三個未知數者如

$$ax+by+cz=0,$$

$$dx+ey+fz=0,$$

則當觀下列三行列式為何如:

$$D_1=\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

苟其不全等於零,如 $D_3 \neq 0$,則可根據前法以求 x 及 y,得

$$x=\frac{zD_1}{D_3}, \qquad y=\frac{zD_2}{D_3},$$

或

$$x:y:z=D_1:D_2:D_3.$$

由其幾何意義言之,無異謂有兩矢量 u 及 v,其矢量部分別為 a, b, c 及 d, e, f 者,如何設法求一矢量 x,與之各相垂直,換言之,滿足　$ux=0$,　$vx=0$,

由是知 x 之方向必與$[uv]$相同,可籍言也。

例題

1.試示行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

恆可變成如下形式

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix},$$

僅須連續應用下列二法:(1)互換二行或二列,(2)將一行(或列)之倍數加於另一行(或列)。

2.苟下列三行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

不皆為零,則方程式

$$a_1x+a_2y=d,$$

$$b_1x+b_2y=e,$$

$$c_1x+c_2y=f$$

有一解答存在之充分與必要條件為

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d \\ b_1 & b_2 & e \\ c_1 & c_2 & f \end{vmatrix}=0.$$

3.試述二直線

$$x=a_1t+b_1,\qquad y=a_2t+b_2,\qquad z=a_3t+b_3$$

及

$$x=c_1t+d_1,\qquad y=c_2t+d_2,\qquad z=c_3t+d_3$$

或相交或平行之條件.

4. 試證頂點爲(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)之四面體，其體積爲

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

第四節　論仿射轉換及行列式之乘法

1.4.1.　空間或平面之仿射轉換

所謂空間(或平面)之轉換，乃空間中之點(或平面中之點)依一確定法則有一點與之相應之謂;與之相應之點謂爲影點(1)，或謂其點之影．轉換之義，亦可假用物理概念闡明之．如設想空間(或平面)爲一具有伸屈性之物質所佔據，於是所謂轉換，可視爲其中一點因伸展而達於其他一點也．

轉換中最簡而最要者，莫如仿射轉換(2)．試應用點之直角坐標(x, y, z)，其影之坐標爲(x', y', z');所謂仿射轉換，乃x'、y'、z'爲x、y、z之一次函數之謂:

$$x'=ax+by+cz+m,$$

$$y'=dx+ey+fz+n,$$

$$z'=gx+hy+kz+p.$$

關於平面之仿射轉換，則有

$$x'=ax+by+m,$$

$$y'=cx+dy+n.$$

其中a, b, c……等均爲常數．推如是，空間(或平面)中每一點皆有一影點以應之．然則倒而論之，是否每一(x', y', z')必有一(x, y, z)與之相應? 此其可能之必要與充分條件，爲下列方程式

(1) image point; Bildpunkt　(2) affine transformation, affine Transformation.

$$ax+by+cz=x'-m,\quad dx+ey+fz=y'-n,\quad gx+hy+kz=z'-p;$$

或

$$ax+by=x'-m,\quad cx+dy=y'-n;$$

不論 x', y', z' 之值爲何如,必有唯一之解 x、y, z, 故據前述之理,必

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix},\qquad \text{或}\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

不等於零而後可.在此條件之下,上列之仿射轉換乃有唯一反轉換,使任何 (x', y', z') 復返於 (x, y, z),吾人在此所論者,皆爲此種仿射轉換,至 $\Delta=0$ 時之情形,不復加以深討.

試假用一點 (x'', y'', z''),如

$$x''=ax+by+cz,\quad y''=dx+ey+fz,\quad z''=gx+hy+kz;$$

或

$$x''=ax+by,\quad y''=cx+dy;$$

則上列之普通仿射轉換可分析爲兩步轉換:

$$x'=x''+m,\quad y'=y''+n,\quad z'=z''+p;$$

或

$$x'=x''+m,\quad y'=y''+n;$$

是將 (x, y, z) 先移於 (x'', y'', z''),復將 (x'', y'', z'') 移於 (x', y', z'), 與前之一次轉移成功者,結果相同.惟若後一步轉換,實爲一種平行移動,其性質自甚簡易.故吾人此後之討論,僅限於

$$x'=ax+by+cz,\quad y'=dx+ey+fz,\quad z'=gx+hy+kz;$$

或

$$x'=ax+by,\quad y'=cx+dy;$$

其行列式不等於零者足矣.

據前論聯立一次方程式之理,此轉換必有唯一反轉換:

$$x=a'x'+b'y'+c'z',\quad y=d'x'+e'y'+f'z',\quad z=g'x'+h'y'+k'z';$$

或

$$x=a'x'+b'y',\quad y=c'x'+d'y';$$

其中係數 a', b', c'……由 a, b, c……聯合而成者，其間關係如何，讀者可自求得之．至於其他性質，擇其最要者略舉數端於後：

(1)仿射轉換之結果，空間中平面之影爲平面，平面中直線之影爲直線．何以言之？設有一平面(或一直線)如

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$(\text{或}\quad Ax+By+D=0)$$

其中 $A, B, C,$ (或 A, B)不全爲零者，其影爲

$$A(a'x'+b'y'+c'z')+B(d'x'+e'y'+f'z')+C(g'x'+h'y'+k'z')+D=0$$

$$(\text{或}\quad A(a'x'+b'y')+B(c'x'+d'y')+D=0),$$

是又爲一平面(或一直線)；蓋影點坐標(x', y', z')之係數

$$A'=a'A+d'B+g'C,\qquad\qquad \left(\text{或}\quad A'=a'A+c'B\right)$$
$$B'=b'A+e'B+h'C,\qquad\qquad \left(\phantom{\text{或}}\quad B'=b'A+d'B\right)$$
$$C'=c'A+f'B+k'C,$$

不能全等於零，因

$$a'A+d'B+g'C=0,\qquad\qquad \left(\text{或}\quad a'A+c'B=0\right)$$
$$b'A+e'B+h'C=0,\qquad\qquad \left(\phantom{\text{或}}\quad b'A+d'B=0\right)$$
$$c'A+f'B+k'C=0,$$

倘能成立，則 $A=0,\ B=0,\ C=0$ (或 $A=B=0$)，是與假定相矛盾也．

(2)空間中直線之影爲一直線．是乃(1)之必然結果，蓋空間中之直線爲兩平面之相交處也．

(3)空間中兩平面之平行者(平面中兩直線之平行者)，其影亦平行．蓋其影如相交，則原形亦相交矣．

(4)空間中兩直線如平行，其影亦必平行．其理可由(1)、(2)推知之，無待贅也．

復次，設有一矢量 v，其起點爲 a，終點爲 β 者，則其影爲一矢量 v'，由 a 之影點，直達 β 之影點．復因矢量之部分爲其起點終點坐標之差數，從而可知矢量部分之受仿射轉換，必依如下法則而行：

$$v_1'=av_1+bv_2+cv_3,$$

$$v_2'=dv_1+ev_2+fv_3,$$

$$v_3'=gv_1+hv_2+kv_3,$$

又不待證而自明也.

1.4.2. 仿射轉換之疊合與分解

設以下列仿射轉換將(x,y,z)移至(x',y',z'):

$$x'=ax+by+cz,$$

$$y'=dx+ey+fz,$$

$$z'=gx+hy+kz,$$

復將(x',y',z')移於(x'',y'',z'')如

$$x''=a_1x'+b_1y'+c_1z'$$

$$y''=d_1x'+e_1y'+f_1z'$$

$$z''=g_1x'+h_1y'+k_1z',$$

則(x,y,z)與(x'',y'',z'')之間,亦必有一種仿射轉換之關係:

$$x''=a_2x+b_2y+c_2z,$$

$$y''=d_2x+e_2y+f_2z,$$

$$z''=g_2x+h_2y+k_2z,$$

其中係數$a_2,b_2,\cdots\cdots$爲

$$a_2=a_1a+b_1d+c_1g,\qquad b_2=a_1b+b_1e+c_1h,\qquad c_2=a_1c+b_1f+c_1k,$$

$$d_2=d_1a+e_1d+f_1g,\qquad e_2=d_1b+e_1e+f_1h,\qquad f_2=d_1c+e_1f+f_1k,$$

$$g_2=g_1a+h_1d+k_1g,\qquad h_2=g_1b+h_1e+k_1h,\qquad k_2=g_1c+h_1f+k_1k,$$

是爲兩仿射轉換之疊合,本身又爲一仿射轉換. 苟前兩種轉換之行列式不等於零,即各有一反轉換之存在,則如是疊合之轉換亦必有一反轉換.

試研究下列兩轉換

$$x'=ax+by \qquad\qquad x''=a_1x'+b_1y'$$

及

$$y'=cx+dy \qquad\qquad y''=c_1x'+d_1y'$$

疊合之結果爲

$$x'' = (a_2 a + b_1 c)x + (a_2 b + b_1 d)y,$$

$$y'' = (c_1 a + d_1 c)x + (c_1 b + d_1 d)y,$$

是又爲一仿射轉換,其間係數之關係,讀者幸細察之也.

以上論仿射轉換之疊合;試倒其意而論之,則有所謂轉換之分解,即分解爲若干較簡之轉換,換言之,將一普遍轉換視爲若干較簡之轉換疊合而成.若轉換中除一個坐標受轉換影響外,其他坐標皆不生變化者,如

$$x' = ax + by + cz, \quad y' = y, \quad z' = z;$$

或

$$x' = ax + by, \quad y' = y.$$

其形式特簡,因稱之爲原始轉換[1].凡普遍之仿射轉換,其行列式不等於零者,如

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \qquad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

均得由原始轉換疊合之.其證如次.試假定 $a \neq 0$①,應用下列轉換將(x, y)移於(ξ, η):

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = y,$$

是爲一原始轉換,其行列式 $a \neq 0$. 然後復依下列另一原始轉換

$$x' = \xi, \qquad y' = \frac{c}{a}\xi + \frac{ad - bc}{a}\eta$$

移之於(x', y'),其行列式爲

$$\frac{ad - bc}{a} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

而欲證之理,即在是矣.

* 據同理,可將

---

(1) primitive transformation; primitive Transformation.

①若 $a = 0$, 則可假定 $b \neq 0$, 於是將 x 與 y 對調,即可歸併於此情形.所謂 x 與 y 對調,無異謂實施 $X = y$, $Y = x$, 而此轉換,亦得分解爲連續三次原始轉換如:

$$\xi_1 = x - y, \quad \eta_1 = y; \qquad \xi_2 = \xi_1, \quad \eta_2 = \xi_1 + \eta_1 = x; \qquad X = -\xi_2 + \eta_2 = y, \quad Y = \eta_2 = x.$$

$$x' = ax + by + cz,$$

$$y' = dx + ey + fz,$$

$$z' = gx + hy + kz,$$

其行列式不等於 0 者，分解爲原始轉換．蓋在此假定之下，下列三行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

自不能全等於 0．試假定 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$，又 $a \neq 0$，則此轉換乃由實施下列原始轉換：

$$\xi = ax + by + cz,$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

及

$$\xi' = \xi,$$

$$\eta' = \frac{d}{a}\xi + \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\eta + \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}\zeta,$$

$$\zeta' = \zeta.$$

其行列式爲 $\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ 者，然後復施以

$$x' = \xi',$$

$$y' = \eta',$$

$$z' = -\frac{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}\xi' + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}\eta' + \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}\zeta'$$

而成者也．

1.4.3. 行列式之乘法

由上述結果，可以推斷一關於行列式之重要定理，而仿射轉換中之行列式，亦可從而獲得一顯明之新意義焉．

設有一三角形，其頂爲 $(0,0)$，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 者，則其面積 A 爲

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

苟施以下列仿射轉換：

$$x' = ax + by,$$

$$y' = y$$

則其頂之影為$(0,0)$,(ax_1+by_1, y_1),(ax_2+by_2, y_2),而其影之面積A'為

$$A' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

是即

$$A' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_1 & ax_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

故得

$$A' = aA.$$

據同理,若依

$$x' = x,$$

$$y' = cx + dy$$

轉換之,則A'與A之關係將為$A' = dA$.由是以論,仿射轉換對三角形所產生之影響,其面積將因之而乘以一數,而此數有關轉換之性質,但與原有三角形無涉.以上僅就原始轉換言之.若施以普遍之仿射轉換,其理亦同,蓋普遍轉換為原始轉換所疊合而成者也.要而論之,仿射轉換之影響,必使三角形之面積A與其影A'之比為一常數,而此常數僅與轉換係數有關,吾人不難測定之,其法如次.取一特殊三角形,其頂為$(0,0)$,$(1,0)$,$(0,1)$,其面積A為$\frac{1}{2}$者,經下列轉換

$$x' = ax + by,$$

$$y' = cx + dy,$$

其頂之影為$(0,0)$,(a,c),(b,d),其影之面積為

$$A' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

由是知$\frac{A'}{A}$無他,實其所施仿射轉換之行列式也.

明乎是,則其理之推廣自屬不難.設有一四面體,其頂為$(0,0,0)$,(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)及(x_3,y_3,z_3),其體積為V者,苟施以下列仿射轉換,

$$x' = ax + by + cz,$$

$$y' = dx + ey + fz,$$

$$z' = gx + hy + kz,$$

則其影之體積 V' 必爲

$$V'=V\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix},$$

簡言之，其影響所及，使其體積乘以轉換之行列式耳．此行列式之正負，自亦有其幾何學上之意義．據前所論經歷頂點之向旨與體積正負之關係，可知此行列式如爲正，則其原有向旨不變，否則卽一反其原有向旨，其理甚顯，無待贅證也．

既明上述之理，則行列式之乘法定理，卽得一簡單之說明．試聯合

$$x'=ax+by+cz \qquad\qquad x''=a_1x'+b_1y'+c_1z'$$

$$y'=dx+ey+fz \qquad\qquad y''=d_1x'+e_1y'+f_1z'$$

$$z'=gx+hy+kz, \qquad\qquad z''=g_1x'+h_1y'+k_1z',$$

則有

$$x''=(a_1a+b_1d+c_1g)x+(a_1b+b_1e+c_1h)y+(a_1c+b_1f+c_1k)z$$

$$y''=(d_1a+e_1d+f_1g)x+(d_1b+e_1e+f_1h)y+(d_1c+e_1f+f_1k)z$$

$$z''=(g_1a+h_1d+k_1g)x+(g_1b+h_1e+k_1h)y+(g_1c+h_1f+k_1k)z.$$

今由 x, y, z 移於 x', y', z'，則上述四面體之體積將因之而乘以

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

復由 x', y', z' 移於 x'', y'', z''，其體積將更乘以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix};$$

如由 x, y, z 直接移於 x'', y'', z''，其所乘之數爲

$$\begin{vmatrix} a_1a+b_1d+c_1g & a_1b+b_1e+c_1h & a_1c+b_1f+c_1k \\ d_1a+e_1d+f_1g & d_1b+e_1e+f_1h & d_1c+e_1f+f_1k \\ g_1a+h_1d+k_1g & g_1b+h_1e+k_1h & g_1c+h_1f+k_1k \end{vmatrix}.$$

由是以觀，必有下列關係之成立：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & k_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1a_2+b_1d_2+c_1g_2 & a_1b_2+b_1e_2+c_1h_2 & a_1c_2+b_1f_2+c_1k_2 \\ d_1a_2+e_1d_2+f_1g_2 & d_1b_2+e_1e_2+f_1h_2 & d_1c_2+e_1f_2+f_1k_2 \\ g_1a_2+h_1d_2+k_1g_2 & g_1b_2+h_1e_2+k_1h_2 & g_1c_2+h_1f_2+k_1k_2 \end{vmatrix}.$$

是卽行列式之乘法定理，由幾何觀點闡明之，固顯而可見也．就二行之行列式言之，則有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & a_1c_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1b_2 & c_1c_2+d_1d_2 \end{vmatrix},$$

其幾何意義,讀者可自得之.

例　　題

1.試求下列各行列式之值:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$, (b) [illegible], (c) [illegible], (d) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$.

2.欲下列一組方程式

$$3x+4y+5z=a,$$

$$4x+5y+6z=b,$$

$$5x+6y+7z=c$$

有解,試問 a, b, c 間必須有何關係?

*3.(a)試證不等式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \leqq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)}.$$

(b)等號於何時有效?

4.欲仿射轉換

$$x'=ax+by,\qquad y'=cx+dy$$

使任何兩點間之距離不變,必須滿足如何條件?

5.試證在一仿射轉換中二次曲面

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx+gx+hy+iz+j=0$$

之影仍爲二次曲面.

*6.試證仿射轉換

$$x'=ax+by+cz$$

$$y'=a'x+b'y+c'z$$

$$z'=a''x+b''y+c''z$$

至少有某一方向不生變動.

7.今繞軸 $x:y:z=1:0:-1$ 作一轉動,所轉過之角爲 θ,且由點 $(-1,0,1)$ 觀此轉動,見平面 $x=z$ 正向而轉.試求此轉動之公式.

8. 試證仿射轉換將一組質點之質量中心轉換爲相應點之質量中心.

9. 若 $\alpha_1, \cdots\cdots, \gamma_3$ 即爲第 441 頁上諸數，決定一坐標軸之轉軸者，則

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

第二章　兩個以上自變數之函數及其導數

第一節　函數之概念

2.1.1.　函數及其自變數之變區

設以 x, y 表自變數，則下列關係

$$u=x+y, \quad u=x^2y^2 \quad 或 \quad u=\log(1-x^2-y^2)$$

之用意，在使每一對 x, y 之值，有一 u 之值以應之．就前兩例言之，不論 x, y 如何變化，必有一確定之 u 與之相應．就後一例言之，x, y 之變化範圍當限於 $x^2+y^2<1$ 之條件．諸如此類，即稱 u 爲 x, y 之函數，u 爲因變數，x 及 y 爲自變數；自變數所規定變化之範圍爲其變區[1]．據同理，設每一數集 $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)$ 有一確定之 u 應之者，則 u 稱爲 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之函數．

茲所欲討論之函數，可假定其中有兩個自變數．蓋欲推廣其理以論自變數之多於兩個者，事甚易易．且在原則上無甚差異可言，故無縷述之必要也．

欲論兩個自變數之函數，其自變數 (x, y) 可由平面中之點表而出之．在此亦有所謂"連續變數"與"不連續變數"之別；自變數之變，有限於整數之範圍者，是謂"不連續"；有在規定範圍可任意取得其中之實數者，謂之"連續"，其所規定範圍謂之變區，與上卷中所論之變程相似．自變數之變區可包括整個 xy 平面，或平面中之一部分爲一迴合曲線所圍成者，視問題之性質如何而定．苟其爲一條迴合曲線所圍而成，則其變區謂之單連[2]，苟其邊界爲多於一條之迴合曲線所成如圖 2.2 所示者，謂之多連[3]．要之，在本書中，一切變區之邊界必假定爲大體光滑，換言之，表達邊界之函數除在有若處有不連續之導數外，其導數處處連

---

(1) region, domain; Bereich.　(2) simply-connected; einfach zusammenhängend.　(3) multiply-connected; mehrfach zusammenhängend.

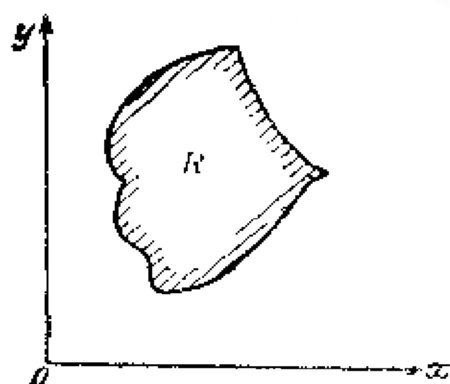


圖 2.1

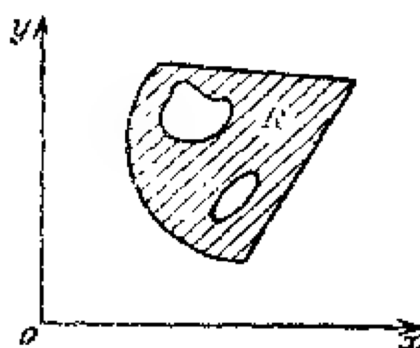


圖 2.2

續，故其曲線至多呈現有盡個之尖角及叉點而已.

變區之最普通常見者莫如長方形；即x，y之變，爲下列條件所限制：

$$a \leqq x \leqq b$$

$$c \leqq y \leqq d.$$

或爲圓形變區如

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqq r^2.$$

設有一變區R，其中如有一點P，以P爲中心之圓完全居於R之內者，

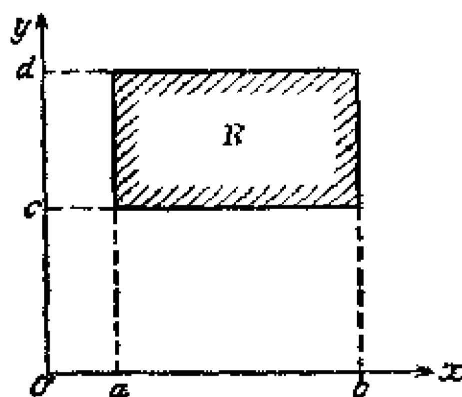


圖 2.3

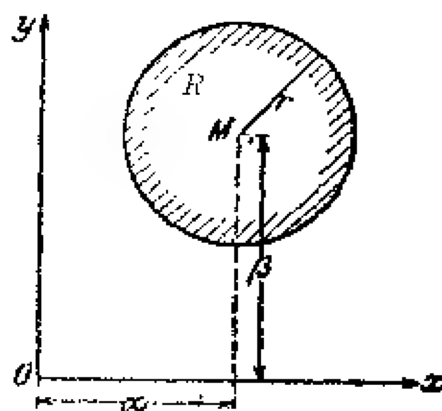


圖 2.4

則P卽稱之爲R之內點而R爲P之鄰. 任何P之鄰自必包含任意小以P爲中心之圓於其中.

以上所述，在自變數多於兩個時，亦可相當應用. 如有三個自變數x，y，z，則其變區不復限於平面而爲一個三維空間體；例如x，y，z之變，限於

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \leqq r^2$$

者，其變區為一球體，以 α、β、γ 為中心而以 r 為半徑者．苟其自變數多於三個者，則欲說明其變區，需憑想像不復可能；然為行文之便，不妨仍用 n 維空間等語，例如

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+\cdots\cdots\leqq r^2,$$

謂其變區為一 n 維空間中之球體，亦無不可．

所當注意者，在此所謂變區，亦有開閉之可言，與前之有開程閉程者，正復相似．如有一變區 $x^2+y^2<1$，其邊界為一圓 $x^2+y^2=1$，而圓上之點不屬於變區之內者，其變區為開．苟其邊界上之點同屬於變區之內，則其變區為閉．

變區之義既明，乃可進而為函數立一精確定義．設 R 為一變區，其中 $x, y, z,\cdots\cdots$ 得任意變化，即所謂連續自變數，又 R 中每一點 $(x, y, z,\cdots\cdots)$ 必有一確定之 u 據一法則與之相應，則 $u=f(x, y, z,\cdots\cdots)$ 即稱之為 $x, y,\cdots\cdots$ 之函數．

所謂函數，據上所述，乃每一組 $(x, y, z,\cdots\cdots)$ 有一 u 以應之之謂．苟其間關係有多值性，如 $\arctan\frac{y}{x}$，則其函數未能完全確定，故必同時說明其所應之值果為何值而後可．若未有特殊說明，則為一多值函數．一多值函數可分為若干單值支，其理同上卷所論，可不贅．

2.1.2.　最簡單函數舉例

兩個以上自變數之函數，其形式之最簡單者，亦當推整有理函數，或稱多項式．試假定有二個自變數 x, y，則最普遍之一次多項式為

$$u=ax+by+c,$$

最普遍之二次多項式為

$$u=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f,$$

其中 a, b, c, d, e, f 均為常數；而最普通任何高次之多項式皆為 $a_{mn}x^m y^n$ 諸項相加之結果，其中 a_{mn} 亦為常數也．

其次，有所謂有理分函數，為兩多項式之商如

$$u=\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}.$$

若更用求根之法，則由有理函數，而至代數函數①，如

①代數函數之精確定義，當於後節提出之

$$u=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$$

即為代數函數之一例.他如

$$u=\sin(x\arccos y) \quad 或 \quad u=\log_x y$$

則為超越函數之例.至疊函數之組織，讀者既明上述所論，亦可推廣其理，應用於此也.

2.1.3. 函數之標繪

函數之義，據上所述，自覺異常普遍.惟茲欲討論之函數，乃限於有標繪之可能者.如應用直角坐標，令 x、y 在其規定變區內變化，則兩自變數之函數 $u=f(x,y)$ 得由空間中之一曲面表而達之.此曲面即謂為標繪 $u=f(x,y)$ 而得之圖形.反觀解析幾何學中，凡空間中之曲面，可視為兩自變數之一種函數，故兩者之間，有相互表達之關係焉.

例如標繪 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$，得一半球體，以原點為中心，其半徑為 1，居於 xy 平面之上方者，如圖 2.5.又 $u=x^2+y^2$ 之圖形為一轉成拋物面，將一拋物線 $u=x^2$ 以 u 軸為轉軸而轉成者(見圖 2.6).至 $u=x^2-y^2$ 及 $u=xy$ 之圖形，略如圖 2.7 所示，$u=ax+by+c$ 之圖形為一平面，自顯而可見也.

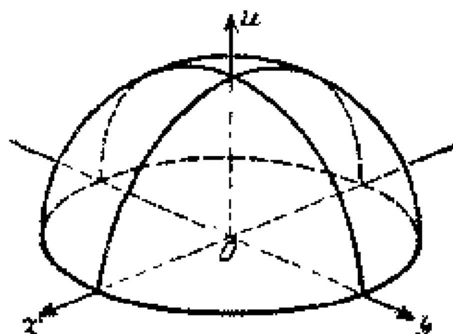


圖 2.5

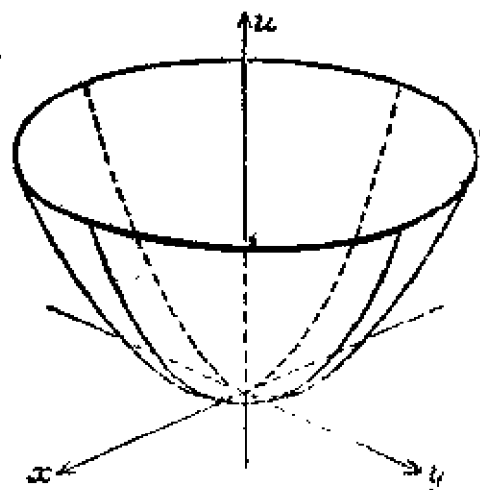


圖 2.6

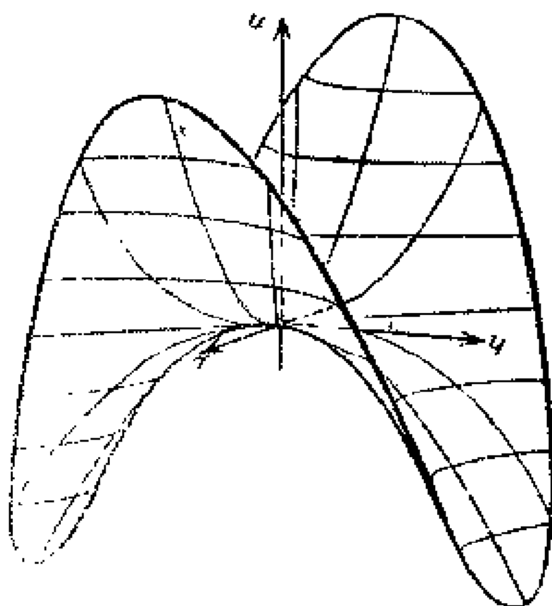


圖 2.7

標繪函數之法，如上所述者，殊有其不甚便利之處. 設函數中之自變數多於兩個，則因吾人觀覺之限於三維空間，上述方法無從施其技. 卽就兩自變數之函數言之，欲討論曲面之性質，不若討論曲線之簡易；因此之故，乃更有一標繪 $u=f(x,y)$ 之法，其法在乎觀察 $u=f(x,y)=k$ 諸曲線，其中 k 假定爲任何常數，如 $k=\nu h$，$\nu=1,2,3,4,\cdots\cdots$. 此種曲線皆居於 xy 平面之內，謂之水準線[1]；令 $u=f(x,y)$ 與平行於 xy 平面之平面相交，將其相交線垂直投影於 xy 平面可以得之. 觀此種水準線如何隨 k 而異及其相互間之關係，則 u 隨 x 及 y 而變之情形，得昭然若揭，故其作用與標繪初無二致也.

試應用此法，則 $u=ax+by+c$ 將由一族平行直線 $ax+by+c=k$ 表達之. 他如 $u=x^2+y^2$，爲一族同心圓，見圖 2.8；又 $u=x^2-y^2$，爲一族雙曲線，如圖 2.9.

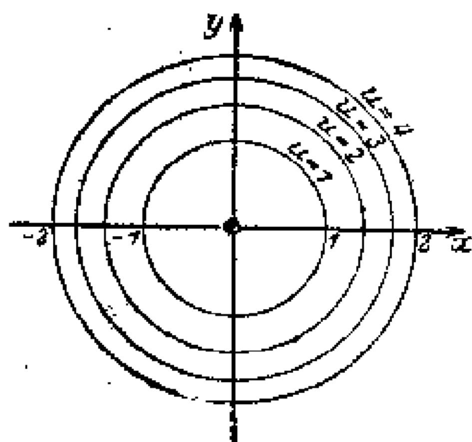


圖 2.8

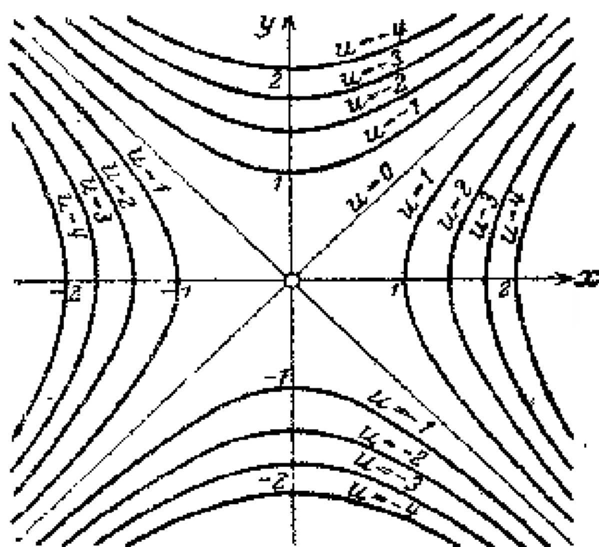


圖 2.9

不寧惟是，此種表達方法尙有推廣之可能. 如欲標繪三個自變數之函數 $u=f(x,y,z)$，但觀 $f(x,y,z)=k$，令 k 爲一適當數序，其中關係，卽可瞭然. 例如 $u=x^2+y^2+z^2$，如用此法表達之，卽得一族同心球面，以原點爲中心者.

例　題

試爲下列各函數草繪其水準線，與 $z=-2,-1,0,1,2,3$ 相應者：

(1) contour lines, level lines; Höhenlinien

(a) $z=x^2y$,　　(b) $z=x^2+y^2-1$,　　(c) $z=x^2-y^2$,

(d) $z=y^2$,　　(e) $z=y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

第二節　函數之連續性

2.2.1.　連續性之定義

連續性定義之重要，前在上卷中已詳見之．今欲論兩個自變數之函數，其義自應有精確之闡明．淺言之，函數 $u=f(x,y)$ 在 (x,y) 點之連續，意卽 $f(\xi,\eta)$ 與 $f(x,y)$ 之値，當 (ξ,η) 異常鄰近於 (x,y) 時，必相差甚微之謂．此就其大要言之，惟如何始得謂"異常鄰近"，如何始得謂"甚微"，言雖平易，殊嫌未臻確定．故必以下列精密數字說明之．

設有一函數 $f(x,y)$，在變區 R 內完全規定者．**苟不論 ϵ 爲任何正數，必能求得一正數 $\delta=\delta(\epsilon)$，隨 ϵ 而異且隨 $\epsilon\to 0$ 而趨零者，足使變區中一切點之距離 (ξ,η) 近於 δ，即一切 (x,y) 之適合**

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqq\delta^2$$

者皆滿足　　$|f(x,y)-f(\xi,\eta)|\leqq\epsilon$,

則 $f(x,y)$ 在 (ξ,η) 謂有連續性．換言之，**苟下列關係**

$$|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)|\leqq\epsilon$$

不論 ϵ 如何小，必有一 $\delta(\epsilon)$ 存在，在 (h,k) 適合 $h^2+k^2\leqq\delta^2$ 及 $(\xi+h,\eta+k)$ 屬於規定變區之條件下果能成立者，則 $f(x,y)$ 在 (ξ,η) 謂之連續．苟其在變區 R 之每點上均有連續性，則在此變區中謂之連續．

爲應用之便，吾人常將上述條件 $h^2+k^2\leqq\delta^2$ 以下列條件替代之：

所謂 $f(x,y)$ 在 (ξ,η) 之連續性，其意無他，不論 $\epsilon>0$ 爲任何數，必有兩正數 δ_1 及 δ_2 可求，凡 h 及 k 之適合 $|h|\leqq\delta_1$，$|k|\leqq\delta_2$ 者皆足致

$$|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)|\leqq\epsilon$$

之成立．此條件自與前述者同其意義．蓋前者如成立，後者卽隨之滿足，但令 $\delta_1=\delta_2=\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ 卽可．倒之亦然．苟後者成立，但取 δ_1 及 δ_2 兩者中之較小者作爲 δ 可矣．

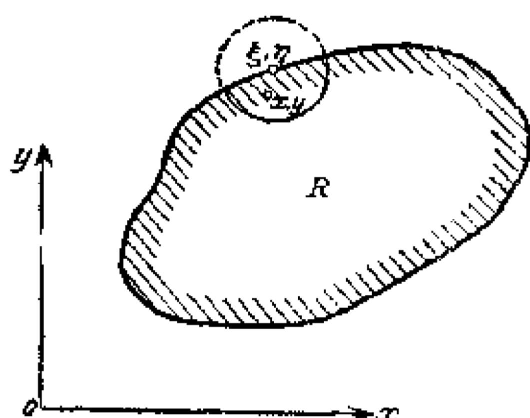


圖 2.10

連續性之義既明，下列事實之眞確，即顯而易見，無待贅證．其事維他，凡連續函數之和、之差、之積均爲連續，連續函數之商在其分母不等於零時亦爲連續．復次，連續函數之連續函數，即所謂連續複函數者，本身亦爲連續函數．由是以言，凡多項式皆爲連續，而一切有理分函數除其分母爲零時外亦皆連續①．

函數在變區中之某點或沿某曲線有失去其連續性者，是謂函數之間斷處．其種類不一而足．例如 $u=\frac{1}{x-y}$ 沿 $x=y$ 直線顯無連續性，或稱有間斷性．蓋吾人接近 $x=y$ 時，不論由何一邊接近之，u 之絕對值將無限制增大．他如 $u=\frac{1}{1-\frac{1}{x-y}}$ 沿 $x=y$ 亦有間斷性．至於 $u=\frac{1}{x^2+y^2}$，僅有一間斷點，即 $x=0, y=0$．如 $u=\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，在自變數趨近原點時無確定極限，故在此未能連續，其圖形得將 $u=\sin\frac{1}{x}$ 以 u 軸爲軸轉動而得之．

復次，凡兩自變數之函數，當其中自變數之一爲任何固定數時雖爲其他之連續函數，如 $f(x,y)$ 在 x 固定時對 y 有連續性，或 y 固定時對 x 有連續性，但未必因此即爲 x 及 y 之連續函數．舉例明之．如 $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，$u(0,0)=0$，試令 $x=0$，沿 y 軸而趨於原點，則 $u(0,y)=0$；又令 $y=0$，沿 x 軸而趨於原點，則 $u(x,0)=0$，故在原點顯有連續性．雖然，若以其爲兩變數之函數而考驗之，則在原點實未嘗連續．蓋就 $y=x$ 上之點而言，其時 $u=1$，因此之故，如沿 $y=x$ 而趨於原點，則必有點在其鄰近，其上 u 之值爲 1 者，於是 u 在 $x=0, y=0$ 之間斷性，從可識矣．

2.2.2. 極限

設有函數 $f(x,y)$，其規定變區爲 R，又假定 (ξ,η) 爲一點，處於 R 之中，或其邊界之上．如是則所謂 $f(x,y)$ 當 x 趨於 ξ，又 y 趨於 η 時趨於極限 l 者，意即不論 ϵ 爲任何正數，必有一正 δ 之可求，凡 R 中一切點 (x,y) 之滿足

①此外尚有一至顯之理：苟 $f(x,y)$ 在 R 中有連續性，其值在某點 P 不等於零者，則必可在 P 劃一鄰近，如以 P 爲中心之圓，令屬於 R 者，其中 $f(x,y)$ 之值無處爲零．

$$0<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqq\delta^2$$

者皆足致 $\quad |f(x,y)-l|<\epsilon$

之成立. 所當注意者,在此必假定(x,y)與(ξ,η)爲不同之點,其用意與上卷中論一個自變數時初無二致. 此極限 l 之存在,吾人常以下列符號

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\y\to\eta}} f(x,y)=l \quad 或 \quad f(x,y)\to l \quad 當 \quad (x,y)\to(\xi,\eta)$$

表而出之.

應用極限概念,可知函數 $f(x,y)$ 在(ξ,η)如有連續性,其必要與充分條件爲

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\y\to\eta}} f(x,y)=f(\xi,\eta).$$

在此所要求之條件有二:其一,在變區 R 中,當(x,y)趨(ξ,η)時必有一極限 l 存在,爲 $f(x,y)$ 所趨;其二,$f(x,y)$所趨極限非他,即爲$f(x,y)$在(ξ,η)所規定之値,即 $f(\xi,\eta)$是已.

欲論 $f(x,y)$ 之極限,其中趨於(ξ,η)之(x,y),可設想爲點序$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots\cdots,(x_n,y_n)\cdots\cdots$所組成者. 如是則$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots\cdots,(x_n,y_n)\cdots\cdots$之趨$(\xi,\eta)$,即$\sqrt{(x_n-\xi)^2+(y_n-\eta)^2}$當 $n\to\infty$ 時趨零之謂. 惟如是,苟

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\y\to\eta}} f(x,y)=l,$$

則不論(x_n,y_n)爲 R 中任何趨(ξ,η)之點序,必有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=l.$$

倒論之,苟

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=l,$$

其中(x_n,y_n)爲 R 中任何趨(ξ,η)之點序,則$f(x,y)$在 $x\to\xi$ 及 $y\to\eta$ 時之必有一極限 l,亦爲必然之理. 其證與上卷 1.5.1 所述相似,故從略.

據上所述,(x,y)之趨(ξ,η)有絕對之任意性. 此事殊非必要. 吾人不妨對(x,y)在R中之趨近(ξ,η)加以限制,如令其在 R 之一分區 R' 中

變化，或沿一曲線 C 而趨近於(ξ,η)，或另組一點集，令(x,y)爲其中之點，均無不可，惟每次應有說明可矣.

2.2.3. 函數趨零之數量級

考連續性定義，所謂$f(x,y)$在(ξ,η)有連續性者，乃$f(x,y)-f(\xi,\eta)$在$x\to\xi,y\to\eta$時趨零之謂. 換言之，若以$h=x-\xi,k=y-\eta,\phi(h,k)=f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)$，其意無異謂$\phi(h,k)$當$h$及$k$趨零時趨於零也.

此種函數$\phi(h,k)$，隨其中自變數之趨零而趨零者，在本書中將數見不鮮. 細察其趨零之情形，復有數量級之可別. 吾人取

$$\rho=\sqrt{h^2+k^2}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

卽$(\xi+h,\eta+k)$與(ξ,η)之距離以資比較，立數量級之定義如次：

苟有一常數 C 存在，與 h 及 k 無涉者，當 ρ 甚小時，精言之，有一甚小之 $\delta>0$，當 $\quad 0<\sqrt{h^2+k^2}<\delta$

滿足時，有下列不等式 $\quad \left|\dfrac{\phi(h,k)}{\rho}\right|\leqq C$

成立，則$\phi(h,k)$之趨零，謂與ρ至少有同一數量級. 復次，苟$\dfrac{\phi(h,k)}{\rho}$在$\rho\to0$時趨於零，此意常以$\phi(h,k)=o(\rho)$表而出之，則謂$\phi(h,k)$趨零之數量級高於ρ. 舉例如下：

因 $\quad \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq1 \quad$ 及 $\quad \dfrac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq1$

之故，可知距離ρ沿縱橫軸部分與距離至少以同一數量級趨於零. 他如$ah+bk$（假定a,b爲常數），及$\rho\sin\dfrac{1}{\rho}$亦然. 復次，若α爲一固定數，大於1者，則ρ^α趨零之數量級大於ρ，因之得以$\rho^\alpha=o(\rho)$，$\alpha>1$表之. 又$ah^2+bhk+ck^2$（h及k之齊次多項式）趨零之數量級大於$\rho=\sqrt{h^2+k^2}$，故$ah^2+bhk+ck^2=o(\rho)$.

以上論數量級時，曾以$\rho=\sqrt{h^2+k^2}$爲比較之標準. 其實任何兩函數間均可互相比較，於是得數量級之普遍定義如下：設有$\phi(h,k)$及$\omega(h,k)$，假定$\omega(h,k)$當h及k不等於零時有確定之值，且在任何以原點爲中心之圓內，其值皆不等於零. 如是則$\phi(h,k)$與$\omega(h,k)$當

$\rho\to 0$ 時趨零之數量級至少相等，苟其有一 C 存在，足令

$$\left|\frac{\phi(h,k)}{\omega(h,k)}\right|\leqq C.$$

復次，若 $\rho\to 0$ 時，

$$\frac{\phi(h,k)}{\omega(h,k)}\to 0,$$

則 $\phi(h,k)$ 趨零之數量級大於 $\omega(h,k)$，或以符號表之，得

$$\phi(h,k)=o(\omega(h,k)).$$

例如 $ah^2+bhk+ck^2$ 與 ρ^2 至少以同一數量級趨零，蓋

$$|ah^2+bhk+ck^2|\leqq\left(|a|+\frac{1}{2}|b|+|c|\right)(h^2+k^2)$$

故也．又 $\rho=o\left(\frac{1}{|\log\rho|}\right)$，因 $\lim\limits_{\rho\to 0}(\rho\log\rho)=0$，見上卷3.7.2.

例　題

1．考下列函數在原點鄰近之特性：

$$(a)\quad x^3-3xy^2,\qquad (b)\quad x^4-6x^2y^2+y^4.$$

2．一 n 次多項式 $P(x,y)$ 之最普遍形式共含有幾個常數？

3．試證

$$ax^3+bxy^2+cx^2y+dy^3$$

在 $x=y=0$ 趨零之數量級至少與 $\rho^3=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 同．

4．一多項式

$$P=ax^2+2bxy+cy^2$$

在 $x=0,y=0$ 鄰近趨零之數量級如確與 ρ^2 相等，其條件為何如（即 $\frac{P}{\rho^2}$ 及 $\frac{\rho^2}{P}$ 皆為有界）？

5．下列函數在 $x=y=0$ 是否連續？

$$(a)\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad (b)\ \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2},\qquad (c)\ \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2+4xy+y^2},$$

$$(d)\ -\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2},\qquad (e)\ e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}},$$

$$(f)\ |x|^{y},\qquad (g)\ |x|^{\left|\frac{1}{y}\right|},\qquad {}^{*}(h)\ |y|^{|x|}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+\left|\frac{y}{x}\right|}.$$

6．試為題5中函數之連續者各求一 $\delta(\epsilon)$．

第三節 偏導數

2.3.1. 偏導數之定義

欲研討兩個自變數以上之函數，可先假定其中僅有一個自變數變化，其他皆暫時固定，如是可望由淺入深、以簡馭繁，而上卷所述理論，得逐步推廣以盡其用．如有一函數 $u=f(x,y)$，其中有兩自變數 x 及 y 者，可暫時令 y 取得一固定值如 $y=y_0=c$，從而得 $u=f(x,y_0)$，是乃一僅隨 x 而變之函數，就其幾何意義言之，爲 $u=f(x,y)$ 與平面 $y=y_0$ 相交而成之一曲線．此函數既僅隨 x 而變，自可求其在 $x=x_0$ 時之導數(苟其果能存在)，**是爲 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿 x 之偏導數**，要而言之，爲下列極限而已：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

以幾何方法闡明之，此爲曲線 $u=f(x,y_0)$，在平面 $y=y_0$ 中之斜率，卽爲曲面 $u=f(x,y)$ 沿 x 軸方向之斜率；吾人以如下符號

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h_2,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=f_x(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

表之．復次，又有所謂 $u=f(x,y)$ 對 y 在 (x_0,y_0) 之偏導數，其定義爲：

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}=f_y(x_0,y_0)=u_y(x_0,y_0)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},$$

就其幾何意義言之，爲曲面 $u=f(x,y)$ 與平面 $x=y_0$ 相交線之斜率，觀圖 2.11 及 2.12，可以瞭然．

觀上述定義中，曾假定 (x_0,y_0) 之固定．今試將此假定取消，求其在任何一點上之偏導數，則

$$u_x(x,y)=f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

$$u_y(x,y)=f_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

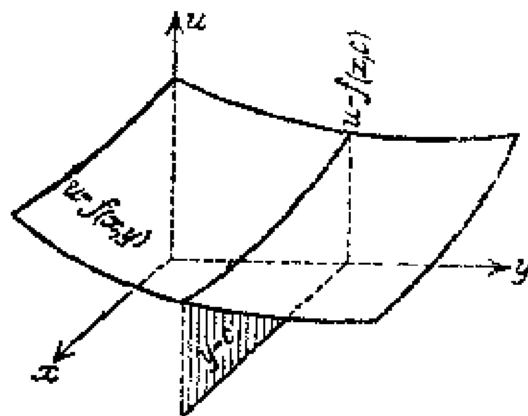


圖 2.11

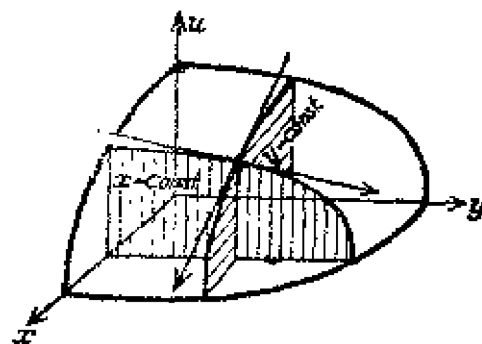


圖 2.12

均為 x 及 y 之函數矣．例如 $u=x^2+y^2$ 之偏導數為 $u_x=2x, u_y=2y$．又若 $u=x^3y$，則 $u_x=3x^2y, u_y=x^3$．

然則任何 n 個自變數之函數，其偏導數之定義亦復相同．設有 $f(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n)$，則

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)}{\partial x_1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,x_2,\cdots\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)}{h}$$

$$=f_{x_1}(x_1,\cdots\cdots,x_n),$$

但假定果有此極限可矣．

復次，又有所謂高重偏導數者，由再度求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 之偏導數而得之．如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy},$$

為 $f(x,y)$ 之二重偏導數；

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{xxx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=f_{yxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=f_{xxy},$$

為三重偏導數；又

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}=f_{x^n},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial y\partial x^{n-1}}=f_{yx^{n-1}},$$

為 n 重偏導數是也．

偏導數之義，已如上述；至如何求之之法，可不加以深論．蓋如欲求一函數對某自變數之偏導數，當假定僅此自變數為變，其他自變數均為固定，故仍可應用上卷所述求導數之法也．略舉數例於次：

［例一］　設 $f(x,y)=x\cdot y$，則　$f_x=y$，　$f_y=x$；　$f_{xx}=0$，　$f_{xy}=f_{yx}=1$，　$f_{yy}=0$．

［例二］　設 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，則 $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$．由是可見自原點直達 (x,y) 之矢量 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，觀其對 x 及 y 之偏導數，實等於其與正橫軸所成角之餘弦 $\cos\varphi=\frac{x}{r}$ 及正弦 $\sin\varphi=\frac{y}{r}$ 也．更求其高重導數，則有

$$f_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\frac{\sin^2\varphi}{r},$$

$$f_{xy}=f_{yx}=-\frac{xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r},$$

$$f_{yy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\frac{\cos^2\varphi}{r}.$$

［例三］　設 $f(x,y)=e^{xy}$，則 $f_x=ye^{xy}$，$f_y=xe^{xy}$；$f_{xx}=y^2e^{xy}$，$f_{xy}=f_{yx}=(xy+1)e^{xy}$，$f_{yy}=x^2e^{xy}$．

［例四］　設 $f(x,y)=\sin(x+y^2)+\sqrt{x}$，則 $f_x=\cos(x+y^2)+\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f_y=2y\cos(x+y^2)$；又 $f_{xx}=-\sin(x+y^2)-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，

$$f_{xy}=f_{yx}=-2y\sin(x+y^2),$$

$$f_{yy}=2\cos(x+y^2)-4y^2\sin(x+y^2).$$

［例五］　若 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{r}$，

則

$$f_x=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{r^3},$$

$$f_y=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{y}{r^3},$$

$$f_z=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{z}{r^3}.$$

又 $$f_{xx}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\quad f_{yy}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad f_{zz}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{3xy}{r^5},\qquad f_{yz}=f_{zy}=\frac{3yz}{r^5},\qquad f_{zx}=f_{xz}=\frac{3zx}{r^5}.$$

由是可知 $f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 必滿足下列方程式:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0,$$

此函數見於 Newton 之重力理論.

所當注意者,函數之果有偏導數與否,爲其重要性質之一. 函數之連續者,其偏導數未必因而存在. 惟就實際上常見之各種函數言之,其偏導數除在特殊之點外皆能存在也.

2.3.2. 函數之連續性與偏導數之存在

據上卷 2.2.4 所論,凡一個自變數之函數,苟其在某點之導數果能存在,則在此點上必爲連續. 至於兩自變數之函數,其情形卽未必如是. 例如 $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $u(0,0)=0$, 其偏導數固處處存在,惟其在原點之不連續,前已詳言之矣. 試推原其所以然之故,當爲偏導數之存在,僅對於其函數沿縱橫軸之變化有所限制,至其沿其他方向之變化情形,固未能發生影響也. 雖然,苟其存在之偏導數更有有涯性者,則其函數之連續性爲必然結果;此由下列定理可以見之:

苟 $f(x,y)$ 在域區 R 中處處有偏導數 f_x 及 f_y, 且其偏導數之值無論如何不能超過一與 x 及 y 無涉之涯 M, 卽

$$|f_x(x,y)|<M,\qquad |f_y(x,y)|<M,$$

則 $f(x,y)$ 在 R 中必在在連續.

欲證此,可假定 (x,y) 及 $(x+h,y+k)$ 爲 R 中任何兩點,又將此兩點分別與 $(x+h,y)$ 連接,其連接線段完全居於 R 之中. 此在 (x,y) 爲 R 之

內點，又$(x+h,y+k)$與(x,y)相當接近時自必可能．於是一考

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=[f(x+h,y+k)-f(x+h,y)]$$
$$+[f(x+h,y)-f(x,y)],$$

見右方前一括弧中兩項僅 y 之值相異，後一括弧中兩項僅 x 之值相異，故前者可視為 y 之函數，後者可視為 x 之函數，然後應用中值定理，得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)=kf_y(x+h,y+\theta_1 k)+hf_x(x+\theta_2 h,y),$$

其中 θ_1 及 θ_2 為小於 1 之正分數．惟據前所假定，f_x 及 f_y 之絕對值均不能超過M，因之遂有

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)|\leqq M(|h|+|k|),$$

故當 h 及 k 趨小時，此式之左方亦隨之而趨小，是即所欲證之連續性．

2.3.3. 求偏導數之程序

觀 2.3.1 所舉諸例中，有一甚可注意之事，即 $f_{xy}=f_{yx}$，換言之，將$f(x,y)$先對 x，後對 y，求偏導數，其結果與先對 y，後對 x 求之，無異．此事是否為一偶然現象，或為一普遍定理之必然結果？吾人於下列定理中可以知之：

苟 $f(x,y)$之偏導數 f_{xy} 及 f_{yx} 在變區 R 中有連續性，則

$$f_{xy}=f_{yx}$$

在 R 之內必能成立，換言之，求偏導數之程序對於結果不生影響． 此理之證明，根據於上卷所述之中值定理．試任擇四點如(x,y)，$(x+h,y)$，$(x,y+k)$及$(x+h,y+k)$；苟假定(x,y)為R中之一點，h及k相當小，則此四點皆居於 R 之中．觀

$$A=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

復令　　$$\phi(x)=f(x,y+k)-f(x,y),$$

視其中 x 為變數，y 為輔變數，則 A 可寫如

$$A=\phi(x+h)-\phi(x);$$

由是應用中值定理，得

$$A=h\phi'(x+\theta h);$$

其中 θ 爲介於 0 及 1 之一數．惟據 $\phi(x)$ 之定義，知

$$\phi'(x)=f_x(x,y+k)-f_x(x,y);$$

復因 f_{yx} 存在之假定，得再度應用中値定理，從而得知

$$A=hkf_{yx}(x+\theta h,y+\theta' k),$$

其中 θ 及 θ' 均爲介於 0 及 1 之間者．據同理，吾人亦可應用

$$\psi(y)=f(x+h,y)-f(x,y),$$

將 A 表達如

$$A=\psi(y+k)-\psi(y),$$

從而得

$$A=hkf_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta'_1 k),\quad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_1'<1.$$

循是以觀，乃知

$$f_{yx}(x+\theta h,y+\theta' k)=f_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_1' k).$$

於是在 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 處處連續之假定下，令 $h\to 0$，$k\to 0$，卽得吾人欲證之理．

玆特舉一例以明之．倘此定理所假定者未能成立，卽 f_{xy} 及 f_{yx} 未能連續，則兩者未必相等．例如 $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，$f(0,0)=0$，其二進偏導數在原點雖存在而未有連續性．試將

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-y,$$

$$f_y(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=x,$$

由是知　　$f_{yx}(0,0)=-1,\qquad f_{xy}(0,0)=+1,$

彼此實不相等，其原因實由於 f_{xy} 在原點之不連續也．

事雖如此，上述定理未始不可在較寬之假定下證明之．試就 f_{xy} 及 f_{yx} 中之一假定其存在及連續性；如僅假定 f_{yx} 之存在及連續，欲證之理已得成立．何以言之．蓋將

$$A=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

以 hk 除之，然後僅令 k 趨零，則有

$$\lim_{k\to 0}\frac{A}{kh}=\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}.$$

又在 f_{yx} 存在之假定下，據前所證，已知

$$\frac{A}{hk}=f_{yx}(x+\theta h,y+\theta' k).$$

復據 f_{yx} 之連續性，可知不論 $\epsilon>0$ 如何小，必有相當小之 h 及 k 足致

$$f_{yx}(x,y)-\epsilon<f_{yx}(x+\theta h,y+\theta' k)<f_{yx}(x,y)+\epsilon;$$

由是得

$$f_{yx}(x,y)-\epsilon\leqq\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}\leqq f_{yx}(x,y)+\epsilon$$

或
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}=f_{yx}(x,y),$$

是即
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

之謂. 自此理成立之後，可能之高重偏導數爲數將隨之而大減，讀者可自思得之，無待贅矣.

例 題

1. 三個自變數之函數共有幾個 n 重偏導數?

2. 證 $f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=\dfrac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)^{(n-2)/2}}$

必滿足如下方程式 $\quad f_{x_1x_1}+f_{x_2x_2}+\cdots\cdots+f_{x_nx_n}=0.$

3. 計算

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{vmatrix}a+x & b & c\\ d & e+x & f\\ g & h & k+x\end{vmatrix}.$$

4. 證

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\begin{vmatrix}f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)\\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y)\\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x)\\ g_1'(y) & g_2'(y) & g_3'(y)\\ h_1'(z) & h_2'(z) & h_3'(z)\end{vmatrix}.$$

5. 以

$D=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{vmatrix}$ 爲九個變數 $a,b,\cdots\cdots,k$ 之函數，證

(a) $aD_a+bD_b+cD_c=D,$

*(b) $\begin{vmatrix}D_a & D_b & D_c\\ D_d & D_e & D_f\\ D_g & D_h & D_k\end{vmatrix}=D^2$

第四節 全微分及其幾何意義

2.4.1. 論可導性

據上卷 2.2.7 所論，導數之存在與否與一其他問題有密切之關係，問題無他，將一函數 $\eta=f(\xi)$ 在 x 點鄰近由一直線性函數 $\eta=\phi(\xi)$:

$$\phi(\xi)=f(x)+(\xi-x)f'(x)$$

近似表達之耳.由幾何學言之，此直線性函數實爲曲線 $\eta=f(\xi)$ 在 P 點上(其坐標爲 $\xi=x, \eta=f(x)$ 者)之切線；其與 $f(\xi)$ 在 P 點鄰近相差之數量級高於 $h=\xi-x$. 因此遂有

$$f(\xi)-\phi(\xi)=f(\xi)-f(x)-(\xi-x)f'(x)=o(h),$$

或
$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)=o(h)=\epsilon h,$$

其中 ϵ 爲隨 $h\to 0$ 而趨零之一數.考 $hf'(x)$ 旣可用以近似表達 $f(x)$ 當 x 有 h 變量時因而產生之變量，吾人卽稱之爲 $f(x)$ 之微分，並以如下符號
$$dy=df(x)=hy'=hf'(x)$$

表之(或以 $dy=y'dx$ 表之，因就函數 $y=x$ 言之，其微分爲 $dy=dx=1\cdot h$ 故也). 循是以觀，此微分實爲 x 及 h 兩變數之函數，惟 h 相當小時，$hf'(x)$ 與 $f(x)$ 之變量卽 $f(x+h)-f(x)$ 相差甚微耳.

以上乃根據導數以論微分.試倒論之，其理固可互相溝通者. 設要求一函數 $\eta=f(\xi)$ 在 P 點鄰近得由一直線函數近似表達，使彼此相差之趨零，其數量級高於 h，其意卽無異要求 $f(\xi)$ 在 $\xi=x$ 點上有一數 A 存在，僅隨 x 而變，不因 h 而異者，滿足

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h)=Ah+\epsilon h,$$

其中 ϵ 爲隨 h 而趨零之一數. 苟此條件果能成立，則 $f(x)$ 在 x 必有可導性，而 A 卽爲 $f(x)$ 在 x 之導數 $f'(x)$，蓋將上述條件寫如

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+\epsilon,$$

然後令 h 趨零卽可見之. 由是以論，函數之可導性與其由一直線函數之近似表達，在性質上言之，完全相等也.

細觀上述之義，可知 $A+\epsilon=\alpha(x,h)$ 爲 h 之一函數，因 $h\to 0$ 而趨於 $A(x)$ 者．惟如是，所謂 $f(x)$ 在 x 點之可導性，其義無他，乃

$$f(x+h)-f(x)=h\alpha(x,h)$$

之謂，其中 $\alpha(x,h)$ 視爲 h 之函數，在 $h=0$ 有連續性者．

明乎是，吾人得推其義以論兩個自變數之函數．設有 $u=f(x,y)$，苟其在 (x,y) 點鄰近得由一直線函數近似表達如

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+Ah+Bk+\epsilon_1 h+\epsilon_2 k,$$

其中 A 及 B 與 h 及 k 之變無關，而 ϵ_1 及 ϵ_2 隨 $h\to 0, k\to 0$ 而趨零者．換言之，苟 $f(x,y)$ 在 $(x+h, y+k)$ 點之値卽 $f(x+h, y+k)$ 與 $f(x,y)+Ah+Bk$ 相差之數量級高於 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ 者，則 $f(x,y)$ 在 (x,y) 謂有**可導性**．在上述可導性之假定下，$f(x,y)$ 對 x 及 y 之偏導數

$$f_x=A,\quad f_y=B$$

均有可求；試令上式中 $k=0$，將全式除以 h，則有

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=A+\epsilon_1,$$

然後令 $h\to 0$，則 ϵ_1 隨之而趨於 0，於是得 $f_x=A$．據同理，可以證 $f_y=B$．

倒而論之，苟假定 $f(x,y)$ 在某點上有連續之初重偏導數，則其可導性之存在，換言之，得由一直線函數近似表達之可能性乃爲理所必至．何以言之．試將

$$\Delta u=f(x+h,y+k)-f(x,y)$$

寫如

$$\Delta u=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]+[f(x,y+k)-f(x,y)],$$

然後應用中値定理，卽得

$$\Delta u=hf_x(x+\theta_1 h,y+k)+kf_y(x,y+\theta_2 k).$$

吾人旣假定 f_x 及 f_y 在 (x,y) 之連續，則必有

$$f_x(x+\theta_1 h,y+k)=f_x(x,y)+\epsilon_1$$

及

$$f_y(x,y+\theta_2 k)=f_y(x,y)+\epsilon_2.$$

其中 ϵ_1 及 ϵ_2 自隨 $h\to 0$ 及 $k\to 0$ 而趨於零者.因此之故,遂得

$$\Delta u = hf_x(x,y)+kf_y(x,y)+\epsilon_1 h+\epsilon_2 k$$
$$= hf_x(x,y)+kf_y(x,y)+o(\sqrt{h^2+k^2}),$$

是即欲證之理①. 此種函數,其初重導數有連續性者,常稱之爲連續可導;其二重導數亦連續者,稱之爲二重連續可導,餘類推.

至如何推廣上述之理以論兩個以上自變數之函數,讀者可自思得之,無待贅矣.

2.4.2. 沿某方向求導數

可導函數之義,已如上述. 凡函數之可導者,不僅沿 x 及 y 軸可求偏導數,其沿任何方向之偏導數亦無不存在.所謂 $f(x,y)$ 沿方向 α 之導數,其義如下:

試令 $(x+h,y+k)$ 趨向 (x,y) 近; 又假定其趨近之途程,爲一經過 (x,y) 之直線,與正 x 軸成 α 之角度者.換言之,假定 h 及 k 之趨零,非各自獨立進行,其間始終有

$$h=\rho\cos\alpha \quad 及 \quad k=\rho\sin\alpha$$

關係成立者(ρ 爲 $\sqrt{h^2+k^2}$ 之意, 即 $(x+h,y+k)$ 與 (x,y) 相去之距離,當 h 及 k 趨零時自隨之而趨於零).如是試一考

$$D_{(\alpha)}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\sin\alpha)-f(x,y)}{\rho},$$

苟此極限果能存在,即稱之爲 $f(x,y)$ 在 (x,y) 沿方向 α 之導數.若其中 $\alpha=0$,則 $k=0,h=\rho$, 是即沿 x 軸之偏導數;若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,則 $h=0,k=\rho$,即爲沿 y 軸之偏導數.

茲欲證明者,苟 $f(x,y)$ 有可導性,換言之,苟

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x+kf_y+\epsilon\rho$$
$$=\rho(f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha+\epsilon),$$

則其中 ϵ 隨 ρ 而趨於零,故 $f(x,y)$ 沿方向 α 之導數

①苟吾人僅假定 f_x 及 f_y 之存在,而不假定其連續,則上述之可導性未必成立,此不可不注意者.

$$D_{(\alpha)}f(x,y)=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha,$$

實由 f_x 及 f_y 聯合而成，其存在自無疑義．此結果在 f_x 及 f_y 存在而又在(x,y)連續之假定下亦必成立，可以斷言．

例如 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，是為由原點直達(x,y)之矢徑，其偏導數為

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad r_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\theta,$$

其中 θ 為此矢徑與 x 軸所成之角，因此 r 沿方向 α 之導數必為

$$D_{(\alpha)}r=r_x\cos\alpha+r_y\sin\alpha=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\cos(\theta-\alpha).$$

由是知 α 所示方向如與 r 之方向相同，則此導數之值為1，若 α 所示方向垂直於 r，則其值為零．

又 x 沿矢徑之導數為 $D_{(\theta)}x=\cos\theta$，沿 y 之導數為 $D_{(\theta)}y=\sin\theta$．復次，$D_{(\theta+\frac{\pi}{2})}x=-\sin\theta$，$D_{(\theta+\frac{\pi}{2})}y=\cos\theta$，其理至顯，無待縷述．

既明上述之理，設以$\frac{\partial f(x,y)}{\partial r}$表 $f(x,y)$ 沿矢徑 r 之導數，則必有

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},$$

而任何可導函數均可代入其中也．

茲欲申述者，吾人欲求 $f(x,y)$沿方向 α 之導數，令 $Q(x+h,y+k)$ 趨向 $P(x,y)$，如不沿一直線趨近而沿一任何曲線，其在 P 點之方向為 α 者趨近之，則其結果與前無異．蓋假定直線 $\overline{PQ}$ 之方向為 β，則$h=\rho\cos\beta, k=\rho\sin\beta$，於是上述證明中所有 α，應各以 β 替代之；惟因 $\rho\to 0$ 時 $\beta\to\alpha$ 之故，最後仍得上述結果，可斷言也．

至於兩個以上自變數之函數如 $f(x,y,z)$，苟其有可導性者亦可沿任何方向求其導數．設有(x,y,z)及$(x+h,y+k,z+l)$兩點，以一直線連接之，其方向與坐標軸所成之角分別為 α,β,γ，於是

$$h=\rho\cos\alpha,\quad k=\rho\cos\beta,\quad l=\rho\cos\gamma;$$

如是則 $f(x,y,z)$ 沿此方向之導數必為

$$f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma.$$

2.4.3. 求導數在幾何學上之意義

上述之理，得由幾何學之立場闡明之．設將 $u=f(x,y)$標繪而得一

曲面，復作一平面垂直於 xy 平面、平行於 xu 平面者與之相交，則兩者相交線之斜率卽為 $f(x,y)$ 沿 x 軸之偏導數，前已詳言之矣．惟如是，則其沿方向 α 之導數論其幾何意義必為一曲線之斜率，而此曲線乃為 $f(x,y)$ 與一平面垂直於 xy 平面又與 x 軸成 α 之角度者相交而成．據 $D_{(\alpha)}f(x,y)=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$，任何此種曲線之經過 (x,y,u) 者，不論 α 之值為何，其在 (x,y) 所作切線之斜率皆可由其中兩切線之斜率，卽 f_x 及 f_y，以推知之．

任何函數 $\zeta=f(\xi,\eta)$ 之可導者既得在 (x,y) 鄰近由一直線性函數近似表達如：

$$f(\xi,\eta)=f(x,y)+(\xi-x)f_x+(\eta-y)f_y,$$

考此直線性函數實表達一平面，故此常稱之為**切面**[1]，與平面中切線之於曲線，彼此關係，正復相似．此直線性函數與 $f(\xi,\eta)$ 之差在 $\xi-x=h$ 及 $\eta-y=k$ 趨零時亦趨於零，且其趨零之數量級高於 $\sqrt{h^2+k^2}$．由幾何觀點言之，試作一平面垂直於 xy 平面，觀其與 $u=f(x,y)$ 及上述切面

$$\zeta-u=(\xi-x)f_x+(\eta-y)f_y$$

相交處之關係；可知其與此切面相交處為一直線，而此直線實為其與 $u=f(x,y)$ 所交曲線之切線．凡此種切線之經過 (x,y,u) 者無不居此切面之中，此切面之名所由來也．

以上論可導性之幾何意義．考可導性之條件，必其函數之偏導數有連續性而後可，苟 f_x 及 f_y 僅能存在而不連續，卽不足以保障其可導性之成立，此與前論一個自變數時顯然有不同，不可不注意及之．試假定 f_x 及 f_y 在某點失其連續性，則 $f(x,y)$ 之切面在此未必可作，換言之，$f(x+h,y+k)$ 與直線性函數 $f(x,y)+hf_x(x,y)+kf_y(x,y)$ 之差未必能以高於 $\sqrt{h^2+k^2}$ 之數量級趨零，觀於下例，更可瞭然．

例如 $f(x,y)=0$ 當 $x=0$，或 $y=0$；

$f(x,y)=|x|$ 當 $x-y=0$，或 $x+y=0$，

(1) tangent plane to the surface, Tangentialebene

等 $x-y=0$ 及 $x+y=0$ 之間，[illegible]平面所成。[illegible]其圖形爲[illegible]形之平面，在 $x=0$，$y=0$，$y=x$，$y=-x$ 諸線[illegible]形之[illegible]面在原點上自無切面可作，蓋其偏導數 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ [illegible]，[illegible]其沿稜邊之偏導數，欲求其存在而不可得矣①

2.4.4 函數之全微分

考 $u=f(x,y)$ 在 x 有 h 之變，y 有 k 之變時，因而引起之變量 Δu 要爲兩者之差

$$\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k$$

以高於 $\sqrt{h^2+k^2}$ 之數量級趨近於零，[illegible]之．惟其與 Δu 相差無幾，吾人乃按照前例，以 du [illegible]之．

$$du=df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

並稱之爲 u 之微分；因其中有兩自變數之故，亦稱之爲**全微分**[1]．此全微分自爲 x,y,h,k 之函數，故爲四個自變數之函數，而 h 及 k，即 dx 及 dy 既爲自變數之微分，亦常以自變微分稱之．所當注意者，所謂微

---

①他如 $u=f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $x^2+y^2\neq0$，$u=0$ 在 $x=0$，$y=0$，其情形亦復相似．試用圓坐標，則此函數之形式爲

$$u=\frac{r}{2}\sin 2\theta.$$

考其沿 x 及 y 軸之偏導數在原點鄰近處處存在，且在原點之值爲零．惟在原點上顯無連續性可言．觀

$$u_x=y\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\right]=\frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3};$$

可見 u_x 當吾人沿 x 軸趨向原點時，其值爲零，沿 y 軸趨近原點時，其值爲 1．於是知此函數在原點無可導性，即無切面之可作．蓋其切面因 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ 之故當爲 $u=0$；然在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 之時，$\sin 2\theta=1$，從而得 $u=\frac{r}{2}$，惟如是，$f(x,y)$ 與此平面在此之相差不能以高於 r 之數量級趨零，故不能爲其切面，昭然無疑矣．

(1) total differential; das vollständige Differential einer Funktion;

分，絕非"無限小之數量"之謂．其意不過謂 du 爲 $\Delta u=f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 之近似値，其間之差更小於 $\sqrt{h^2+k^2}$，且隨 $h\to 0,k\to 0$ 而趨於零而已．應用全微分，可將各種偏導數綜合表達之，如由上述全微分之形式得知 $\frac{\partial f}{\partial y}$，但將其中 $dy=0,dx=1$ 即得．其他可以類推．惟吾人欲重加申述於此者，任何函数必有可導性而後有全微分可言，故其偏導數不僅存在，且必連續而後可也．

復次，苟 $f(x,y)$ 尙有連續之高重導数，則吾人復得求 $df(x,y)$ 之全微分，其法乃將其偏導數分別乘以 $h=dx$ 及 $k=dy$，然後相加，於是有所謂兩重全微分者如次：

$$
\begin{aligned}
d^2f=d(df)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)h+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)k\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.
\end{aligned}
$$

據同理，復有

$$
\begin{aligned}
d^3f=d(d^2f)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy\\
&\qquad+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^4f&=\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dx^4+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2\\
&\qquad+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}dx\,dy^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dy^4,
\end{aligned}
$$

由是更據數學歸納法而知

$$
\begin{aligned}
d^nf&=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+\cdots\cdots\\
&\qquad+\binom{n}{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}dx\,dy^{n-1}+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n.
\end{aligned}
$$

此式亦可寫如

$$
d^nf=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(n)}=(f_x dx+f_y dy)^{(n)},
$$

但依二項式定理展開之，須以

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+\cdots+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n$$

等替代 $f_x dx$ 及 $f_y dy$ 之積及冪所得之者.

至上述之理可以推廣於兩個以上自變數之函數，自不待言而自明。又計算全微分時，必有

$$d(fg)=fdg+gdf$$

關係成立等等，皆理所必至，無待贅述.

2.4.5. 應用於誤差之估值

就實際情形言之，應用微分，為最便於估計函數變量 $\Delta z=f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 之一法。例如以計量法計算一固體之密度，其可能誤差當為若干？令 m 表此固體在空氣中之重量，$\bar{m}$ 表其在水中之重量，於是依 Archimedes 原理，其所失去之重量為其排去水之重量。因此如用 c.g.s. 度量制，其排去水之重量必等於其體積之數值，既如是，其密度 s 當為 $s=\frac{m}{m-\bar{m}}$，其中 m 及 $\bar{m}$ 視為自變數，[illegible]之誤差，因測量 m 及 $\bar{m}$ 所不可避免之誤差而發生者約為

$$ds=\frac{\partial s}{\partial m}dm+\frac{\partial s}{\partial \bar{m}}d\bar{m},$$

因
$$\frac{\partial s}{\partial m}=-\frac{\bar{m}}{(m-\bar{m})^2}\quad 及\quad \frac{\partial s}{\partial \bar{m}}=\frac{m}{(m-\bar{m})^2}$$

之故，知為
$$ds=\frac{-\bar{m}\,dm+m\,d\bar{m}}{(m-\bar{m})^2}$$

故 s 之誤差在 dm 為負數，$d\bar{m}$ 為正數時為最大，換言之，在測定 m 過小，$\bar{m}$ 過大時，s 因而產生之誤差為最甚。如有一銅片，在空氣中之重量為 $100gm$，測量時可能之誤差為 $5mg$，又在水中之重量為 $88gm$，測量時可能之誤差為 $5mg$，則測定密度時之誤差為

$$\frac{88\cdot5\cdot10^{-3}+100\cdot5\cdot10^{-3}}{12^2}\approx 6\cdot10^{-3},$$

約為百分之一也.

第五節　疊函數及新自變數之輸入

2.5.1. 鏈導法

函數 u 隨自變數 x,y 而變之關係常以下列形式出現:

$$u=f(\xi,\eta,\cdots\cdots),$$

其中 $\xi,\eta,\cdots\cdots$ 各爲 x,y 之函數:

$$\xi=\phi(x,y),\eta=\psi(x,y),\cdots\cdots.$$

於是 $u=f(\xi,\eta,\cdots\cdots)=f(\phi(x,y),\quad\psi(x,y),\cdots\cdots)=F(x,y)$

遂稱之爲 x,y 之疊函數.

例如 $$u=e^{xy}\sin(x+y)=F(x,y)$$

可寫如疊函數形式,但令 $u=e^{\xi}\sin\eta,\quad \xi=xy,\quad \eta=x+y$

即可.又 $$u=\log(x^4+y^4)\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2-y^2}=F(x,y)$$

可寫如 $$u=\eta\arcsin\xi=f(\xi,\eta);$$

$$\xi=\sqrt{1-x^2-y^2},\qquad \eta=\log(x^4+y^4).$$

惟自變數之變區不可不注意說明.變區定,而後函數之定義得以確立.如假定 $\xi=\phi(x,y),\eta=\psi(x,y),\cdots\cdots$ 之變區爲 R; 當 x,y 在 R 中變化時,$(\xi,\eta,\cdots\cdots)$在 $\xi\eta$ 一空間中某區內變化,從而確定

$$u=f(\xi,\eta,\cdots\cdots).$$

於是 $$u=f(\phi(x,y),\psi(x,y),\cdots\cdots)=F(x,y)$$

在變區 R 內謂之確定.

如就上舉第一例言之, x,y 可在 xy 平面中任意變化, 而 $u=e^{\xi}\sin\eta$ 在 $\xi\eta$ 平面內完全確定.至第二例中之 x,y 則限於 $0<x^2+y^2\leqq1$, 其變區 R 爲一以原點爲中心,以 1 爲半徑之圓,其中心除外者.在 $|\xi|<1$ 之條件下,又 η 爲任何負數或零時,$\eta\arcsin\xi$ 自得完全確定.

疊函數之義既明,乃可建立兩重要定理如下.其一,連續函數之連續函數又爲連續.其二,可導函數之可導函數亦復可導.前者之意,將言之,無異謂 $u=f(\xi,\eta,\cdots\cdots)$**在變區 S 中如爲連續,而** $\xi=\phi(x,y),\eta=\psi(x,y),\cdots\cdots$**在 R 中亦爲連續,則疊函數 $u=F(x,y)$ 在 R 中必有連續性**.其證如次.設(x_0,y_0)爲R中之一點,$\xi,\eta\cdots\cdots$之值,與此相應者,以 $\xi_0,\eta_0,\cdots\cdots$表之,如是據所假定 u 之連續性,不論 ϵ 爲如何小之正數,必有相當小之 δ 存在,當

$$|\xi-\xi_0|<\delta,\quad |\eta-\eta_0|<\delta,\cdots\cdots$$

時,足致 $$f(\xi,\eta,\cdots\cdots)-f(\xi_0,\eta_0,\cdots\cdots)$$

小於 ϵ. 復據 $\phi(x,y),\psi(x,y),\cdots\cdots$ 之連續性,可知必有相當小之 γ,在

$$|x-x_0|<\gamma,\quad |y-y_0|<\gamma$$

時,足使 $$|\xi-\xi_0|<\delta,\quad |\eta-\eta_0|<\delta,\cdots$$

之成立,而疊函數之連續性,於是得證矣. 復次,苟 $\xi=\phi(x,y),\eta=\psi(x,y),\cdots\cdots$**在 R 中為 x 及 y 之可導函數**,又 $f(\xi,\eta,\cdots\cdots)$**在 S 中為 $\xi,\eta,\cdots\cdots$ 之可導函數,則疊函數**

$$u=f(\phi(x,y),\psi(x,y),\cdots\cdots)=F(x,y)$$

亦必有可導性,且其沿 x 與 y 之偏導數為

$$F_x=f_\xi\phi_x+f_\eta\psi_x+\cdots\cdots,$$

$$F_y=f_\xi\phi_y+f_\eta\psi_y+\cdots\cdots.$$

或簡寫之,如

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x+\cdots\cdots,$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y+\cdots\cdots.$$

是為上卷所述鏈導法之推廣,如應用全微分符號,得寫如下列形式:

$$\begin{aligned}du&=u_x dx+u_y dy=u_\xi d\xi+u_\eta d\eta+\cdots\cdots\\&=u_\xi(\xi_x dx+\xi_y dy)+u_\eta(\eta_x dx+\eta_y dy)+\cdots\cdots\\&=(u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x+\cdots\cdots)dx+(u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y+\cdots\cdots)dy.\end{aligned}$$

欲證其理,但以 Δx 及 Δy 表 x 及 y 之變量,於是其在 ξ 及 η 所引起之變量當為

$$\Delta\xi=\phi_x\Delta x+\phi_y\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\gamma_1\Delta y,$$

$$\Delta\eta=\psi_x\Delta x+\psi_y\Delta y+\epsilon_2\Delta x+\gamma_2\Delta y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots\cdots,\gamma_1,\gamma_2,\cdots\cdots$ 隨 Δx 及 Δy 或隨 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 而趨零者. 惟 $u=f(\xi,\eta,\cdots\cdots)$ 因 $\xi,\eta,\cdots\cdots$ 有 $\Delta\xi,\Delta\eta,\cdots\cdots$ 之變,因而產生之變量為

$$\Delta u=f_\xi\Delta\xi+f_\eta\Delta\eta+\cdots\cdots+\delta_1\Delta\xi+\delta_2\Delta\eta+\cdots\cdots,$$

其中 $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots$ 皆隨 $\Delta\xi, \Delta\eta, \cdots\cdots$ 或 $\sqrt{\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\cdots\cdots}$ 而趨於零.假定其中 $\Delta\xi, \Delta\eta, \cdots\cdots$ 之變,由於上述之 Δx 及 Δy,則

$$\Delta u = (f_\xi \phi_x + f_\eta \psi_x + \cdots\cdots)\Delta x + (f_\xi \phi_y + f_\eta \psi_y + \cdots\cdots)\Delta y$$
$$+ \epsilon \Delta x + \gamma \Delta y,$$

其中 ϵ 及 γ 為

$$\epsilon = f_\xi \epsilon_1 + f_\eta \epsilon_2 + \cdots\cdots + \phi_x \delta_1 + \psi_x \delta_2 + \epsilon_1 \delta_1 + \epsilon_2 \delta_2 + \cdots\cdots,$$

$$\gamma = f_\xi \gamma_1 + f_\eta \gamma_2 + \cdots\cdots + \phi_y \delta_1 + \psi_y \delta_2 + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \cdots\cdots.$$

觀此式中列於右方之各項無不含有 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \delta_1, \delta_2, \cdots\cdots$ 諸數中之一,故 $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ 時, ϵ 及 γ 之必趨於零,為理所必至,而欲證之理,卽在於是矣.

細考上述之理,自與自變數 $x, y, \cdots\cdots$ 之個數無關.苟 $\xi, \eta, \cdots\cdots$ 僅隨 x 而變,則 u 為 x 之疊函數,上述之理依然有效也.又吾人如欲求索高重偏導數,但將上列結果中之 $f_\xi, f_\eta, \cdots\cdots$ 等視為疊函數,再求偏導卽可.試假定 u 為 ξ, η, ζ 三個變數之函數, ξ, η, ζ 為 x, y 之函數,則有

$$u_{xx} = f_{\xi\xi}\xi_x^2 + f_{\eta\eta}\eta_x^2 + f_{\zeta\zeta}\zeta_x^2 + 2f_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2f_{\eta\zeta}\eta_x\zeta_x$$
$$+ 2f_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + f_\xi\xi_{xx} + f_\eta\eta_{xx} + f_\zeta\zeta_{xx},$$

$$u_{xy} = f_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + f_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + f_{\zeta\zeta}\zeta_x\zeta_y + \cdots\cdots,$$

$$u_{yy} = f_{\xi\xi}\xi_y^2 + f_{\eta\eta}\eta_y^2 + f_{\zeta\zeta}\zeta_y^2 + 2f_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + 2f_{\eta\zeta}\eta_y\zeta_y + \cdots\cdots$$

2.5.2. 舉例

茲略舉數例於後,以見鏈導法之用.

［例一］ 設有 $u = e^{x^2\sin^2 y + 2xy\sin x\sin y + y^2}$.

試令 $\xi = x^2\sin^2 y,\quad \eta = 2xy\sin x\sin y,\quad \zeta = y^2,$

則 $\xi_x = 2x\sin^2 y,\quad \eta_x = 2y\sin x\sin y + 2xy\sin y\cos x,\quad \zeta_x = 0;$

$\xi_y = 2x^2\sin y\cos y,\quad \eta_y = 2x\sin x\sin y + 2xy\sin x\cos y,\quad \zeta_y = 2y;$

$u_\xi = u_\eta = u_\zeta = e^{\xi+\eta+\zeta}.$

於是 $u_x = 2e^{x^2\sin^2 y + 2xy\sin x\sin y + y^2}(x\sin^2 y + y\sin x\sin y + xy\cos x\sin y),$

$u_y = 2e^{x^2\sin^2 y + 2xy\sin x\sin y + y^2}(x^2\sin y\cos y + x\sin x\sin y + xy\sin x\cos y + y).$

［例二］ 設有　　$u=\sin(x^2+y^2)$

試令 $\xi=x^2+y^2$，則　　$u_x=2x\cos(x^2+y^2),\quad u_y=2y\cos(x^2+y^2)$,

$$u_{xx}=-4x^2\sin(x^2+y^2)+2\cos(x^2+y^2),$$

$$u_{xy}=-4xy\sin(x^2+y^2),$$

$$u_{yy}=-4y^2\sin(x^2+y^2)+2\cos(x^2+y^2).$$

［例三］ 設　　$u=\arctan(x^2+xy+y^2)$,

令　$\xi=x^2$,　$\eta=xy$,　$\zeta=y^2$，則

$$u_x=\frac{2x+y}{1+(x^2+xy+y^2)^2},$$

$$u_y=\frac{x+2y}{1+(x^2+xy+y^2)^2}.$$

2.5.3. 自變數之更換

用鏈導法以求一般函數之偏導數，在更換自變數時應用甚廣. 設有一函數 $u=f(\xi,\eta)$，其中 ξ、η 姑擬為 $\xi\eta$ 平面中之垂直坐標. 苟將坐標軸轉移如

$$\xi=\alpha_1x+\beta_1y,\qquad x=\alpha_1\xi+\alpha_2\eta,$$

$$\eta=\alpha_2x+\beta_2y,\qquad y=\beta_1\xi+\beta_2\eta,$$

則 $u=f(\xi,\eta)$ 即轉為 x 及 y 之函數： $u=f(\xi,\eta)=F(x,y)$. 以此為 x 及 y 之經函數，應用鏈導法，得其沿 x 及 y 之偏導數如

$$u_x=u_\xi\alpha_1+u_\eta\alpha_2,$$

$$u_y=u_\xi\beta_1+u_\eta\beta_2,$$

其中 u_x 及 u_y 為 $F(x,y)$ 沿 x 及 y 之偏導數，而 u_ξ 及 u_η 為 $u=f(\xi,\eta)$ 沿 ξ 及 η 之偏導數. 由是以觀，當更換自變數或將坐標軸轉動時，欲求索偏導數，皆可應用此法也.

例如垂直坐標 (x,y) 與圓坐標 (r,θ) 間之關係為

$$x=r\cos\theta,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$y=r\sin\theta\qquad \theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因此之故，若以 r,θ 代替 x,y，則

$$u=f(x,y)=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=g(r,\theta),$$

故可視 u 為 r,θ 之疊函數,按鏈導法,遂得

$$u_x=u_r r_x+u_\theta\theta_x=u_r\frac{x}{r}-u_\theta\frac{y}{r^2}=u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r},$$

$$u_y=u_r r_y+u_\theta\theta_y=u_r\frac{y}{r}+u_\theta\frac{x}{r^2}=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r},$$

由是得下列關係:

$$u_x^2+u_y^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2,$$

在應用上殊見重要.試更用鏈導法以求其二重偏導數,則為

$$u_{xx}=u_{rr}\cos^2\theta+u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2}-2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}+u_r\frac{\sin^2\theta}{r}+2u_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2},$$

$$u_{xy}=u_{yx}=u_{rr}\cos\theta\sin\theta-u_{\theta\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}+u_{r\theta}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}$$

$$+u_\theta\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2}-u_r\frac{\sin\theta\cos\theta}{r},$$

$$u_{yy}=u_{rr}\sin^2\theta+u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2}+2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}+u_r\frac{\cos^2\theta}{r}-2u_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}.$$

由是得

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+u_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}+u_r\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right].$$

此式在討論勢函數方程式時將再見之(本卷第六章).細觀

$$u_r=u_x\frac{x}{r}+u_y\frac{y}{r}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$$

$$u_\theta=-u_x y+u_y x=-u_x r\sin\theta+u_y r\cos\theta,$$

其意乃將 u_r 及 u_θ 由 u_x 及 u_y 表而出之,前者實為 $f(x,y)$ 沿矢徑之導數,前在 2.4.2 中固已論及之矣.

例 題

1. 證 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在 (x_0,y_0,z_0) 之切面為 $axx_0+byy_0+czz_0=1$.

2. 若 $u=u(x,y)$ 為一錐體之方程式,則

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0.$$

3. 若 $f(x)$ 為一連續函數,其初重導數亦連續,則

$$g(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x & 1\\ f(x_1) & x_1 & 1\\ f(x_2) & x_2 & 1\end{vmatrix}$$

之導數在 x_1 及 x_2 間一點必等於零

4. 設 $f(x,y,z)$ 爲一僅隨 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 而變之函數，$f(x,y,z)=g(r)$，

(a) 計算 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ [illegible]

(b) 若 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ [illegible] 式中 a 及 b 爲兩常數

5. 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$ [illegible]，試計算

[illegible]

*6. 將 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ 藉 [illegible] 與 r,θ,φ 間之關係

[illegible]

[illegible]

[illegible]

而轉換之

7. 證 $f_{xx}+f_{yy}$ [illegible]

8. 設 [illegible]

[illegible]

試證 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ 轉換於 ξ,η 之法則與下列多項式

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

中係數 a,b,c 之轉換相同

第六節　中值定理與 Taylor 定理

2.6.1.　中值定理

前在上卷 6.2.2，已論及函數展開爲 Taylor 級數之可能性；凡函數之 n 重可導者得在其點鄰近由一 n 次之 Taylor 多項式近似替代之，其間之相差以高於 n 之數量級趨近於零；至於用一直線函數逼近之說，特此事之初步而已．茲推廣其意以論兩自變數之函數，設法求其初步接近之成功，令 $f(x+h,y+k)$ 以一隨 h 及 k 而變之一多項式近似替代之．

此問題可歸併於前已解決之問題．試以 t 表一變數，就下列函數細觀之：

$$F(t)=f(x+ht,y+kt),$$

令其中 x,y,h,k 暫時固定，則當 t 在 0 與 1 之間變化時，其點自在連接 (x,y) 及 $(x+h,y+k)$ 之線段上變動. 於是 $F(t)$ 對 t 之導數，可應用鏈導法以求得之. 吾人所欲建立之中值定理，其用意不過欲在 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 與 f_x, f_y 之間求得一關係；假定 f_x 及 f_y 在規定變區中處處連續，然後應用上卷 2.2.6 中所立之中值定理於 $F(t)$，則

$$\frac{F(t)-F(0)}{t}=F'(\theta t),$$

其中 θ 為介於 0 及 1 間之一數. 惟如是，遂得

$$\frac{f(x+ht,y+kt)-f(x,y)}{t}=hf_x(x+\theta ht,y+\theta kt)$$
$$+kf_y(x+\theta ht,y+\theta kt).$$

令其中 $t=1$，則有

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)-f(x,y)&\\&=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)\\&=hf_x(\xi,\eta)+kf_y(\xi,\eta),\end{aligned}$$

是即欲求之中值定理，意即 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 必等於連接 $(x+h,y+k)$ 及 (x,y) 線段上一點 (ξ,η) 之全微分. 所可注意者，同一 θ 在 f_x 及 f_y 中之出現耳.

據此定理，吾人不難證明，一函數之偏導數苟在在存在且其值處處為零者必為一常數，其理甚顯，無待贅也.

2.6.2. Taylor 定理

試將上卷所述之 Lagrange 餘項式應用於 $F(t)$，復令其中 $t=1$，即可為二個自變數之函數求得一 Taylor 展開式如:

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=f(x,y)&+[hf_x(x,y)+kf_y(x,y)]\\&+\frac{1}{2!}[h^2f_{xx}(x,y)+2hkf_{xy}(x,y)+k^2f_{yy}(x,y)]\\&+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\Big[h^nf_{x^n}(x,y)+\binom{n}{1}h^{n-1}kf_{x^{n-1}y}(x,y)\\&+\cdots\cdots+k^nf_{y^n}(x,y)\Big]+R_n.\end{aligned}$$

其中 R_n 乃用以表示 n 項以後之餘項：

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(hf_x(x+\theta h,y+\theta k)\right.$$
$$\left.+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)\right)^{(n+1)},\qquad 0<\theta<1.$$

細考此定理之內容，無異謂 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 可分裂為若干齊次多項式，而此種齊次多項式，除 $\frac{1}{1!}$、$\frac{1}{2!}$、……、$\frac{1}{n!}$、$\frac{1}{(n+1)!}$ 不論外，實為 $f(x,y)$ 之初重、二重、……、n 重全微分：

$$df=hf_x+kf_y,$$

$$d^2f=(hf_x+kf_y)^{(2)}=h^2f_{x^2}+2hkf_{xy}+k^2f_{y^2},$$

……………………………………

$$d^nf=(hf_x+kf_y)^{(n)}=h^nf_{x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}kf_{x^{n-1}y}$$
$$+\cdots\cdots+k^nf_{y^n},$$

因此之故，上述 Taylor 定理得歸於較簡形式如：

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+df(x,y)+\frac{1}{2!}d^2f(x,y)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x,y)+R_n,$$

其中 R_n 為

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k),\qquad 0<\theta<1,$$

其趨零之數量級常較其居前之一項為高，簡言之，當 $h\to0$, $k\to0$ 時，可見

$$R_n=o\left[\sqrt{(h^2+k^2)^n}\right].$$

前論一個自變數之函數時，常令其 Taylor 展開式中之 $n\to\infty$，從而得展為一無盡級數．現論兩個自變數時，若欲依法行之，其事將異常繁複．吾人在此但注意 Taylor 定理中基本思想之所在，其基本思想無他，將函數變量 $f(x+h,\ y+k)-f(x,y)$ 析為若干不同數量級之全微分 $df, d^2f,$ ……而已．

例　題

1．求一兩次多項式，在原點鄰近最接近於 $\sin x\sin y$ 者．

2.若 $f(x,y)$ 爲一連續函數，並有 [illegible]

$$f_{xy}(0,0)=\lim \text{[illegible]}$$

3.試證 e^{-t^2+2xt} 可展開爲 [illegible]

[illegible]

不論 x 及 t 如何變化，皆有斂性，且

(a) $H_n(x)$ 爲一 n 次多項式 [illegible] 多項式

(b) $H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$

(c) $H_{n+1}-2xH_n+2nH_{n-1}=0$

(d) $H''_n-2xH'_n+2nH_n=0$

4.將下列函數展開爲 Taylor 級數 [illegible]

(a) [illegible]

第七節　矢量方法之應用

吾人在微積學中討論兩個以上自變數之函數，苟用矢量方法以闡明一切，則不特學理之根據，更得透澈明瞭，即表達之形式，將隨之而益覺美觀．是以本卷第二章中於說明各種基本概念之後，擬殿以矢量方法之應用．

2.7.1.　矢量場與矢量族

矢量之定義及其運算之法，前已詳言之矣．今欲討論者，非一個或數個矢量之性質，乃爲矢量之組成集團，隨一個或多於一個連續參變數而生變化者．例如空間中某區域內之每點上如各有一矢量與之相應者，此區域即呈現一矢量場[1]，其矢量部分由三個函數：

$$u_1=\phi(x_1,x_2,x_3),\quad u_2=\psi(x_1,x_2,x_3),\quad u_3=\chi(x_1,x_2,x_3)$$

完全規定之，其中 x_1,x_2,x_3 爲空間坐標．試將坐標軸在原點固定之條件下轉動而得新坐標 ξ_1,ξ_2,ξ_3 如

(1) vector field; Vektorfeld;

$$\xi_1=\alpha_1x_1+\beta_1x_2+\gamma_1x_3,$$
$$\xi_2=\alpha_2x_1+\beta_2x_2+\gamma_2x_3,$$
$$\xi_3=\alpha_3x_1+\beta_3x_2+\gamma_3x_3;$$

或

$$x_1=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3,$$
$$x_2=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3,$$
$$x_3=\gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3,$$

則 u_1,u_2,u_3 將因此而轉入 $\omega_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\omega_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\omega_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 其間關係爲

$$\omega_1=\alpha_1u_1+\beta_1u_2+\gamma_1u_3,$$
$$\omega_2=\alpha_2u_1+\beta_2u_2+\gamma_2u_3,$$
$$\omega_3=\alpha_3u_1+\beta_3u_2+\gamma_3u_3;$$

或

$$u_1=\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\alpha_3\omega_3,$$
$$u_2=\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\beta_3\omega_3,$$
$$u_3=\gamma_1\omega_1+\gamma_2\omega_2+\gamma_3\omega_3.$$

反言之,苟有三個隨空間坐標而變之函數 $u_1(x_1,x_2,x_3)$, $u_2(x_1,x_2,x_3)$, $u_3(x_1,x_2,x_3)$, 當坐標軸作一轉動時依上述規定而可代以 $\omega_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\omega_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\omega_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 者,是即謂一矢量場. 如圖 2.13 所示,即爲一矢量場,物體之處處以不變角速度轉動者得由是而表達之.

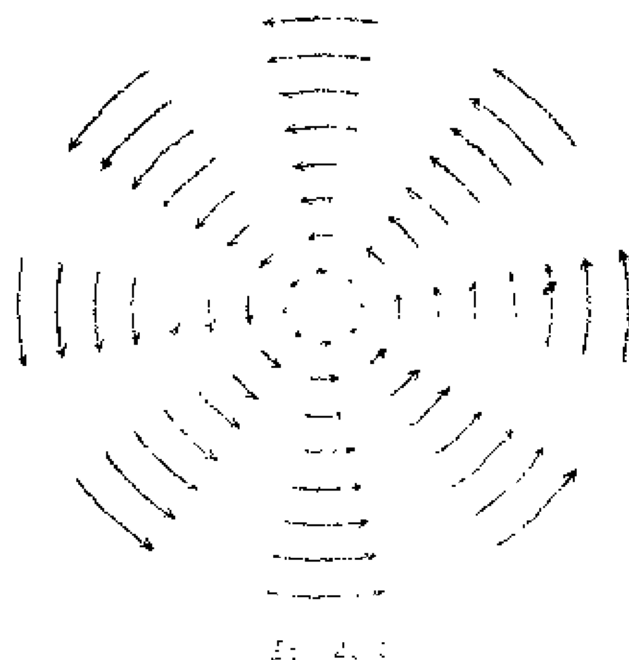


圖 2.13

復次，設空間中每一點(x_1, x_2, x_3)有一函數值 $u=f(x_1, x_2, x_3)$，與之相應（如物質在其點之密度）．假定此函數不能視爲矢量部分，其值又不隨坐標軸轉動而生變，則稱之爲標量[1]．因在每點上有一確定之 u，亦常稱之爲標量場．如任何矢量場中，矢量長之平方 $|\mathbf{u}|^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$ 實爲一標量，蓋其值不因所選坐標軸而異也．

矢量場之外，又有所謂矢量族[2]者，是乃矢量之隨一參變數 t 而變者所組合而成．如以 $\mathbf{u}$ 爲規定地位之矢量，其起點在 $u_1u_2u_3$ 空間中之原點，而其終點因一參變數 t 而描繪一曲線，則其所繪曲線可由

$$u_1=\varphi(t), \qquad u_2=\psi(t), \qquad u_3=\chi(t)$$

表而達之．此種隨 t 而變之矢量可求其對 t 之導數，其對 t 之導數，即下列極限之謂

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h},$$

苟其果能存在，則其矢量部分自爲

$$u_1'=\frac{du_1}{dt}, \; u_2'=\frac{du_2}{dt}, \; u_3'=\frac{du_3}{dt}.$$

由是以觀，凡求導數時各種法則，在此必依然有效．如由

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v},$$

可知

$$\mathbf{w}'=\mathbf{u}'+\mathbf{v}'.$$

又如 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 之內積爲 $\mathbf{uv}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$，則

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{dt}=\mathbf{uv}'+\mathbf{u}'\mathbf{v}.$$

復就其外積言之，則有

$$\frac{d[\mathbf{uv}]}{dt}=[\mathbf{uv}']+[\mathbf{u}'\mathbf{v}],$$

其理甚顯，無待贅也．

2.7.2. 矢量在曲線理論中之應用

設在 $x_1x_2x_3$ 空間中有一規定地位之矢量 $\mathbf{x}(t)$，隨一參變數 t 而

---

(1) scalar; Skalar.　(2) family of vectors; Vektorscharen.

變者，如是即有一曲線隨之而定．觀其導數 $\dot{x}(t)$，亦為一矢量，其方向與曲線在 t 時之切線正同．何則，考 $x(t+h)-x(t)$ 所示方向，實為連接 t 及 $t+h$ 兩點之直線線段，如圖 2.14，故 $\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$ 之方向亦必同此，惟如是，在 $h\to 0$ 必趨於此切線也．

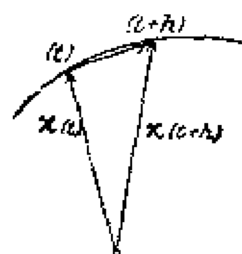


圖 2.14

苟捨 t 而改用 s，即曲線之弧長由某點起算者作參變數，則依照上卷 5.3.3 所用之法，可以知

$$\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+\dot{x}_3^{\,2}=1,$$

或

$$\dot{x}\dot{x}=\dot{x}^2=1,$$

其中 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ 上之點即用以表示其對 s 之導數．明乎此，可見矢量 $\dot{x}$ 之長實等於 1．又若將 $\dot{x}\dot{x}=1$ 更對 s 求導數，則

$$\ddot{x}\dot{x}=0.$$

由是就矢量 $\ddot{x}$ 而論，其矢量部分為 $\ddot{x}_1(s)$，$\ddot{x}_2(s)$，$\ddot{x}_3(s)$ 者，實與切線相垂直．此矢量謂之曲率矢量[1]，或稱主法矢量[2]，其長為

$$k=\frac{1}{\rho}=\sqrt{\ddot{x}_1^{\,2}+\ddot{x}_2^{\,2}+\ddot{x}_3^{\,2}},$$

謂曲線在其點上之曲率，而 $\rho=\dfrac{1}{k}$ 謂之曲率半徑．由曲線之某點沿其主法線經過如 ρ 之長而達到之點謂之其點之曲率中心．如是規定之曲率定義與上卷 5.3.4 所論者固完全一致．何以言之？考 $\dot{x}$ 既為一單位矢量，若由固定原點作 $\dot{x}(s+h)$ 及 $\dot{x}(s)$，則其差 $\dot{x}(s+h)-\dot{x}(s)$ 為一矢量，將 $\dot{x}(s)$ 之終點與 $\dot{x}(s+h)$ 之終點連接而成者，與圖 2.14 相似．惟如是，若以 α 表 $\dot{x}(s)$ 及 $\dot{x}(s+h)$ 兩矢量間之角，因兩者均為單位矢量，可知上述矢量連接此兩者之終點者，其長必為 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 無疑．故將此矢量之長除以 α，其值在 $h\to 0$ 時必趨於 1．因此遂得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big\{[\dot{x}_1(s+h)-\dot{x}_1(s)]^2+[\dot{x}_2(s+h)^2-\dot{x}_2(s)]^2+[\dot{x}_3(s+h)-\dot{x}_3(s)]^2\Big\}.$$

(1) curvature vector; Kruemmungsvektor.　(2) principal normal vector; Hauptnormalenvektor.

此式之右方在 $h\to 0$ 時所趨極限爲 $\sqrt{\ddot{x}_1^2+\ddot{x}_2^2+\ddot{x}_3^2}$，而 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha}{h}$ 即前在上卷中所定曲率之義，故前後兩定義之一致，從可識矣.

上述之曲率矢量在力學中有其極重要之應用. 設有一質點，其質量假定爲 1 者，沿一曲線 $x(t)$ 運動，其中 t 假定爲時間；如是則其速度當由 $x'(t)$ 以推知之，惟

$$x'=\dot{x}\frac{ds}{dt},$$

於是知其加速度爲

$$x''=\dot{x}\frac{d^2s}{dt^2}+\ddot{x}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

據上所述關於 $\dot{x}$ 及 $\ddot{x}$ 兩矢量之長及方向所推論之，可見此"加速度矢量"爲兩矢量相加而成者；其一之方向與切線同，其長爲 $\frac{d^2s}{dt^2}$，是即所謂切向加速度(1)，其他則直指曲率中心，其長爲曲率乘以速度之平方，是謂法向加速度(2).

2.7.3. 標量之陡度

設有一函數 $u=f(x_1,x_2,x_3)$，即所謂一標量，其中 x_1,x_2,x_3 三者爲空間坐標，則其對空間坐標之偏導數

$$u_1=f_{x_1},\quad u_2=f_{x_2},\quad u_3=f_{x_3},$$

可視爲一矢量 u 之矢量部分. 試將 x_1,x_2,x_3 坐標軸作一轉動而入於 ξ_1,ξ_2,ξ_3，則 u 對於轉動後坐標軸之矢量部分當爲

$$\omega_1=\alpha_1u_1+\beta_1u_2+\gamma_1u_3,$$

$$\omega_2=\alpha_2u_1+\beta_2u_2+\gamma_2u_3,$$

$$\omega_3=\alpha_3u_1+\beta_3u_2+\gamma_3u_3.$$

惟將 ξ_1,ξ_2,ξ_3 輸入於 $f(x_1,x_2,x_3)$ 之中，根據鏈導法必有

$$f_{\xi_1}=f_{x_1}\alpha_1+f_{x_2}\beta_1+f_{x_3}\gamma_1,$$

$$f_{\xi_2}=f_{x_1}\alpha_2+f_{x_2}\beta_2+f_{x_3}\gamma_2,$$

$$f_{\xi_3}=f_{x_1}\alpha_3+f_{x_2}\beta_3+f_{x_3}\gamma_3.$$

(1) tangential acceleration, Tangentialbeschleunigung. (2) normal acceleration; Normalbeschleunigung

由是知　　$u_1=f_{\xi_1},\quad u_2=f_{\xi_2},\quad u_3=f_{\xi_3},$

於 $\boldsymbol{u}$ 在新坐標系中之矢量部分亦為一函數之偏導數.據是以論,設在三維空間中任意規定一函數 f,必可從而definition一矢量,其在任何直角坐標系中之矢量部分為 f 沿其中坐標之偏導數.此矢量常稱之為 f 之陡度[1],並以下列符號表之

$$\boldsymbol{u}=\operatorname{grad} f.$$

欲闡明陡度之幾何意義,可先指定一方向如 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 為此方向與坐標軸所成之角,因之 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$ 得以成立者,然後沿此方向求 f 之導數,於是據前所論必有

$$D^{(\alpha)}f=f_{x_1}\cos\alpha_1+f_{x_2}\cos\alpha_2+f_{x_3}\cos\alpha_3.$$

循是以論,若以 $\boldsymbol{e}$ 表一單位矢量,其方向為 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,因之其矢量部分為 $e_1=\cos\alpha_1,e_2=\cos\alpha_2,e_3=\cos\alpha_3$ 者,則由 f 沿 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 之導數得有下列形式　　$D^{(\alpha)}f=\boldsymbol{e}\operatorname{grad}f.$

換言之,f 沿 α 之導數實為此具有 α 方向之單位矢量乘 $\operatorname{grad}f$ 之標積,故必等於 $\operatorname{grad}f$ 投於此矢量之影,可以見矣.緣此意義,可以見陡度之重要為何如.如吾人欲知 f 之增減沿何種方向為最速,當視 $D^{(\alpha)}f$ 何時得其最大或最小值而定,此無他,當 $\boldsymbol{e}$ 與 $\operatorname{grad}f$ 之方向相同時,其值最大,相反時最小.明乎是,乃知陡度 $\operatorname{grad}f$ 所示方向為 f 增益最速之方向,而與之相反之方向,f 之減損為最速;至其增減率之大小則由 $\operatorname{grad}f$ 之絕對值決定之.

復次,試在平面中觀一標量 $f(x,y)$ 之陡度.假定 $f(x,y)$ 在 xy 平面中由水準線　　$f(x,y)=c$

表達之,如是則其沿此種水準線之導數必為零.蓋以 P 及 Q 表同一水準線上之任何兩點,則 $f(P)-f(Q)=0$ 之真確,至為顯然,故若將此關係以兩點間之距離 h 除之,復令 $h\to 0$,其極限之為零如故.由是以論,苟將陡度沿水準線之切線投影,其影必為零.故在任何點上,其陡度必垂

(1) gradient of a scalar, Gradient eines Skalars.

直於水準線，可斷言矣．以上專就平面中之情形言之，至空間中之陡度，其理亦然．試將$f(x_1, x_2, x_3)$由其水準面

$$f(x_1, x_2, x_3)=c$$

表達之，可知沿任何方面之與此種水準面相切者，其陡度之矢量部分無不為零，故陡度之垂直於水準面，實理有固然者．

物理學中所見之矢量場，為一標量之陡度者，殊數見不鮮．如引力場[1]即其一例．

試以(ξ_1, ξ_2, ξ_3)表一質點之坐標，其他一質點之坐標，為此所引者，以(x_1, x_2, x_3)表之，復假定前者之質量為m，後者之質量為M，如是則其間引力部分為

$$C\frac{\xi_1-x_1}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C\frac{\xi_2-x_2}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C\frac{\xi_3-x_3}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

其中C為γmM之簡寫，而γ即所謂萬有引力恆量．（又考

$$\frac{\xi_1-x_1}{[(\xi_1-x_1)^2+\cdots\cdots]^{\frac{3}{2}}}$$

諸數，由幾何觀點言之，實為連接兩點之直線與坐標軸所成角之餘弦．）觀此，可知此引力部分實為下列函數

$$\frac{C}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}}$$

對x_1, x_2, x_3，各坐標之偏導數．由是言之，表示萬有引力之矢量，除其中一常數置之不論外，實為下列函數

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}}$$

之陡度也．

要之，苟有一力場，為一標量之陡度組成者，此標量即稱之為此力場之勢函數[2]，吾人將於第五第六兩章中討論功量及能量時更詳論之．

---

(1) gravitational field of force; das Kraftfeld der Gravitation. (2) potential function; Potential.

2.7.4. 矢量場之散度與旋量

據上所述，吾人可由一函數或一標量應用求導數之法而獲得一矢量場，即所謂陡度者是．反之，吾人將於本段中用求導數之法由一矢量場獲得一標量．所謂矢量場之散度，爲一標量，其定義如下：設有一矢量場 $\boldsymbol{u}$，其在 x 坐標系中之矢量部分爲 u_1，u_2，u_3，於是其散度，世常以 div $\boldsymbol{u}$ 表之者，爲

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

此散度之果爲一標量，當證其坐標軸轉換爲 ξ_1，ξ_2，ξ_3 時，u 在新坐標系中之矢量部分爲 ω_1，ω_2，ω_3，其散度必轉爲

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_2}+\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_3}$$

而後可．然

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_2}+\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_3}$$

之眞確，可用鏈導法以證實之．然則任何矢量場中，必有一如是之標量可造，其幾何及物理學上之意義爲何，當於第五章中詳之．

次論矢量場之旋量，是亦可用求導數法而造成之．設有一矢量 $\boldsymbol{u}$，其在 x 坐標系中之矢量部分爲 u_1，u_2，u_3；此矢量場之旋量，世常以 curl $\boldsymbol{u}$ 或 rot $\boldsymbol{u}$ 表之，爲一矢量，其在 x 坐標系之矢量部分爲

$$r_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\quad r_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\quad r_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

如是規定之旋量若果爲一矢量，當證其坐標軸轉換爲 ξ_1，ξ_2，ξ_3，又 u_1，u_2，u_3 轉爲 ω_1，ω_2，ω_3 時，其部分

$$\rho_1=\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_3},\quad \rho_2=\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_3}-\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_1},\quad \rho_3=\frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_2}$$

與 r_1，r_2，r_3 之關係，與新舊坐標間之關係必相同．此事之證明甚易，讀者可自求之．至旋量之幾何及物理上意義，亦擬留待第五章中詳論之．

陡度、散度及旋量之定義已如上述．吾人苟創一符號矢量，以

$\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ 爲其部分，世常稱之爲 nabla 並以∇表之者，則 $f(x_1, x_2, x_3)$之陡度 grad$f$ 可視爲∇乘一標量之結果，故爲一矢量，其部分爲

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

復次，矢量場 $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$之旋量 curl $\boldsymbol{u}$ 可視爲 $\boldsymbol{u}$ 及∇之外積，而$\boldsymbol{u}$之散度則爲 $\boldsymbol{u}$ 與∇之內積：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

最後吾人得據求導數之法以知陡度之旋量爲零.

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0;$$

又旋量之散度亦爲零：

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \boldsymbol{u} = 0.$$

至陡度之散度在勢函數理論中佔一極重要地位，其形式爲

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

此 div grad f 常以 Δf 表之，而Δ常稱之爲 Laplace 算號.

本節所述概念自可推廣於三個以上自變數之問題，於是有所謂 n 度空間之矢量場者. 如欲論其陡度及內積，其事甚易，至其他概念自較繁複，故不復贅述.

例　題

1. 求曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ 在任何一點 t_0 之密吻面. 按密吻面，爲一經過曲線上三點之平面當此三點無限制趨近於 t_0 點時之極限.

2. 證曲線之曲率矢量及切線矢量均在密吻面之中.

3. 設有一空間曲線 $\boldsymbol{x}(s)$，其矢量爲三重連續可導（s 爲其弧長）. 試作一球體，與此曲線在 s 點上有最密接觸而求其中心所在.

4. 若 C 爲一閉合曲線，有連續可導性，A 爲任何一點，不在 C 之上，則 C 上必有一點 B，其去 A 之距離小於其他 C 上之點. 試證 AB 必爲 C 之法線.

5. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$爲單位球面（即半徑爲 1 者）上之一曲線，試證

$$[illegible]$$

6. 若 $x = x(t)$ 爲一曲線之帶參數方程式，t 任何一時 t 之任一矢量 $\frac{d^2x}{dt^2}$，證其必在密切面之中。

7. 就一曲線上任何兩鄰點作密切面，其兩法線間之角與其間弧長之比例當弧長趨零時所趨之極限，即單位法線對 s 之導數，從而得曲線之扭率。若 $\xi_1(s)$ 爲一沿切線之單位矢量，$\xi_2(s)$ 表曲線 $x(s)$ 之曲率向量，又 $\xi_3(s)$ 爲一單位矢量，垂直於 ξ_1 及 ξ_2（所謂雙法線矢量）者，試證 Frenet 公式：

$$\xi_1' = \frac{\xi_2}{\rho},$$

$$\xi_2' = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau},$$

$$\xi_3' = -\frac{\xi_2}{\tau},$$

其中 ρ 爲曲率半徑，而 $\frac{1}{\tau}$ 爲扭率。

8. 應用題 7 中三矢量 ξ_1, ξ_2, ξ_3，以表達 $[illegible]$，自 x 點至密吻球（球與曲線在此點接觸最密者）中心之矢量。

9. 曲線之扭率爲零者爲一平面曲線。

*10. 若 $z = u(x, y)$ 爲一曲面，爲一曲線之切線所構成者，試證 (a) 曲線之任何密吻面必爲 $u(x, y)$ 之切面，(b) $u(x, y)$ 必滿足

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0.$$

11. 證
$$\text{rot rot } a = \text{grad div } a - \Delta a.$$

第二章　附錄

第一節　聚點原則及其應用

本章中所述各種概念，苟溯其最初之由來，是否發源於觀覺，實爲聚訟紛紜之問題。惟爲求推理之精密與系統之嚴整，吾人必求其基礎於純粹解析之中。前在討論一個自變數之函數時既以聚點原則爲理論之根據，今當求其廣義之說明及應用，俾爲兩個以上自變數之函數理論，

立一堅固不拔之基礎. 惟為行文之便，一切說明，均限於二個自變數，其多於兩個者，可類推，故不贅.

A2.1.1. 聚點原則

在說明聚點原則之前，當先明點及點集之義. 所謂平面(二維空間)中之點，其意無他，兩個實數(x,y)之代名詞而已. 設有無限多之數(x,y)其值均為有涯者，合組一點集，換言之，凡無限多之點，居於平面中某區域之內，即 x,y 之滿足 $|x|<C$, $|y|<C$ 者(假定 C 為一固定常數)，則所謂聚點原則，其意謂其中至少必有一聚點存在，卽至少有一點$Q(\xi,\eta)$，在其任何小之鄰近為點集中無限多之點所聚居，即不論 δ 為如何小之正數，必有無限多之(x,y)滿足

$$|x-\xi|<\delta,\quad |y-\eta|<\delta$$

者. 此(ξ,η)遂謂此點集之聚點. 所謂聚點原則，謂至少必有一如是之聚點而已.

此原則之眞確，殊覺顯而易明. 蓋此為實數連續性之必然結果，其證與上卷 A1.1.1 完全相似，故從略. 自聚點原則成立之後，微積學中各種定理乃得一根據，其最著者為 Cauchy 之審斂法，其言曰：苟一點集 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ 其坐標為 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots\cdots$ 者果向一極限收斂，其必要與充分條件無他，不論 ϵ 為任何正數，必有一 N 可求，一隨 ϵ 而異，且隨 ϵ 之趨小而趨大之 $N(\epsilon)$，凡 m 及 n 之大於 $N(\epsilon)$ 者皆足致 P_n 及 P_m 間之距離即 $\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}$ 小於 ϵ. 其證同前，亦不復贅.

A2.1.2. 點集理論中幾種重要概念

凡無限多之點合組一點集而其值皆為有涯者，吾人以有涯集稱之. 有涯集之包括其中一切聚點者，換言之，其聚點盡屬於點集之中者，其集謂有閉性，因之簡稱為閉集. 如迴合曲線或曲面上之點卽其一例. 函數之變區如為一閉集，可證其有下列特性. 其一，凡閉區之連續函數必有一最大及最小值. 其二，凡閉區中之連續函數，其連續必有勻性. 此兩定理之證明，與前相似，可不縷述.

復次，有所謂點集之直徑[1]者，其義如下．設以 P_1 及 P_2 表點集中之兩點，其間距離之最小上界即以點集之直徑稱之．苟其點集有閉性，則必有如是兩點，其間距離適與此上界相等．蓋兩點間之距離爲其點坐標之連續函數，故爲上述定理之必然結果也．根據同一理由，可以知一點 P 苟不屬於一閉集 M，則由 P 至 M 必有一最短距離存在，換言之，M中必有一點 Q，其與 P 相去之距離較 M 中任何一點爲小．

明乎此，可以見本章第一節中 2.1.1 所論變區，爲迴合曲線所圍而成者，實際上即今之所謂閉集無疑．何以言之？設 C 爲一迴合曲線，其所包圍之區域以 R 稱之；於是 R 爲平面中之點處於 C 之內及 C 之上者所組合而成．茲欲證 R 爲一閉集，當證其中一切聚點無不屬於 R 而後可．試用反證法，假定其事之反面，在反面之假定下悟其事之不可通．倘有一聚點 P，不屬於 R 者，吾人自可假定 P 不在 R 之上，如是則據前證之理，其去 C 必有一最小之正距離（C 本身爲一閉集）．於是吾人以 P 爲中心，可作一如是小之圓，使 C 上之點無一與圓相接觸，其法但取圓之半徑小於 P 及 C 間之最小距離可矣．由是以觀，P 之地位，必居 C 之外，否則將爲 R 中之一點，復因圓中任何一點可用一與 C 不相交叉之線段與 P 相連接，可見圓中任何一點無一不居 C 之外，故圓中之點無一能屬於 R．然吾人前既假定 P 爲 R 之一聚點，其圓必含有無限多 R 中之點；是與假定相抵觸而欲證之理即得之矣．至於變區之由多條迴合曲線所圍成者，亦可應用同法證其爲一閉集．

閉集有一極重要特性，可由下列定理說明之：設有閉集 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots$，**前後相隨而成一序，隨於後者皆居於前者之中，如是則必有一點 (ξ, η) 居於一切閉集之中**．其證如次．試在每一閉集 M_n 中選擇一點 P_n．此 P_n 可爲同一點之重複，或爲無限多不同點所組成之一數序．苟其爲同一點 P 之重複，則自在一切閉集之中．苟爲無限多不同之點，則據聚點原則，必有一聚點 (ξ, η) 存在．此聚點必屬於每一 M_n．蓋當

---

(1) diameter of the point set, Durchmesser der Punktmenge.

$m>n$ 時，P_m 既為 M_m 中之一點而 M_m 又含在 M_n 之中，自必屬於 M_n。故(ξ,η)必為 M_n 中 P_m 之聚點；因 M_n 為一閉集，可知(ξ,η)必屬於 M_n. 由是可見無論如何，必有一點屬於一切 M_n 之中，是即吾人欲證之理①.

復次，點集中每一點如可關一鄰（如以點為中心之圓）全屬於點集之中者，則此點集謂有開性(1)，或稱其集為開集。又點集中任何兩點 A 及 B 可由一完全處於同集中之折線相連接者，其點集謂有連性(2). 凡有開性及連性之點集常簡稱為"領域"(3). 如一閉合曲線所圍之內部或一圓之內部，將其中一半徑上之點除外，皆為領域之例. 領域之聚點，不屬於領域者，吾人以邊點(4)稱之. **凡一領域 D 之邊點 B 必自成一閉集**. 何以言之？B 之聚點 P 不能屬於 D，其故由於 D 中之點，其鄰近皆為 D 之點而無 B 之點. 然 P 實同時為 D 之聚點，蓋在 P 之任何鄰近必有 B 之點 Q，而在 Q 之任何鄰近，又必有 D 之點也. 故 P 必屬於 B; B 之為閉集，遂得證矣.

設將邊點 B 加入於領域 D 之中，即得一閉集. 如是則其中聚點苟為 B 之聚點，自必屬於 B，苟為 D 之聚點，則屬於 B 或屬於 D，故 B 與 D 必合成一閉集. 此種閉集亦稱閉域，本書中所討論變區大都如是.

最後吾人對於"鄰"之概念，擬作一精密之規定. 所謂一點 P 之鄰，乃含有 P 之一開集之謂. 如以(ξ,η)表 P 之坐標，其最常用者有所謂圓鄰，即一切點之適合

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\delta^2$$

者，復有所謂方鄰，乃一切點之滿足

$$|x-\xi|<\delta \qquad 及 \qquad |y-\eta|<\delta$$

①在此自必假定 M_n 為閉集，觀於下例可以見之. 設 M_n 為 $0<x<\frac{1}{n}$，其中隨後之集皆居於前者之中，但無一點屬於一切 M_n，蓋如 $x=0$，其點不在任何一集之中；若 $x>0$，則復不在 M_n 之滿足 $\frac{1}{n}<x$ 者.

(1) open; offen (2) connected; zusammenhängend. (3) domain; Gebiet. (4) boundary points; Randpunkte

者，其中 δ 為一相當小之正數，用以表鄰之大小者

A2.1.3. Heine-Borel 之掩蔽定理

由聚點原則可以推得一定理，在推理及證明時頗見重要，世常以 Heine-Borel 之掩蔽定理稱之者．其言曰：

設 M 為一有涯之閉集，其中每一點均有一鄰（方鄰或圓鄰）可作，如是則必可選擇有限個鄰，使 M 得賴以完全掩蔽． 此所謂完全掩蔽，其意乃 M 中每一點必至少能屬於所選定有限個鄰之一之謂．其理幾為聚點原則之必然結果，可由反證法推演之．M 既為有涯，可假定處於一平方 R 之內．將此 R 等分為四，據反面之假定，其中當至少有一個平方，即 M 之處於此平方之內及其邊之上者，不能為有限個鄰所掩蔽．M 之此一部分吾人以 M_1 稱之．M_1 自為一閉集．將此含有 M_1 之平方復等分為四，其中必至少有一平方，為 M_1 中之一部分 M_2 所居者，不能為有限個鄰所掩蔽．依此類推，即可從而獲得 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots$ 等閉集，隨於後者各在其前者之中，且一一均屬於趨小之平方中，不能為有限個鄰所掩蔽．然據前所論，必有一聚點 (ξ, η) 存於此一切閉集之中，故亦在 M 之中．惟如是，此 (ξ, η) 據假定必有一鄰可作．然則此含有 (ξ, η) 之鄰在 n 相當大時必能包括一切 M_n 於其中，是與適所推演之結果相矛盾矣．故 Heine-Borel 之掩蔽定理於是得證．

例　題

1. 所謂凸形變區 R，為一有涯閉區之有如下性質者：若 A、B 為任何兩點屬於 R 者，則連接 A 及 B 之直線線段亦全屬於 R．試證如下各理：

*(a) 若 A 為一不屬於 R 之點，則必有一經過 A 之直線，與 R 無共同點．

*(b) 經過 R 邊界之任何一點，必有一直線 l（所謂支持線），使 R 中所有一切點均在其一面，或均在 l 之上．

(c) 苟一點 A 與 R 中之點處於任何支持線之同一面，則 A 亦為 R 中之一點．

(d) R 之質量中心為 R 中之點．

(e) 一凸形變區之邊界為一迴合曲線，苟其與任何直線不能有多於兩個之共同點．

*(f) 一凸形變區之邊界為一迴行曲面，而其曲率處處為0.

2.(a) 若 S 為任何有界閉集，則有一"最小凸形集 S'"，此一集之有如下特性者：

(1) 含有 S 中一切點.

(2) 含於一切凸形集之內者.

(3) 本身亦為凸形集.

(b) 上述之 S' 復可如下說明之.

P 如為 S' 中之點，其必要且充分條件為任何平面之令 S 中所有點均處於同一面者，亦必使 P 處於此一面.

(c) S 之質量中心必為 S' 之點.

第二節 再論極限概念

極限概念之出現於兩個以上自變數之函數，有其精微曲折處，不可不加以深思而明辨者.茲特提要論之.

A2.2.1. 重數序及其極限

前在本書上卷中討論極限之時，係以一數序 a_n 為最初之出發點，其中 n 假定為任何整數. 今者既為兩個自變數之問題，自當以數序之隨兩整數而變者為研討之對象，如 a_{nm}，其中 n 及 m 各不相涉，可取得任何整數，如

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, \cdots\cdots$$

例如
$$a_{nm}=\frac{1}{n+m}, \quad a_{nm}=\frac{1}{n^2+m^2}, \quad a_{nm}=\frac{n}{n+m},$$

皆為隨兩整數而變之數序，在本卷中為行文之便即簡稱為重數序[1]可矣.

吾人首欲講明者，為數序收斂之義. 所謂 a_{nm} 在 $n\to\infty$ 及 $m\to\infty$ 時歛於一極限 l 者，不論 ϵ 為任何小之正數，必有一僅隨 ϵ 而變之 N，當 n 及 m 大於 N 時，足致 $|a_{nm}-l|$ 小於 ϵ. 果如是，即以

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm}=l$$

(1) double sequences, Doppelfolge.

表而出之.例如 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} \frac{1}{n+m}=0$,

又 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} \frac{m+n^2}{mn} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}$ [illegible] $=0$.

其極限之存在,可以一望而知.然有極限之果為何數,未能明悉.而其數序之收斂與否可以判定者,是乃應用 Cauchy 氏之收斂原則之功效,其言曰: **數序 a_{nm} 收斂之必要及充分條件爲對任何 $\epsilon>0$ 必有一 $N(\epsilon)$ 可求,凡 n,m,n',m' 之大於 $N(\epsilon)$ 者皆足致 $|a_{nm}-a_{n'm'}|<\epsilon$ 成立.**

所當注意者,爲數序 a_{nm} 既隨 n 及 m 而變,惟 n 及 m 之趨大,有未能同時實現而不得不有先後之分者.如是則其趨大先後之不同對於其所趨極限是否將發生影響,姑先令 a_{nm} 中之 m 固定不變,而令 $n\to\infty$,則得一極限,常與 m 有關者,以 l_m 表之,然後再令 $m\to\infty$,其極限是否與 n 及 m 同時趨大時所趨者相同,又試顛倒 n 及 m 趨大之先後程序,其所趨極限爲何如.在解決此問題之前,試將下列各例細觀之:

設 $a_{nm}=\frac{1}{n+m}$,先令 m 固定,$n\to\infty$,則有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}=l_m=0$,據此遂得 $\lim\limits_{m\to\infty} l_m=0$. 試顛倒 n 及 m 趨大之先後,其所趨極限依然如故.

又設 $$a_{nm}=\frac{n}{n+m}=\frac{1}{1+\frac{m}{n}},$$

則 $$\lim_{n\to\infty} a_{nm}=1,$$

故 $$\lim_{m\to\infty} l_m=1,$$

惟 $$\lim_{m\to\infty} a_{nm}=0,$$

從而可見 $$\lim_{n\to\infty} l_n'=0.$$

由是知兩者實不相等: $$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a_{nm})\neq\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}a_{nm}).$$

且 n 及 m 若同時趨大時,無極限之可求也①.

---

①倘有一極限,則其值勢非 0 不可,蓋 a_{nm} 可任意與 0 接近,但令 n 相當大又令 $m=n^2$ 可矣.然當 $n=m$ 時,無論 n 如何大,必有 $a_{nm}=\frac{1}{2}$,此兩事與其極限存在之義不相容也.不寧唯是,即使 $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}a_{nm})=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}a_{nm})$,並且 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}a_{nm}$ 不必因之而存在,觀於

$$a_{nm}=\frac{1}{(n-m)^2+\frac{1}{2}}$$ 可以見之.

試更就

$$a_{nm}=\frac{\sin n}{m}$$

觀之，則當 n 及 m 同時趨大時，其極限爲 0，蓋其分子之絕對值不能超過 1 而其分母則愈趨愈大也．若令 $m\to\infty$，則 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}=\lambda_n=0$，因之 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$．若將此趨大程序顛倒之，令 m 暫時固定，而 $n\to\infty$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 未能存在，故同時趨大與先後趨大，其間曲折關係，有不可不明辨者．

既觀上舉各例，吾人得建立兩重要定理如下：

苟 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=l$ 果能存在，又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}=l_m$ 不論 m 爲任何整數亦能存在，則 $\lim\limits_{m\to\infty} l_m$ 必存在且等於 l：$\lim\limits_{m\to\infty} l_m=l$．復次，苟 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=l$ 果能存在，又 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}=\lambda_n$ 不論 n 爲任何整數亦能存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ 必存在且等於 l：$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=l$．此意可由下式表而達之：

$$l=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nm})=\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{nm}).$$

故在上述條件之下，n 及 m 之趨大可分先後，且其先後程序與其所趨極限絕無影響可言．此理之證明，亦殊易易．蓋由於 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=l$ 之存在，可知不論 ϵ 爲任何正數，必有一僅隨 ϵ 而變之 $N(\epsilon)$，凡 n 及 m 之大於 $N(\epsilon)$ 者皆足致 $|a_{nm}-l|<\epsilon$ 之成立．惟如是，若令 m 暫時固定，n 無限制趨大，則 $|\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}-l|=|l_m-l|\leqq\epsilon$．此不等式對於任何 ϵ 及 m 之大於 $N(\epsilon)$ 者皆能成立，是即 $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})=l$ 之謂，欲證之理卽在於是．至此定理之後半，得以同法證之，故不贅．

繼此所欲證明之又一定理，可視爲上述定理之逆定理，其中說明爲行文之便常應用勻斂之概念，故對於勻斂，擬先立一精確定義．

考慮數序 a_{nm} 在 $n\to\infty$ 之趨於 l_m，苟其極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}=l_m$ 對於任何 m 及任何 ϵ，必有一僅隨 ϵ，不隨 m 而變之 $N(\epsilon)$，使 n 之大於 N 者足致 $|l_m-a_{nm}|<\epsilon$ 之成立，則 a_{nm} 之斂於 l_m 謂有勻斂性．

例如 $a_{nm}=\frac{n}{m(n+m)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n+m}$ 之斂於 $l_m=\frac{1}{m}$ 顯爲勻斂，蓋

$$\left|a_{nm}-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n}.$$

故但求 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ 足矣. 他如 $a_{nm} = \frac{m}{n+m}$ 則未能滿足匀斂條件. 當 m 固定時, 誠爲 $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = l_m = 0$, 但其斂未嘗能匀. 試令 $\epsilon = \frac{1}{10}$, 無論 n 如何大, 必有 m 可求, 足致 $|a_{nm} - l_m| = a_{nm}$ 超過 ϵ 者, 但令 $m = 2n$, 即得 $a_{nm} = \frac{2}{3}$, 永與極限之差相距不小於 $\frac{1}{10}$, 即可見矣.

既明匀斂之義, 吾人得建立又一重要定理如下:

苟 a_{nm} 在 $n\to\infty$ 時匀斂於 l_m, 又 $\lim_{m\to\infty} l_m = l$ 亦能存在, 則 $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm}$ 必存在且等於 l:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nm} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm} = l.$$

果如是, 則 n 及 m 之趨大可以顛倒先後, 但求 $\lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lambda_n$ 存在可矣.

此理可應用 $\qquad |a_{nm} - l| \leq |a_{nm} - l_m| + |l_m - l|$

照上列定理證明之.

A2.2.2. 連續變數之極限

以上所論重數序, 乃函數之自變數限於整數範圍內變化者. 若自變數之變, 不受此項限制, 換言之, 苟自變數爲連續變數如 x, y, 則當 x, y 趨於 ξ, η 時, 其函數之極限存在與否亦有可論. 上段所述關於極限之理, 在此仍得應用.

如前論偏導數 f_{xy} 及 f_{yx} 時, 亦先後求兩極限, 其先後之程序在特殊條件下對於最後結果不致產生影響. 又如 $\qquad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

在 y 固定一變且不等於 0 時, 必有 $\qquad \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$,

當 x 固定不變且不等於 0 時則 $\qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = +1$

由是知 $\qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) \neq \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$,

故趨向極限之先後, 所關非淺, 不可不深加注意, 追溯其所以然之故, 實由於此函數在原點缺乏連續性.

要之, 設有兩連續自變數之函數 $f(x,y)$, 苟其在 $x\to\xi$, $y\to\eta$ 時有極限可趨, 其極限可分別先後實施者, 則其間關係, 仍完全受制於前段所論關於重數序趨向極限之理, 讀者深思而自得之可也.

A2.2.3. 獨行函數序之勻斂性

勻斂之義，在各種精微理論中殊為重要，[illegible]建立一普遍定理，以審定一函數序之勻斂與否，不可謂非必要之[illegible]．在上卷 3.3.2 已見一函數序之斂於一連續函數者未必即為之勻斂，[illegible]特殊情形下，得由極限之連續性推斷其勻斂性，即其函數序必具有獨行性，即不論 x 為任何固定值時，$f_n(x)$ 隨 n 之增而恆遞增或恆遞減者．為行文之便，不妨假定 $f_n(x)$ 為獨升，於是吾人欲證明者為如下定理①．

苟有一函數序 $f_n(x,y)$，為連續函數所組成，在閉區 R 中斂於一連續極限 $f(x,y)$，又在 R 中在在滿足

$$f_{n+1}(x,y) \geqq f_n(x,y)$$

則其在 R 中之斂為勻斂．

其理可由反證法推演之，且為聚點原理之一種應用．倘其斂無勻性，則必有一正數 α 存在，當 n 相當大時[illegible]屬於一數集 n_1, n_2，……，其值均相當大——函數在閉區內某點 P_n 之值 $f_n(P_n)$ 與 $f(P_n)$ 之差大於 α．如令 n 取得 $n_1, n_2, \cdots\cdots$，則 $P_{n_1}, P_{n_2}, \cdots\cdots$ 等點至少必有一聚點 Q，而此聚點因 R 之為閉區必屬於 R 無疑．惟在任何一點 P 之上必有

$$f(P)=f_\mu(P)+R_\mu(P)$$

其中 μ 為一正整數，而 $f_\mu(P)$ 及餘項 $R_\mu(P)$ 皆為 P 之連續函數．復因函數序之獨升性，可知 $n>\mu$ 時必有

$$R_\mu(P)\geqq R_n(P)，$$

故在 $n>\mu$ 時

$$R_\mu(P_n)\geqq R_n(P_n)\geqq\alpha$$

之成立，亦理有固然．明乎此，試取一趨於 Q 之點序，則因 R_μ 連續之故，可知 $R_\mu(Q)\geqq\alpha$，其中 μ 為固定．然後令 n 愈趨愈大，吾人可選擇一如是大之 μ，使此不等式在 $n>\mu$ 時均能成立．更考趨於 Q 之數序中自有無限多之 n，大於 μ 者．然 $R_\mu(Q)\geqq\alpha$ 與 $R_\mu(Q)$ 在 μ 趨大時趨零之事實適相矛盾，故欲證之理，即在於是矣．

①此定理常稱為 Dini 定理．

例　題

1. 考下列極限是否存在.

(a) [illegible]

(b) [illegible]

(c) [illegible]

2. 試在下列條件下證 $f(x,y)$ 之連續:

(a) 當 y 固定時, f 爲 x 之連續函數;

(b) 當 x 固定時, [illegible] 連續有勻性, 即不論任何 ϵ, 必有一 δ, 與 x 及 y 無關者, 使 $|y_1-y|<\delta$ 時足致

$$f(x, y_1) - f(x, y) \ [illegible]$$

3. 試在下列條件下證 $f(x,y)$ 在 [illegible] 之連續性.

(a) 荷 $\Phi(t,\varphi)=f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ [illegible] 之連續函數;

(b) 荷 $\Phi(t,\varphi)=f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ [illegible] 之連續有勻性, 即不論任何 ϵ, 必有一 δ, 不隨 t 及 φ 而變, 使 $|\varphi_1-\varphi|<\delta$ 時足致

$$|\Phi(t,\varphi_1)-\Phi(t,\varphi)|<\epsilon$$

4. 試證一閉集 S 之補集(爲如是之集, 其點不屬 S 者)爲一開集.

第三節　齊性函數

最後所欲略加論述者, 爲齊性函數[1]之理論. 齊性函數之最簡者, 莫過於多個自變數之齊次多項式, 在代數學及各種淺近應用中已屢見之. 如 $ax+by$ 爲一次之齊性函數, $ax^2+bxy+cy^2$ 爲二次齊性函數. 齊次多項式有一重要特性, 即不論 t 爲任何數必滿足

$$f(tx, ty)=t^h f(x, y)$$

惟如是, 吾人遂立一定義, 謂一齊性函數, 其次數爲 h 者, 爲一滿足下列

(1) homogeneous function, homogene Funktion.

關係之函數:

$$f(tx, ty, \cdots\cdots) = t^h f(x, y, \cdots\cdots).$$

函數之有齊性而非多項式者如:

$$\tan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (h=0),$$

$$x^2\sin\frac{x}{y}+y\sqrt{x^2-y^2}+x\log\frac{x+y}{x}, \qquad (h=2),$$

又設兩矢量之部分爲 x, y, z 及 u, v, w, 則其間角之餘弦:

$$\frac{xu+yv+zw}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad (h=0),$$

及矢量之長(其部分爲 x, y, z)　　$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

皆爲齊性函數之例.

齊性函數之可導者必滿足下列關係,即世所盛稱之 Euler 關係

$$xf_x + yf_y + zf_z + \cdots\cdots = hf(x, y, z, \cdots\cdots).$$

欲證之,但注意 $f(tx, ty, \cdots\cdots) = t^h f(x, y, \cdots\cdots)$ 在 t 爲一恆等式,因之可向 t 求導數;應用鏈導法,得

$$xf_x(tx, ty, \cdots\cdots) + yf_y(tx, ty, \cdots\cdots) + \cdots\cdots = ht^{h-1}f(x, y, \cdots\cdots).$$

然後令 $t=1$, 即得欲證之理.

不寧唯是, Euler 關係之成立,不僅爲函數有齊性之必然結果;倒言之,函數之齊性,可由 Euler 關係推演而得之. 其意無異謂 **Euler 關係爲齊性函數之必要與充分條件**. 何以言之?一函數有齊性而次數爲 h 者,爲一函數,以 x^h 除之之後,僅隨 $\frac{y}{x}$、$\frac{z}{x}$、而變. 惟如是,吾人但以 Euler 關係爲根據,應用 $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$, $\zeta = \frac{z}{x}$ 作變數,證明

$$\frac{1}{x^h}f(x, y, z, \cdots\cdots) = \frac{1}{\xi^h}f(\xi, \eta\xi, \zeta\xi, \cdots\cdots) = g(\xi, \eta, \zeta, \cdots\cdots)$$

不復隨 ξ 而變,即 $g_\xi = 0$ 足矣. 應用鏈導法,可知

$$g_\xi = (f_x + \eta f_y + \cdots\cdots)\frac{1}{\xi^h} - \frac{h}{\xi^{h+1}}f$$

$$= (xf_x + yf_y + \cdots\cdots)\frac{1}{x^{h+1}} - \frac{h}{x^{h+1}}f,$$

考此式右方因 Euler 關係之成立而等於零．故欲證之理即在於是．此理可用較精美之證法推演如下．吾人之目的無他，據 Euler 關係以證

$$g(t)=t^h f(x,y,\cdots\cdots)-f(tx,ty,\cdots\cdots)$$

不論 t 之值爲何如均等於零而已．惟 $g(1)=0$ 之事實，至爲顯然．由是求導數，既得

$$g'(t)=ht^{h-1}f(x,y,\cdots\cdots)-xf_x(tx,ty,\cdots\cdots)-yf_y(tx,ty,\cdots\cdots)-\cdots\cdots$$

然後將 Euler 關係寫如下式

$$xf_x(tx,ty,\cdots\cdots)+yf_y(tx,ty,\cdots\cdots)+\cdots\cdots=\frac{h}{t}f(tx,ty,\cdots\cdots),$$

可知 $g(t)$ 實滿足下列微分方程：

$$g'(t)=g(t)\frac{h}{t}.$$

若令 $g(t)=\gamma(t)t^h$，則 $g'(t)=\frac{h}{t}g(t)+t^h\gamma'(t)$，故 $\gamma(t)$ 實滿足

$$t^h\gamma'(t)=0,$$

由是知 $\gamma=$常數．令 $t=1$，即可斷定 $\gamma(1)=0$，故此常數爲 0．於是 $g(t)=0$ 遂得證矣．

例 題

1．若 $f(x,y,z,\cdots\cdots)$ 爲一 h 次之齊性函數，則其任何 k 重導數必爲一 $h-k$ 次之齊性函數，證之．

2．若 f 爲一一次齊性函數，證

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}+\cdots\cdots+2f_{xy}+2f_{xz}+\cdots\cdots=0.$$

第三章 微分學之發展及其應用

第一節 隱函數之理論

3.1.1. 引論

觀解析幾何學中，曲線之方程式常以隱函數 $F(x,y)=0$ 之形式出之；如直線之方程式為 $ax+by+c=0$，橢圓之方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 欲令其有顯函數之形式如 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$，須必將 $F(x,y)=0$ 對 y 或對 x 解開而後可.

前在本書上卷中，曾論及逆函數之問題．試求 $y=f(x)$ 之逆函數，其意即欲解方程式 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 以求 x．故求逆函數問題，要而言之，即如何將隱函數化為顯函數之問題而已．然則如何始可將 $F(x,y)=0$ 對 y 或 x 解開，似有詳加討論之必要.

就最簡單情形言之，如欲解上列兩方程式 $ax+by+c=0$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其事甚易，蓋其答案得由初等函數表達之也．苟方程式之形式過於繁複，其中 x 或 y 不能由初等函數表達之者，乃不得不用近似法以求之．如是則顯函數形式未必較隱函數為佳，由隱化顯遂成不必要，吾人即以隱函數為根據，推斷其所表曲線之性質可矣.

所當注意者，隱函數之是否必可顯化，為一尚待研討之問題．若謂每一 $F(x,y)$ 必有一 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 以滿足 $F(x,y)=0$ 實為一大錯誤．如滿足 $x^2+y^2=0$ 者僅有 $x=0$, $y=0$，而 $x^2+y^2+1=0$ 竟無一實數能滿足之．故 $F(x,y)=0$ 之能否得解及如何始能得解之問題，非細加研討不可也.

3.1.2. 問題在幾何意義上之闡明

為易於明瞭之故，可設想 $u=F(x,y)$ 由三維空間中之一曲面繪出之，如是則方程式 $F(x,y)=0$ 之解即為兩聯立方程式 $u=F(x,y)$ 及 $u=0$ 之解．然則吾人所欲研討之問題，就其幾何上意義言之，曲面

$u=F(x,y)$ 是否能與 xy 平面有一公有曲線，換言之，有無一曲線 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 存在，為曲面 $u=F(x,y)$ 與平面 $u=0$ 相交之處耳（苟有一如是曲線，其範圍至如何程，為另一問題，在此暫置不論）。吾人試由視覺以測知各種相交曲線存在之可能。

其最顯而可見者，苟此曲面 $u=F(x,y)$ 與平面 $u=0$ 無一公共點，如 $u=F(x,y)=x^2+y^2+1$ 完全處於 xy 平面之上者，自不能有一相交曲線。因此之故，必假定有一點 (x_0,y_0) 滿足 $F(x_0,y_0)=0$ 者，此 (x_0,y_0) 謂之 $F(x,y)=0$ 之初解。

苟 $F(x,y)=0$ 果有一初解，當視其曲面在 (x_0,y_0) 上之切面是否成水平之勢。如其水平，則未必有 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 存在，例如 $u=x^2+y^2$ 之初解為 $x=0, y=0$，而在 xy 平面中除此以外別無其他公共點。又如 $u=xy$ 之初解為 $x=0, y=0$，而與 xy 平面沿兩直線 $x=0$ 及 $y=0$ 相交（見圖 3.1 及圖 3.2），但在原點鄰近欲將其全體相交線由

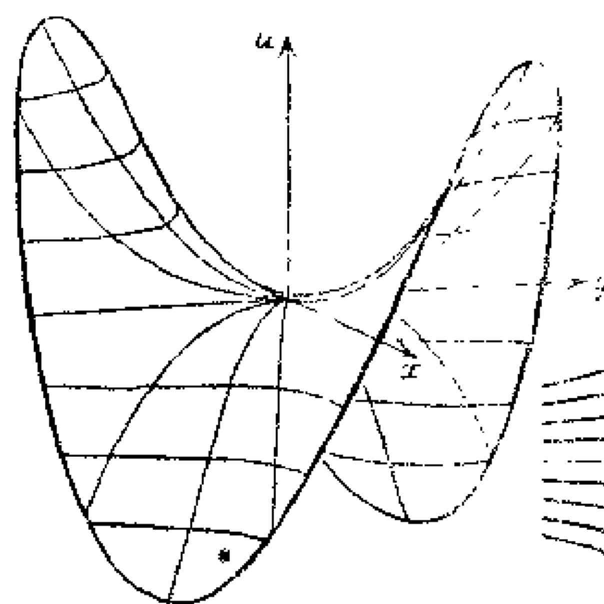


圖 3.1

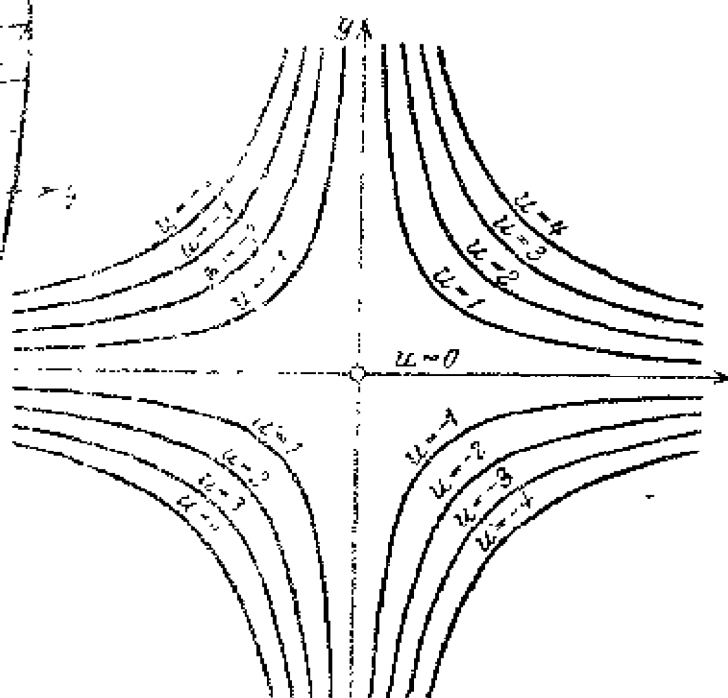


圖 3.2

$y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 表達之而不可得。他如 $(y-x)^4=0$，雖其切面在初解上亦為水平，竟能得解。由是以觀，當曲面之切面水平之時，其情形如

何,未可一言而定.

其次,請一論其他可能,即 $u=F(x,y)$ 在其初解 (x_0,y_0) 上之切面未嘗成水平之勢.如是則據粗淺之觀覺,可以想見 $u=F(x,y)$ 之變化,無論如何,不能如是迅速,使其在 (x_0,y_0) 鄰近竟與 xy 平面避免相交於一曲線,故 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 之存在,爲理所必至.然考切面在 (x_0,y_0) 未嘗有水平之意,無異謂 $F_x(x_0,y_0)$ 及 $F_y(x_0,y_0)$ 不能同時爲零.此情形吾人當於下段中詳論之.

3.1.3. 隱函數定理

所謂隱函數定理,爲隱函數顯化之一充分條件,同時復示一求導之理法,其言曰:

苟 $F(x,y)$ 有連續導數 F_x 及 F_y,又有一點 (x_0,y_0),處於規定變區之內,滿足 $F(x_0,y_0)=0$ 而 $F_y(x_0,y_0)$ 不等於零者,則在 (x_0,y_0) 鄰近必可劃一長方形 $x_1\leqq x\leqq x_2$,$y_1\leqq y\leqq y_2$,使 x 在 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 變化時,必有一單值函數 $y=f(x)$,其值始終處於 $y_1\leqq y\leqq y_2$ 者,滿足 $F(x,y)=0$,即爲此方程式之一解.此函數 $y=f(x)$ 必滿足 $y_0=f(x_0)$,且無論 x 在其變區中如何變化必有

$$F(x,f(x))=0$$

成立.此函數又有連續性及可導性,其導數及微分爲

$$y'=f'(x)=-\frac{F_x}{F_y} \qquad 及 \qquad dy=df(x)=-\frac{F_x}{F_y}dx.$$

此定理之前半,即關於 $y=f(x)$(由隱函數 $F(x,y)=0$ 規定者)之存在及連續,擬暫作假定,而留待下段中證明之.茲欲證者,爲其可導性.既假定 F_x 及 F_y 之連續,則 $F(x,y)$ 之可導,自無疑義.因此遂得

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+hF_x(x,y)+kF_y(x,y)+\epsilon_1 h+\epsilon_2 k,$$

其中 ϵ_1 及 ϵ_2 爲兩數,隨 h 及 k 或 $\rho=+\sqrt{h^2+k^2}$ 之趨小而趨於零者.試任擇兩點 (x,y) 及 $(x+h,y+k)$,求其 x 及 $x+h$ 同處於 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 之中而又適合 $y=f(x)$ 及 $y+k=f(x+h)$ 者,則 $F(x,y)=0$ 及 $F(x+h,y+k)=0$ 顯能成立,於是上式即變爲

$$0 = hF_x + kF_y + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k.$$

惟既假定 $f(x)$ 有連續性，則當 h 趨零時，k 亦趨於零，而 ϵ_1 及 ϵ_2 亦隨之而同趨於零．於是若以 hF_y（據假定不等於零）除之，則上式將為

$$\left(1+\frac{\epsilon_2}{F_y}\right)\frac{k}{h} + \frac{F_x}{F_y} + \frac{\epsilon_1}{F_y} = 0,$$

然後令 $h\to 0$，即得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h} + \frac{F_x}{F_y} = 0,$$

但因

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

之故，是即所謂 $f(x)$ 之可導性，而

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = -\frac{F_x}{F_y}$$

遂同時得證矣．此關係亦可寫如

$$F_x + F_y y' = 0$$

或

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0.$$

考最後一式之意義，可見 $F(x,y)=0$ 成立之後，dx 及 dy 即無各自獨立變化之餘地．還此關係以求 y'，殊覺便利也．

復次，試假定 $F(x,y)$ 之二重偏導數亦均存在而連續，則視 $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ 為 x 之變函數，可用鏈導法再度求導，復令其中 y' 代以 $-\frac{F_x}{F_y}$，從而獲得 y'' 如下：

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3};$$

據此類推，則 $y(x)$ 之高重導數皆可求矣．舉例如下：

［例一］ 設 $y=f(x)$ 為滿足

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

之函數，則其導數據前所論為

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}.$$

此事可直接證實之．蓋將上列方程式對 y 解之，則有 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$，其圖形

分別為上半圓及下半圓. 將前者求導,得

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

後者求導,得

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

故無論如何,必有

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

［例二］ 試就雙紐線方程式:

$$F(x, y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

討論之. 欲將此方程式對 y 解開,其事殊不容易. 惟只在 $x=0$, $y=0$ 時有 $F=0$, $F_x=0$, $F_y=0$. 故上述定理在此不能應用, 蓋雙紐線之兩枝適經過原點故也. 至於其他之點, 其 F_y 不等於零者, 上述求導法均可應用, 從而得知 $y=f(x)$ 之導數為

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x(x^2+y^2-a^2)}{y(x^2+y^2+a^2)}.$$

由此可以約略推知雙紐線之特性. 如 $y'=0$, 即 $x=0$ 或 $x^2+y^2=a^2$ 時,有極大及極小值之出現. 惟由方程式既知 $x=0$ 時, y 亦為 0, 然在原點上顯無極大或極小值. 其極大及極小點有四, 為$\left(\pm\frac{a}{2}\sqrt{3},\ \pm\frac{a}{2}\right)$可由上卷所述方法求得之也.

［例三］ 設有　　$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$

其圖形略如圖3.3, 欲顯化之, 自覺異常不便. 因此吾人但就此隱函數一考其曲線之特性並求其導數. 此曲線自交於原點, 在此上述定理不復可用, 蓋 F, F_x, F_y 在原點皆為 0 也. 至於其他

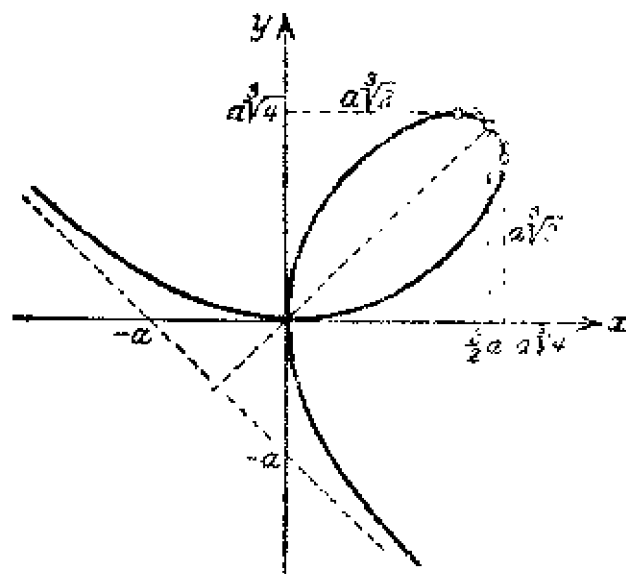


圖 3.3

諸點, 其中 $y^2 \neq ax$ 者, 其導數為

[illegible]

由是知 $x^2-ay=0$，其導數為零 [illegible]，可知此條件在

$$x=(\ldots) \quad [illegible]$$

時得滿足也．

3.1.4. 隱函數定理推廣於兩個以上之自變數

上述之隱函數定理可推廣於兩個以上之自變數，其內容如下：

設以 $F(x,y,\cdots\cdots,z,u)$ 表一連續函數，其自變數為 $x,y,\cdots\cdots,z,u$，其偏導數 $F_x,F_y,\cdots\cdots,F_z,F_u$ 均有連續性者．又以 $x_0,y_0,\cdots\cdots,z_0,u_0$ 表 F 所規定變區內之一點，滿足 $F(x_0,y_0,\cdots\cdots,z_0,u_0)=0$ 及

$$F_u(x_0,y_0,\cdots\cdots,z_0,u_0)\neq 0$$

如是必可在 u_0 之鄰近劃一變程 $u_1\leqq u\leqq u_2$ 及含有 $(x_0,y_0,\cdots\cdots,z_0)$ 之一變區 R，不論 $(x,y,\cdots\cdots,z)$ 在 R 中如何變化，有一單值函數 $u=f(x,y,\cdots\cdots,z)$ 存在，其值在 $u_1\leqq u\leqq u_2$ 中變化，而滿足 $F(x,y,\cdots\cdots,z,u)=0$ 者．此 $u=f(x,y,\cdots\cdots,z)$ 足使

$$F(x,y,\cdots\cdots,z,f(x,y,\cdots\cdots,z))=0$$

恆能成立，且又滿足 $u_0=f(x_0,y_0,\cdots\cdots,z_0)$．

復次，此函數 f 為 $x,y,\cdots\cdots,z$ 諸變數之連續函數，且有連續偏導數 $f_x,f_y,\cdots\cdots,f_z$，適合下方程式者

$$F_x+F_uf_x=0,$$
$$F_y+F_uf_y=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_z+F_uf_z=0.$$

此定理之前半，即關於 $f(x,y,\cdots\cdots,z)$ 之存在及連續，當俟下段中詳證之．至其導數公式之證明，與前論一個自變數時無異．如吾人令 $y,\cdots\cdots,z$ 諸變數之暫時固定，即可從而推知 f_x 之公式也．

上列關於偏導數之各公式可由下列公式概括盡之：

$$F_xdx+F_ydy+\cdots\cdots+F_zdz+F_udu=0;$$

試尋繹此式之意義，無異謂 $F(x,y,\cdots\cdots,z,u)$ 中變數如不能各自獨立而受 $F=0$ 之束縛，則其微分亦不能獨自爲變而限於 $dF=0$ 之條件．此條件即爲

$$F_x dx+F_y dy+\cdots\cdots+F_z dz+F_u du=0.$$

若將其中 du 代以 $u_x dx+u_y dy+\cdots\cdots+u_z dz$，則因 $dx,dy,\cdots\cdots,dz$ 各自獨立之故，即得

$$F_x+F_u f_x=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_z+F_u f_z=0,$$

是卽上列之導數公式也．

應用隱函數之義，吾人得爲代數函數立一普通定義．所謂代數函數 $u=f(x,y,\cdots\cdots,z)$，爲一如是之函數，隱然由 $F(x,y,\cdots\cdots,z,u)=0$ 所規定，而 F 假定爲一多項式者也．簡言之，代數函數者，滿足代數方程式之函數而已．其他函數之不能滿足代數方程式者稱之爲超越函數．

茲舉一例以見導數公式之用．設有一球面方程式如：

$$x^2+y^2+u^2-1=0,$$

其偏導數爲

$$u_x=-\frac{F_x}{F_u}=-\frac{x}{u},\qquad u_y=-\frac{F_y}{F_u}=-\frac{y}{u};$$

再度求導，則有

$$u_{xx}=-\frac{1}{u}+\frac{x}{u^2}u_x=-\frac{x^2+u^2}{u^3},$$

$$u_{xy}=\frac{x}{u^2}u_y=-\frac{xy}{u^3},$$

$$u_{yy}=-\frac{1}{u}+\frac{y}{u^2}u_y=-\frac{y^2+u^2}{u^3}.$$

3.1.5. 隱函數定理之證明

欲證隱函數定理如上所述者，當先證有一長方形 $x_1\leqq x\leqq x_2$，$y_1\leqq y\leqq y_2$ 存在，其中 $F(x,y)=0$ 有唯一之解 $y=f(x)$．吾人初不望此長

方形之如何大,但證其存在足矣.

既假定 $F_y(x,y)$ 之連續性及 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 自可求得一如是小之長方形, 完全處於 R 之中且以 (x_0,y_0)爲中心者.使其中 F_y 處處不等於零且始終爲正或爲負.爲行文之便, 不妨假定 F_y 在R中處處爲正;苟其爲負,可將 $-F$ 代 F, 自無妨於最初之 $F(x,y)=0$ 也.然則在 R 中任何直線線段 $x=$常數, 平行於 y 軸者,既有 $F_y>0$ 成立,則 $F(x,y)$視爲單獨隨 y 而變之函數,必有獨升性無疑.惟因$F(x_0,y_0)=0$ 之故,可知 A 若爲 R 中之一點,其坐標爲 x_0 及 $y_1(y_1<y_0)$者, F 在 A 點上之值卽 $F(x_0,y_1)$ 爲負,又 B 若爲 R 中之點,其坐標爲 x_0 及 y_2 $(y_2>y_0)$者, F 在 B 點上之值 $F(x_0,y_2)$爲正.復據 $F(x,y)$之連續性,可知 $F(x,y)$ 在 R 中沿經過 A 之直線線段 $y=y_1$,平行於橫軸者,其值爲負,而沿經過 B 之直線線段 $y=y_2$,平行於橫軸者,其值爲正.因此之故,吾人乃得在 x_0 之鄰近劃一變區 $x_1\leqq x\leqq x_2$, 當 x 在此變區內變化時, $F(x,y)$ 之值沿經過 A 之水平線爲負, 而沿經過 B 之水平線爲正;換言之,當 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 時,必有 $F(x,y_1)<0$ 及 $F(x,y_2)>0$ 成立.

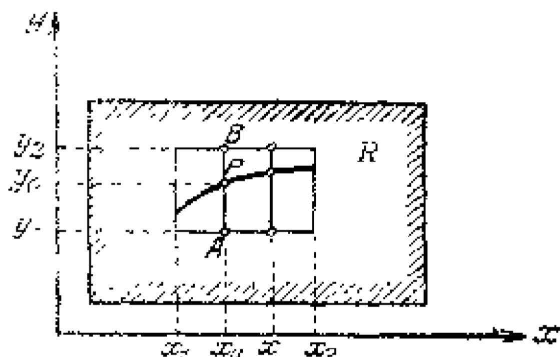


圖 3.4

明乎是,吾人試將 x 之值固定於 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 之變程中,然後令 y 由 y_1 增大至 y_2. 如是則(x,y)自限於下列長方形之內:

$$x_1\leqq x\leqq x_2, \qquad y_1\leqq y\leqq y_2,$$

而此長方形完全處於 R 之中,爲吾人前已假定之事. 據 $F_y(x,y)>0$, 可以推知 $F(x,y)$ 之變化必有連續性及獨升性, 其值由負獨升至正,且在兩點上之橫坐標相同者,其值決不能相同. 惟如是,可見 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 中每一 x, 必有獨一無二之 y①, 滿足 $F(x,y)=0$ 者以應之. 由是遂得

①苟無 $y_1\leqq y\leqq y_2$ 之限制,其事未必眞確.例如令 $F=x^2+y^2-1$,又令 $x_0=0, y_0=1$,則在 $-1\leqq x\leqq 1$ 時,適有唯一之解 $y=f(x)$,假定 y 限於 $0\leqq y\leqq 2$. 苟無此限制,則有兩解如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

y 為 x 之一函數，而 $F(x,y)=0$ 必有一解且有唯一之解，遂得證矣.

觀上述證法，可以見 $F_y\neq 0$ 之重要意義. 倘此條件不能成立，則 $F(x,y)$ 在 A 及 B 點之值不必正負對峙，且在線段 AB 上亦不必經過零. 又 $F(x,y)$ 在 A 及 B 點雖成正負對峙，而 F_y 可由正變負或由負變正，則 $F(x,y)$ 在 x 固定時未必對 y 有獨調性，其等於零者，或可多於一次，如是其解即不能獨一無二矣.

復次，據上述證法觀之，實為一種存在定理，其目的在乎確立 $y=f(x)$ 之存在，至如何獲得此存在之函數為另一問題，在此不加討論.

自 $y=f(x)$ 之存在得證之後，其連續性亦不難見之. 試以 R' 表一長方形 $x_1'\leqq x\leqq x_2'$, $y_1'\leqq y\leqq y_2'$，完全處於原長方形 $x_1\leqq x\leqq x_2$, $y_1\leqq y\leqq y_2$ 之內者. 在此較小長方形中，可應用前法，以得 $F(x,y)=0$ 之一解 $y=f(x)$. 惟前在較大長方形中，已證其解之唯一，故此所獲得者必與前無異. 吾人如欲證此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 之連續性，當證其中 x 相當趨近 x_0 時，可以促成 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 之成立，不論 ϵ 為如何小之正數. 欲證此，可令

$$y_1'=y_0-\epsilon \quad 及 \quad y_2'=y_0+\epsilon.$$

然後為此 y_1' 及 y_2' 規定 x 之變程如 $x_1'\leqq x\leqq x_2'$. 據此以觀，當 x 在此變程中變化時，其 $f(x)$ 必限於 y_1' 及 y_2' 之間，故與 y_0 之差不能超過 ϵ. 是即 $f(x)$ 在 x_0 點上連續之謂. 然不論 x_0 在 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 如何變化，上述理法皆可應用，故 $f(x)$ 在此變程中處處連續，從可識矣.

至於如何推廣其理以證 $F(x,y,\cdots\cdots,z,u)=0$ 之可解，其中自變數多於兩個者，讀者可自思得之.

例　　題

1. 證下列各方程式在所示點鄰近必有唯一之解:

(a) $x^2+xy+y^2=7$　　$(2,1)$.

(b) $x\cos xy=0$　　$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) $xy+\log xy=1$　　$(1,1)$.

(d) $x^2+y^2+[illegible]$ [illegible]

2. 求題1各解之初重導數

3. 求題1各解之二重導數

4. 設 $y=f(x)$ 爲滿足 $x^2+[illegible]$ 之 [illegible] 之最大及最小值.

5. 試證 $x+[illegible]$ [illegible] 求其解之偏導數.

第二節　曲線及曲面之出現於隱函數形式者

3.2.1.　平面中曲線之出現於隱函數形式者

前論平面中之曲線時，常以 x 爲自變數，y 爲因變數，將其方程式寫如 $y=f(x)$，於是其切線及法線在任何一點 (x,y) 者將分別由

$$(\eta-y)-(\xi-x)f'(x)=0$$

及

$$(\eta-y)f'(x)+(\xi-x)=0$$

表而達之. 至其曲率及反曲點，亦可由一推出公式以認識之. 現如假定曲線之方程式爲一隱函數形式如 $F(x,y)=0$，亦可從而推演各種公式，惟其點上必假定 F_x 及 F_y 不同時爲0，即 $F_x^2+F_y^2\neq 0$ 是已.

苟 $F_y\neq 0$，則上列切線方程式中之 y' 可代以 $-\frac{F_x}{F_y}$，從而得知一曲線 $F(x,y)=0$ 在 (x,y) 點上之切線得由

$$(\xi-x)F_x+(\eta-y)F_y=0$$

表而達之，又其在 (x,y) 之法線則爲

$$(\xi-x)F_y-(\eta-y)F_x=0$$

苟將上述關於顯函數之結果，不加應用，欲直接求得其切線之方程式，其法如下：設 a 及 b 爲兩常數，則

$$a(\xi-x)+b(\eta-y)=0$$

實表達一經過 $P(x,y)$ 之直線. 試以 $P(x,y)$ 爲曲線 $F(x,y)=0$ 上任何一點，然後經過 $P(x,y)$ 作一直線，使曲線上其他鄰近於 P 之一點如 P_1，其坐標爲 $x_1=x+h$，$y_1=y+k$ 者，與此直線相去之距離以高於 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ 之數量級趨於零. 此直線當用何法以求之. 據 F 之可導

性，知必有

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+hF_x+kF_y+\epsilon\rho,$$

其中 ϵ 自隨 ρ 而趨於零．惟 P 及 P_1，既同在曲線 $F=0$ 之上，遂得由此而推知

$$hF_x+kF_y=-\epsilon\rho.$$

復因 $F_x{}^2+F_y{}^2\neq 0$ 之故，此式可寫如

$$h\frac{F_x}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}+k\frac{F_y}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}=\epsilon_1\rho,$$

其中 $\epsilon_1=-\frac{\epsilon}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}$，故亦隨 ρ 而趨零．若以 $a=\frac{F_x}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}$ 及 $b=\frac{F_y}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}$，此式之左方，可視爲 $a(\xi-x)+b(\eta-y)=0$ 之法式，其中 ξ 及 η 以 $x_1=x+h$ 及 $y_1=y+k$ 代之者．故爲 P_1 與 $a(\xi-x)+b(\eta-y)=0$ 相去之距離．即知此距離之絕對值爲 $|\epsilon_1\rho|$，其隨 ρ 趨零之數量級高於 ρ，自顯然可見．惟

$$\frac{F_x}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}(\xi-x)+\frac{F_y}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}}(\eta-y)=0$$

或

$$F_x(\xi-x)+F_y(\eta-y)=0$$

實爲前已獲得之切線方程式．因此之故，$F(x,y)=0$ 在(x,y)之切線爲一經過 $P(x,y)$ 之直線，其去鄰點 P_1 之距離以高於 PP_1 之數量級趨近於零者，可以見矣．

又試爲 $F(x,y)=0$ 在(x,y)作一法線，其方向餘弦爲

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}},\quad \sin\alpha=\frac{F_y}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}},$$

是爲一單位矢量之部分，其方向與法線相同者．至在 $P(x,y)$ 上切線之方向餘弦爲

$$\cos\beta=\frac{F_y}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}},\quad \sin\beta=-\frac{F_x}{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}},$$

自無待論．

試推上述之理以論 $F(x,y)=c$，其中 c 爲一任意常數，其所代表爲一函數或曲線族，則一切結果與前無異．蓋以$F(x,y)-c$ 代 $F(x,y)$，兩者之導數完全相同；故就此曲線族中之各曲線言之，其切線及法線方

程式與前無異也.復次,試作 $F(x,y)$ 之陡度,其矢量部分為 F_x 及 F_y,故據前所論,在每點上必垂直於曲線族中經過該點之曲線. 據此,又得從而推演切線之方程式. 蓋切線之義,為一矢量,其部分為 $\xi-x$ 及 $\eta-y$,又與 $F(x,y)=c$ 之陡度相垂直者,故之此兩矢量之標積

$$(\xi-x)F_x+(\eta-y)F_y$$

必等於零,是即經過(x,y)之切線方程式也.

所當申述者,吾人在上列各式中假定 $\sqrt{F_x^2+F_y^2}$ 為正固可,為負亦無不可.是乃由於曲線上以何者為正向可隨意決定之故.吾人此後擬取其正根,如是即可為法線定一確定方向.惟 F 若代以 $-F$,則曲線之幾何性質雖不變,其方向將隨之而反.此不可不注意者耳(關於法線之向旨,可參閱本書第五章).

復次,前在上卷中,知一曲線 $y=f(x)$ 如有一反凹點,其必要條件為 $y''=f''(x)=0$. 今欲求一與此同義之公式,則有

$$f''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

由是知反凹點存在之必要條件為

$$F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2=0,$$

其形式異常對稱,對於 x 及 y 不復有所偏重,且與假定 $F_y\neq0$ 不復發生關聯.

更就曲率公式言之,試將 y' 及 y'' 由 F_x、F_y,…… 等表之,代入於

$$k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

則有

$$k=\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其形式亦甚對稱.至曲率中心之坐標為

$$\xi=x+\rho\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}},\quad \eta=y+\rho\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}},$$

而 $\rho=\frac{1}{k}$ 也.

復次,苟兩曲線 $F(x,y)=0$ 及 $S(x,y)=0$ 相交於(x,y),則其相交

處之角即為兩者之切線在相交點上所成之角ω. 於是此角之方向餘弦必為

$$\cos\omega=\frac{F_xS_x+F_yS_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\sqrt{S_x^2+S_y^2}},$$

蓋由前述關於法線之方向餘弦及積公式亦可以知之. 在此既取其中之正平方根,則餘弦之值可謂完全確定,蓋法線方向確定後,其間之角亦隨之而定也.

既明此公式之義,如將其中ω等於 $\frac{\pi}{2}$,即得兩曲線垂直相交之條件如下:

$$F_xS_x+F_yS_y=0.$$

又兩曲線如相接觸,則其微分之比 dy/dx 必彼此相同,即下列條件必成立而後可:

$$dy/dx=-F_x/F_y=-S_x/S_y,$$

此條件亦可寫如

$$F_xS_y-F_yS_x=0.$$

試觀下列各拋物線

$$y^2-2p\left(x+\frac{p}{2}\right)=0,$$

是皆以原點為焦點者. 苟 $p_1>0$, 又 $p_2<0$, 則

$$F=y^2-2p_1\left(x+\frac{p_1}{2}\right)=0 \quad 及 \quad S=y^2-2p_2\left(x+\frac{p_2}{2}\right)=0$$

必相交且相交時成互相垂直之勢,蓋

$$F_xS_x+F_yS_y=4p_1p_2+4y^2=4\frac{p_2F-p_1S}{p_2-p_1}=0,$$

因 $F=S=0$, $p_2-p_1\neq0$

故也. 又觀橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在(x, y)之切線為

$$(\xi-x)\frac{x}{a^2}+(\eta-y)\frac{y}{b^2}=0,$$

或

$$\xi\frac{x}{a^2}+\eta\frac{y}{b^2}-1=0;$$

至其曲率,則為

$$k=\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若 $a>b$, 則在其頂點 $y=0, x=\pm a$ 上有其最大值,在其他兩頂 $x=0, y=\pm b$ 有其最小值.

3.2.2. 曲線之奇點

欲論曲線之奇點,請先舉例以觀其特性,其詳細理論,留待本章附錄中補述之.

在上列各公式中，常見 $F_x^2+F_y^2$ 出現於分母之中．由是可以推測 $F_x^2+F_y^2=0$ 時，其曲線必呈特異之象，因在 $F_x=0$ 及 $F_y=0$ 時，y'（即切線之方向）失其意義，已可略見．

苟曲線在某點鄰近得將其方程式表為 y 為 x 之連續可導函數，或 x 為 y 之連續可導函數者，則此點稱為合規點[1]．在此情形之下，其曲線在此有一確定切線可作，且在此點之鄰近，曲線與其切線之相差甚微．曲線上其他之點，則常以奇點[2]稱之．

據前述關於隱函數之理，可見 $F(x,y)=0$ 上滿足 $F_y\neq0$ 之點必為合規點，蓋其時 $F(x,y)=0$ 有唯一之解，故有一可導函數 $y=f(x)$ 存在也．按同理，點之滿足 $F_x\neq0$ 者亦必合規．由是以論，所謂奇點者，當於 $F(x,y)=0$ 上滿足

$$F_x=0 \quad 及 \quad F_y=0$$

之點中求之．

考奇點之種類甚多，其重要者曰所謂重點[3]，是乃曲線中兩支或多於兩支所經過之處．如原點即為雙紐線

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

之一重點；欲在重點鄰近將其方程式化為 $y=f(x)$ 或 $x=\phi(y)$，為不可能之事．

惟 $F_x=0$ 及 $F_y=0$ 之成立，為重點之必要條件而非充分條件，蓋其時有他種奇點可以發見也．如 $y^3-x^2=0$ 在原點有一尖點[4]（見圖 3.5），其時 F_x 及 F_y 皆等於零，可以見之．不寧唯是，當有 F_x 及 F_y 雖同等於零，其點未嘗有特奇現象者，此可於下例見之．

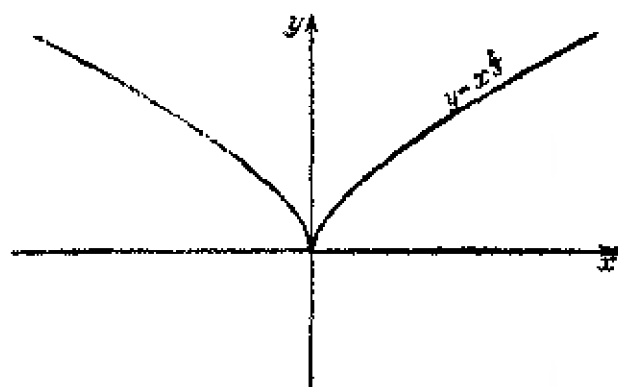


圖 3.5

(1) regular point; regulärer Punkt (2) singular point; singulärer Punkt.

(3) multiple point, Knotenpunkt (4) cusp; Spitze

如 $$y^3 - x^4 = 0$$

化為顯函數，得 $$y = x^{\frac{4}{3}}.$$

由 $(-x)^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$ 及 $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ 可知其曲線實與縱軸對稱、與縱軸接觸於原點，略似一拋物線。惟其二重導數在原點趨無限大，故其曲率在此亦無限，至其切線方向，則無奇異現象。

又如$(y-x)^2=0$為一直線，處處合規者，然F_x及F_y在在皆等於零也。

由是以論，欲論曲線之奇點，不能因$F_x=0$及$F_y=0$之成立為已足，非特加研討不可也。

3.2.3. 曲面之出現於隱函數形式者

前在解析幾何學中討論曲面時，常假定其方程式化為顯函數形式如 $z=f(x,y)$，從而知其在(x,y,z)之切面為

$$\zeta - z = (\xi - x)z_x + (\eta - y)z_y.$$

惟為求理論之普遍，可假定一曲面由一隱函數 $F(x,y,z)=0$ 表達之。如是則欲立其在(x,y,z)之切面，當假定 $F_x^2+F_y^2+F_z^2 \neq 0$ ① 在(x,y,z)之成立，又其中至少有一偏導數如 F_z 不等於零。在此假定之下，必有 $z=f(x,y)$ 存在，是乃根據隱函數定理而可以知之者。由是以論，吾人遂得將

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad 及 \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

代入於 $$\zeta - z = (\xi - x)z_x + (\eta - y)z_y,$$

從而得 $F(x,y,z)=0$ 在(x,y,z)之切面方程式如下：

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0.$$

所謂 $F(x,y,z)=0$ 在(x,y,z)之切面，亦可視為一如是之平面，凡鄰近於(x,y,z)之點，居於 $F(x,y,z)=0$ 之上者如$(x+h,y+k,z+l)$與此平面相去之距離以高於 $\rho=\sqrt{h^2+k^2+l^2}$ 趨零之數量級而趨於零。據此定義，又可為切面建立其方程式，與前在平面中推演切線方程式之理正復相似。

據解析幾何學中之初淺定理，知有所謂曲面在某點之法線者，即為

①苟其為零，則有奇點出現之可能，在此不擬詳論。

其切面之法線,其方向餘弦爲

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

試取其中分母之正根,則法線之向皆卽隨之而定.

苟兩曲面 $F(x,y,z)=0$ 及 $S(x,y,z)=0$ 相交於一點,則其間之角 ω 卽爲兩者之切面所成之角,换言之,卽爲其法線間之角.由是遂知

$$\cos\omega=\frac{F_xS_x+F_yS_y+F_zS_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}.$$

於是兩曲面垂直相交之條件必爲

$$F_xS_x+F_yS_y+F_zS_z=0,$$

從可識矣.

更進而論曲面族 $F(x,y,z)=c$,其中 c 爲一任意常數者.試假定在空間中每一點,至少在空間中某區之內每一點,僅有唯一曲面通過者,則此曲面族之掩蔽此區域謂之單掩,其中每一曲面謂此曲面族之水平曲面.據前所論,此 $F(x,y,z)$ 之陡度爲一矢量,其部分爲 F_x,F_y,F_z,因之必與 $F(x,y,z)=c$ 之法線方向餘弦成正比.由是以觀,陡度之爲矢量必與水平曲面在每點上相垂直.據此關係,又得一新法以推演切面之方程式,與前在平面中推演切線方程式之理正相同也.

茲以球面方程式爲例:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,$$

其在(x,y,z)之切面爲

$$(\xi-x)2x+(\eta-y)2y+(\zeta-z)2z=0$$

或

$$\xi x+\eta y+\zeta z-r^2=0.$$

其法線之方向餘弦與 x,y,z 成正比,故其法線卽爲由原點直達(x,y,z)之半徑矢量也.

復觀橢圓面以坐標軸爲其主軸者:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其切面方程式爲

$$\xi\frac{x}{a^2}+\eta\frac{y}{b^2}+\zeta\frac{z}{c^2}=1$$

例 題

1. 求下列各曲面在所示[illegible]之切[illegible]

(a) $x^2+2xy-[illegible]$ 在$([illegible], 1, 1)$

(b) $(x^2+y^2)^2+x[illegible]$ 在$([illegible],1,1)$;

(c) $\sin^2x+\cos([illegible])=\frac{3}{4}$ 在$\left(\frac{\pi}{[illegible]}, \frac{\pi}{[illegible]}\right)$

2. 求 $\sin x+\cos y=[illegible]$ [illegible]

3. 求 $y(ax+b)=cx^{[illegible]}$ [illegible] 之[illegible]交[illegible]之曲率

4. 設有一曲線[illegible] 求[illegible]

5. 證下列三曲面

$$[illegible]=a, \quad \sqrt{[illegible]} \quad \sqrt{[illegible]} \quad \sqrt{[illegible]} \quad \sqrt{[illegible]+z^2}=c$$

垂直相交於一點.

6. 設 A, B 兩點以相等常速度運動，A 由原點沿 [illegible] 軸，B 由([illegible],0)點平行於 y 軸運動，求其連接 A 及 B 各直線所包之曲[illegible].

7. 試證
$$(x+y-a)^3+27axy=0$$
與 $x+y=a$ 相交處爲其反曲點.

8. 討論下列各曲線之奇點:

(a) $F(x,y)=ax^3+by^3-cxy=0$;

(b) $F(x,y)=(y^2-2x^2)^2-x^5=0$;

(c) $F(x,y)=(1+e^{\frac{1}{x}})y-x=0$;

(d) $F(x,y)=y^2(2a-x)-x^3=0$;

(e) $F(x,y)=(y-2x)^2-x^5=0$.

9. 設 (x,y) 爲 $F(x,y)=0$ 之重點，假定 F 在 (x,y) 之二重偏導數不全等於零，試求 (x,y) 上兩切線之角. 求(a)蝶線在其重點上兩切線間之角,(b)求 $F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0$ 在其重點上兩切線間之角.

10. 求定 a 及 b，使

[illegible]

[illegible]

在(1,1)垂直相交並有同一[illegible]

11. 若有一曲面如 [illegible] 則其在 (x,y,z) 之切面方程式為

[illegible]

12. 設 K' 及 K'' 為兩圓，有[illegible]於 K' 及 K'' 者，亦必垂直於經過 A 及 B 之任何圓.

13. 設有 [illegible]

由是求 [illegible] 及 [illegible] 以 $x,y,$[illegible] 之函數表之.

第三節　函數組轉換式及攝影

3.3.1　總論

既明上述關於隱函數之理，吾人得推廣用以論函數組問題，換言之，將多個函數同時討論之．茲先就其最重要情形論之，即假定函數之個數與自變數之個數相等者．設有兩函數如

$$\xi=\phi(x,y) \quad 及 \quad \eta=\psi(x,y)$$

在 xy 平面中某變區 R 之內均有可導性，則其意義可由兩不同方法闡明之．其一為轉換或攝影．在 xy 平面中之一點 P，其坐標為 (x,y) 將因是而轉換或攝影於 $\xi\eta$ 平面中一點，後者即以前者之影稱之．如本卷第一章中所述之仿射轉換或攝影：

$$\xi=ax+by$$

$$\eta=cx+dy,$$

其中 a,b,c,d 為常數者，乃其最淺顯之一例也．為說明之便，亦可視 (x,y) 及 (ξ,η) 為同一平面中之點，於是此公式之意義，為 xy 平面之轉換或攝影於己，遂此而 (x,y) 將轉入於 (ξ,η) 矣．

欲論轉換或攝影，其最基本問題，厥為其逆轉換或逆攝影之能否存在，換言之，即 $\xi=\phi(x,y)$ 及 $\eta=\psi(x,y)$ 之是否可逆，從而將 x,y 表為

ξ,η 之函數，更進而考其逆函數之是否可導而已.

設(x,y)在一變區 R 中變化時，其影 (ξ,η) 在 $\xi\eta$ 平面中之一變區 B變化者，則 B 稱之爲 R 之影區. 苟 R 中兩不同之點必有 B 中兩不同之點以應之者，則吾人必可爲 B 中任何一點求得其影於 R 之中. 於是 B中每一點有R中唯一之點卽其影以應之. 是卽 $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ 之可逆性，其逆函數

$$x=g(\xi,\eta),\quad y=h(\xi,\eta)$$

在變區 B 中爲 ξ,η 之單值函數. 果如是，卽稱原有轉換或攝影爲一一對應，而 $x=g(\xi,\eta)$, $y=h(\xi,\eta)$稱之爲 $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ 之逆轉換或逆攝影.

苟在此轉換或攝影之過程中，$P(x,y)$ 在 R 中描繪一曲線，則其影在 B 中將隨之而繪一曲線，是爲前者之影線. 例如 $x=c$，卽平行於縱軸之直線，如攝影於 $\xi\eta$ 平面，其影線將爲

$$\xi=\phi(c,y),\ \eta=\psi(c,y),$$

其中 y 爲一參變數. 又考平行於橫軸之直線如 $y=k$，其影線將爲

$$\xi=\phi(x,k),\quad \eta=\psi(x,k).$$

據是以觀，試令 c 相繼取得 $c_1,c_2,c_3,\cdots\cdots$諸值，k 取得 $k_1,k_2,\cdots\cdots$，則與垂直線網相應者爲一曲線網，觀圖 3.6 及 3.7，可以見矣. 爲推理之

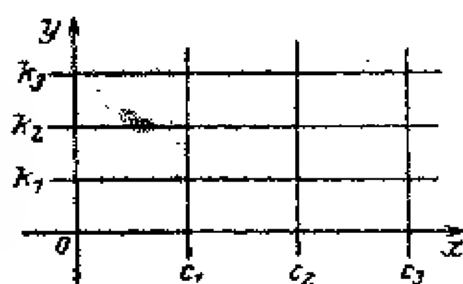


圖 3.6

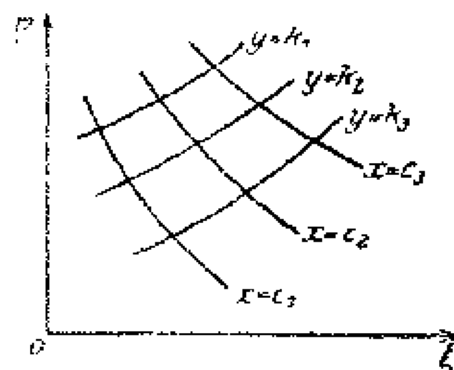


圖 3.7

便，組成曲線網之兩曲線族可由隱函數形式表而出之，如上述逆攝影之方程式爲

$$x=g(\xi,\eta),\quad y=h(\xi,\eta),$$

則與 $x=c, y=k$ 相應之曲線網爲

$$g(\xi,\eta)=c \quad \text{及} \quad h(\xi,\eta)=k.$$

據同理，可知在 $\xi\eta$ 平面中如有一直線網 $\xi=a$ 及 $\eta=b$，則其影之在 xy 平面中爲一曲線網如

$$\phi(x,y)=a,\quad \psi(x,y)=b.$$

茲更舉例於後以明上說．

攝影中有所謂單圓反射或稱倒徑攝影者，其方程式爲

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

據此，設有一點 $P(x,y)$，則其影爲一點 $Q(\xi,\eta)$，居於同一直線 OP 之上而又滿足 $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{x^2+y^2}$，故知 $OQ=\frac{1}{OP}$．由是可見由原點直達 P 之半徑矢量及其直達 Q 之半徑矢量相乘之積爲 1．故試作一圓，其半徑爲 1 者，則點在圓之外者將轉入於內，在其內者將轉而至外．復因 $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{x^2+y^2}$ 之故，可知其逆攝影必爲

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

吾人可假定 xy 平面中將原點除外者 x 及 y 之變區 G，而 ξ 及 η 之變區爲 $\xi\eta$ 平面，將其中原點除外．於是與直線 $\xi=c$，$\eta=k$ 相應者爲 xy 平面中之圓 $x^2+y^2-\frac{1}{c}x=0$ 及 $x^2+y^2-\frac{1}{k}y=0$，在原點分別與縱橫軸相接觸者．據同理 xy 平面中之垂直直線網 $x=\alpha$，$y=\beta$，必有 $\xi\eta$ 平面中之兩圓線族，在原點分別與縱橫軸相接觸者與之相應也．

其次，試一觀下列攝影：

$$\xi=x^2-y^2,\qquad \eta=2xy.$$

考其特性，凡直線 $\xi=c$，將在 xy 平面中攝成直角雙曲線，以 $x=y$ 及 $x=-y$ 爲其漸近線者．又直線 $\eta=c$ 之影則爲直角雙曲線之以坐標軸爲漸近線者．此兩族雙曲線成垂直相交之勢，觀圖3.8自明．又 xy 平面中與縱橫軸平行之直線將在 $\xi\eta$ 平面中攝成兩族拋物線，如 $x=c$ 之影爲 $\eta^2=4c^2(c^2-\xi)$，$y=c$ 之影爲 $\eta^2=4c^2(c^2+\xi)$．此種拋物線皆以原點爲焦心，以 ξ 軸爲軸者，即所謂同焦點及同軸拋物線，如圖3.9．

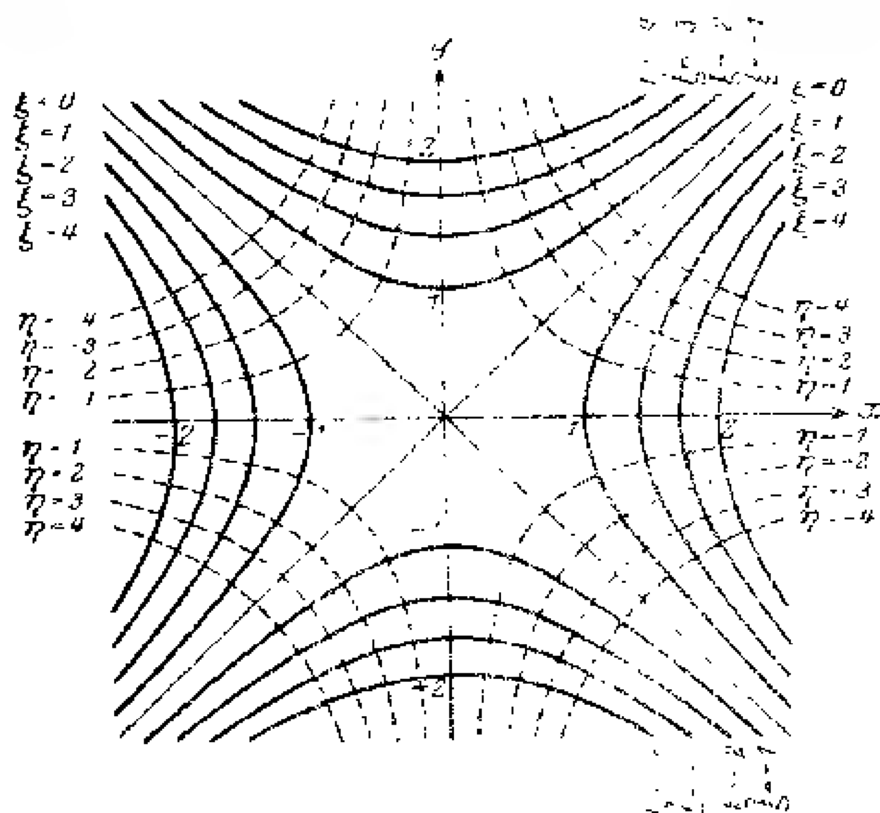


圖 3.8

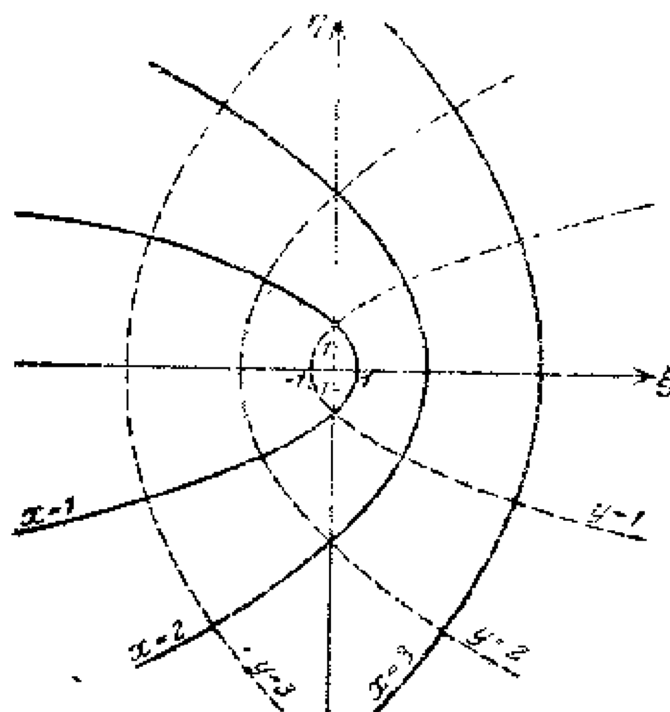


圖 3.9

上述攝影之有一一對應性者又可從另一觀點闡明之；其法乃視此為柔體之一種形變.試設想有一柔體在某時間內分佈於一區域 R,其後因運動而發生形變，其分佈之區域原為 R 者，因此之故，乃變為另一區

域 B. 此柔體中之每一質點在未變前爲 R 中之(x,y), 既變後爲 B 中之(ξ,η). 然則所謂一一相應, 自其物理學上之意義言之, 各質點在運動之後依然可以復識, 皆爲各自分離可辨之質點, 運動後依然可以分辨; 此一事實, 在物理學上至爲顯然, 其在數學上則由其攝影之一一相應性表而出之也.

3.3.2. 曲線坐標之應用

考方程式 $\xi=\phi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y)$

之義, 又可視爲平面中坐標之轉移而闡明之. 苟此兩種函數 ϕ 及 ψ 未有直線性, 則其轉移即無仿射性而爲曲線坐標之應用.

吾人試作如前之假定, 謂 (x,y) 在 xy 平面中某區 R 內變化時, (ξ,η)在 $\xi\eta$ 平面中之一對應區 B 中變化, 且 B 中每一點必有 R 中之一點與之對應, 換言之, 此轉移式有一一相應性. 其逆轉移以 $x=g(\xi,\eta)$, $y=h(\xi,\eta)$表之.

所謂某區 R 內一點之坐標, 其意爲一組實數, 用以規定此一點之位置且僅能規定此一點之位置者. 普通應用之直角坐標爲最簡單之情形; 他如圓坐標

$$\xi=r=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\eta=\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (0\leqq\theta<2\pi),$$

亦爲其重要之一例.

既明坐標主要用意之所在, 試一考 $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, 其意乃謂每一點(x,y)有兩數 ξ 及 η 與之相應, 循是以論, B 中每兩數(ξ,η)必確定他兩數(x,y), 從而即能確定唯一之點 P 在 R 中之位置, 因是之故, (ξ,η) 即可爲 P 點之坐標. 坐標軸 $\xi=c$ 及 $\eta=c$ 在 xy 平面中由兩族曲線表而達之, 其方程式爲 $\phi(x,y)=c$ 及 $\psi(x,y)=c$. 此兩族曲線在 xy 平面中組成一曲線網, 而(ξ,η)之稱爲曲線坐標, 其原因即由於是.

綜觀以上所論關於方程式 $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$之兩種說明(攝

影與坐標轉移)僅爲觀點上之差異．其間固有密切關係可言．蓋據攝影之說，$\xi\eta$ 平面中之曲線，與 xy 平面中平行於坐標軸之直線相應者，可作爲 $\xi\eta$ 平面中之曲線坐標系，倒言之，xy 平面中之曲線坐標網 $\xi=\phi(x,y)$，$\eta=\psi(x,y)$ 亦可視爲 $\xi\eta$ 平面中平行於坐標軸之直線所攝於 xy 平面中之影．就 xy 平面中某變區 R 而言，吾人可視 ξ,η 爲一種新坐標，用以規定點之位置者；若將 xy 及 $\xi\eta$ 兩平面中對峙之變區 R 及 B 並觀之，則此兩方程式可作爲兩變區間之對應，其一之點攝影於其他．由相異之觀點，遂有不同之解釋，惟爲求意義之透澈明瞭，不妨將兩種不同解釋同時並用也．

例如就圓坐標 (r,θ) 言之，r 及 θ 可爲視 $r\theta$ 平面中之垂直坐標，而圓 $r=c$ 及直線 $\theta=c$ 即轉於 $r\theta$ 平面中平行於坐標軸之直線．若 xy 之變區 R 爲一圓如 $x^2+y^2\leqq 1$，則在 $r\theta$ 平面中與之對應之變區 B 爲一長方形 $0\leqq r\leqq 1$ 及 $0\leqq\theta<2\pi$．由是知 $\theta=0$ 及 $\theta=2\pi$ 上之點與 R 中同一之點相應，而原點 $x=0$，$y=0$ 之影則爲一直線 $r=0$．

他如拋物線坐標亦爲曲線坐標之一類．試觀下列同焦點之拋物線族

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

其焦點在原點，其軸爲橫軸者，可見經過平面中每一點，有兩拋物線，其一之 p 爲正，其他之 p 爲負，此兩個 p 乃滿足 $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ 之兩值，試分別以 ξ 及 η 名之，則有

$$\xi=-x+\sqrt{x^2+y^2},\quad \eta=-x-\sqrt{x^2+y^2}.$$

此兩數可作爲 xy 平面中之曲線坐標，而同焦點之拋物線即成坐標網矣，觀圖 3.9，將其中 (x,y) 與 (ξ,η) 對調卽可見之．惟應用拋線坐標時，當注意每兩數 (ξ,η) 有兩點 (x,y) 及 $(x,-y)$ 與之相應，蓋每兩拋物線有兩交點也．然則欲求 (x,y) 與 (ξ,η) 之一一相應，當加以 $y\geqq 0$ 之限制．在此上半平面之任何變區 R 遂與 $\xi\eta$ 平面中之變區 B 成一一相應，而 B 中每點之直角坐標與其影在 R 中之拋線坐標完全無異．

3.3.3. 推廣於兩個以上之自變數

設有三個或多於三個之自變數，上述諸理仍有可論．如有三個連續可導函數

$$\xi=\phi(x,y,z),\quad \eta=\psi(x,y,z),\quad \zeta=\chi(x,y,z),$$

論其意義，可視爲 xyz 空間中某變區 R 攝影於 $\xi\eta\zeta$ 空間中之一變區 B. 苟其攝影有一一相應性，則 B 中每一影點 (ξ,η,ζ) 必有 R 中之一原點與之相應，其坐標由

$$x=g(\xi,\eta,\zeta),\quad y=h(\xi,\eta,\zeta),\quad z=l(\xi,\eta,\zeta)$$

可以識之，而 (ξ,η,ζ) 又可視爲 R 中 P 點之坐標. 於是 $\xi=$ 常數，$\eta=$ 常數，$\zeta=$ 常數，或

$$\phi(x,y,z)=\text{常數},\quad \psi(x,y,z)=\text{常數},\quad \chi(x,y,z)=\text{常數}$$

爲三族曲面，將變區 R 掩蔽者，得以坐標曲面網稱之. 此種一一相應之攝影又得以流體之形變闡明之，與前論兩個自變數時正同.

空間中坐標轉移之例，以球坐標爲最普通常見. 所謂球坐標，乃以下列三數決定空間中 P 點之位置者：(一) 其點與原點相去之距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，(二)經度[1] ϕ，即 xz 平面與 P 及 z 軸所成平面間之角，(三)極距[2] θ，即半徑矢量 OP 與正 z 軸間之角. 以此規定 P 之位置，則其與直角坐標 x,y,z 間之關聯必爲

$$x=r\cos\phi\sin\theta,$$
$$y=r\sin\phi\sin\theta,$$
$$z=r\cos\theta.$$

觀圖 3.10，可以見之. 至其逆轉移，則爲

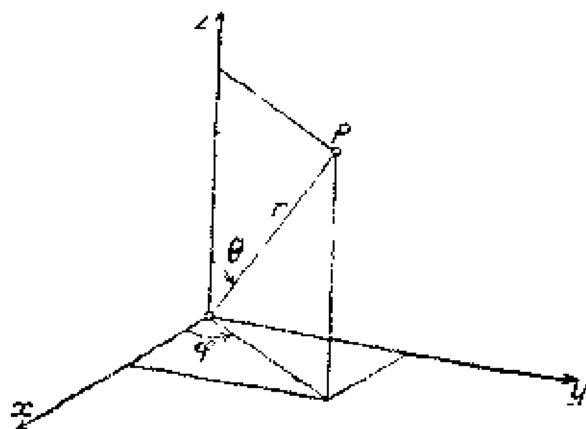


圖 3.10

(1) longitude; geographische Länge (2) polar distance; Poldistanz

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\phi=\arc\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arc\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\theta=\arc\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\arc\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

就平面中之圓坐標而言，其中原點爲一特殊點，蓋在此無一一相應性，其角在此不能決定故也．在空間中之球坐標，其 z 軸全體均爲特殊，因其經度在此不能確定，而在原點上之極距亦不能確定．明乎此，可知球坐標系之坐標曲面網爲：(一) r 爲常數時，以原點爲中心之同心球面，(二) ϕ 爲常數時，經過 z 軸居於 xy 平面上之平面族，(三) θ 爲常數時，以 z 軸爲軸，原點爲頂之圓錐面，觀圖 3.11，可以瞭然無餘也．

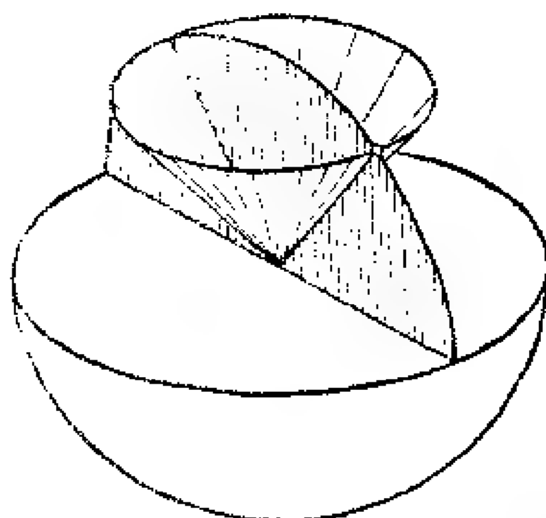


圖　3.11

其次又有所謂柱坐標[1]者，乃在 xy 平面中改用圓坐標而仍將 z 作爲坐標，故其與直角坐標之關聯爲

$$x=\rho\cos\phi,$$

$$y=\rho\sin\phi,$$

$$z=z;$$

其逆函數爲

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\phi=\arc\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arc\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z=z.$$

論其坐標曲面網，則(一) $\rho=$ 常數時，爲豎直圓錐面，其與 xy 平面之交線爲各種同心圓，以原點爲中心者；(二) $\phi=$ 常數時，爲經過 z 軸之平

(1) cylindrical co-ordinate, zylindrische Koordinate.

面;(三) $z=$ 常數時,爲種種平面,與 xy 平面平行者

3.3.4. 逆函數之導數

設有兩函數如

$$\xi=\phi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y)$$

苟其逆函數果能存在且有可導性,則其導數皆由是直接求得之,不必先求其逆函數而後始可求其導數也.何以言之?試將所假定存在及可導之 $x=g(\xi,\eta)$, $y=h(\xi,\eta)$ 代入於 $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, 則得恆等式如下:

$$\xi=\phi(g(\xi,\eta),h(\xi,\eta)),$$

$$\eta=\psi(g(\xi,\eta),h(\xi,\eta)).$$

然後應用鏈導法,求其對 ξ 及 η 之偏導數,則有

$$1=\phi_x g_\xi+\phi_y h_\xi,\quad 0=\phi_x g_\eta+\phi_y h_\eta,$$

$$0=\psi_x g_\xi+\psi_y h_\xi,\quad 1=\psi_x g_\eta+\psi_y h_\eta,$$

於是得知 $$g_\xi=\frac{\psi_y}{D},\quad g_\eta=-\frac{\phi_y}{D},\quad h_\xi=-\frac{\psi_x}{D},\quad h_\eta=\frac{\phi_x}{D},$$

或 $$x_\xi=\frac{\eta_y}{D},\quad x_\eta=-\frac{\xi_y}{D},\quad y_\xi=-\frac{\eta_x}{D},\quad y_\eta=\frac{\xi_x}{D},$$

是即將逆函數 $x=g(\xi,\eta)$ 及 $y=h(\xi,\eta)$ 對 ξ 及 η 之偏導數由其原函數 $\phi(x,y)$ $\psi(x,y)$ 對 x 及 y 之偏導數表而出之,其中 D 爲

$$D=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}$$

之縮寫,在求導之處假定不等於零.常以 $\xi=\phi(x,y)$ 及 $\eta=\psi(x,y)$ 對 x 及 y 之函數行列式或 Jacobian 簡稱之. 至上列各公式中,常將 $\xi=\phi(x,y)$ 簡寫爲 $\xi(x,y)$,不過爲便利之故,當無發生誤會之危險也.

例如圓坐標由直角坐標表之,爲

$$\xi=r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \eta=\theta=\arctan\frac{y}{x}$$

其偏導數爲 $r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}$, $r_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}$,

$$\theta_x=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2},\quad \theta_y=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2};$$

其 Jacobian 之值爲 $D=\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r^2}-\frac{y}{r}\left(-\frac{y}{r^2}\right)=\frac{1}{r}$.

由是以論,其逆函數(直角坐標由圓坐標表而出之)之偏導數當爲

$$x_r=\frac{x}{r},\quad x_\theta=-y,\quad y_r=\frac{y}{r},\quad y_\theta=x.$$

如是自較直接求 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 之導數,簡易多矣.

因 Jacobian 在各種討論中出現甚多,吾人乃創一符號以表之:

$$D=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}.$$

惟一考 $x=x(\xi,\eta)$ 及 $y=y(\xi,\eta)$ 對 ξ 及 η 之 Jacobian, 因

$$x_\xi=\frac{\eta_y}{D},\quad x_\eta=-\frac{\xi_y}{D},\quad y_\xi=-\frac{\eta_x}{D},\quad y_\eta=\frac{\xi_x}{D}$$

之故,可知

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi=\frac{\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x}{D^2}=\frac{1}{D}=1\div\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}.$$

由是兩函數之 Jacobian 與其逆函數之 Jacobian 間所發生之關係爲何如,可以識矣.

循是以推,吾人不難將逆函數之二重導數由其原函數之初重及二重導數表而達之(假定其高重導數果能存在).如欲求

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}=x_{\xi\xi}\quad 及\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}=y_{\xi\xi},$$

可先將

$$1=\xi_x x_\xi+\xi_y y_\xi,$$

$$0=\eta_x x_\xi+\eta_y y_\xi,$$

再度對 ξ 求導,得

$$0=\xi_{xx}x_\xi^{\,2}+2\xi_{xy}x_\xi y_\xi+\xi_{yy}y_\xi^{\,2}+\xi_x x_{\xi\xi}+\xi_y y_{\xi\xi},$$

$$0=\eta_{xx}x_\xi^{\,2}+2\eta_{xy}x_\xi y_\xi+\eta_{yy}y_\xi^{\,2}+\eta_x x_{\xi\xi}+\eta_y y_{\xi\xi}.$$

若以 $x_{\xi\xi}$ 及 $y_{\xi\xi}$ 作爲未知,將此聯立一次方程式解開之(其行列式爲 D,固已假定不等於 0 者),復將 x_ξ 及 y_ξ 之值代入其中,即得

$$x_{\xi\xi}=-\frac{1}{D^3}\begin{vmatrix}\xi_{xx}\eta_y^2-2\xi_{xy}\eta_x\eta_y+\xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_y\\ \eta_{xx}\eta_y^2-2\eta_{xy}\eta_x\eta_y+\eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_y\end{vmatrix}$$

及

$$y_{\xi\xi}=-\frac{1}{D^3}\begin{vmatrix}\xi_{xx}\eta_y^2-2\xi_{xy}\eta_x\eta_y+\xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_x\\ \eta_{xx}\eta_y^2-2\eta_{xy}\eta_x\eta_y+\eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_x\end{vmatrix}.$$

至其三重及高重導數，亦可依次求之，茲不贅述．

3.3.5. 攝影或轉換之分解與疊合

在本卷第一章中，吾人既略論仿射轉換之分解及疊合，今當推廣其義以論普遍之轉換及攝影．茲先就攝影之疊合言之．設

$$\xi=\phi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

將 R 中之 (x,y) 攝影於 B 中之 (ξ,η)，其間有一一相應性，而

$$u=\Phi(\xi,\eta),\quad v=\Psi(\xi,\eta),$$

又將 B 中之 (ξ,η) 攝影於他一變區 R' 中之 (u,v)，其間亦有一一相應性，則此可謂前兩攝影疊合之結果，得由

$$u=\Phi(\phi(x,y),\psi(x,y)),\quad v=\Psi(\phi(x,y),\psi(x,y))$$

表而達之，至其必具一一相應性，乃至爲顯明之事．明乎其間疊合之關係，得據鏈導法以知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\Phi_\xi\phi_x+\Phi_\eta\psi_x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\Psi_\xi\phi_x+\Psi_\eta\psi_x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\Phi_\xi\phi_y+\Phi_\eta\psi_y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\Psi_\xi\phi_y+\Psi_\eta\psi_y.$$

由是復據行列式之乘法定理，可知 u 及 v 對 x,y 之 Jacobian 必爲

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=(\Phi_\xi\Psi_\eta-\Phi_\eta\Psi_\xi)(\phi_x\psi_y-\phi_y\psi_x).$$

簡言之，兩攝影疊合後之 Jacobian 適爲其原攝影之 Jacobian 相乘之積；此意可表之如次：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}.$$

由是以論，若原攝影之 Jacobian 不等於零，則疊合後之 Jacobian 亦不

等於零，可斷言也.

既明上述之理，設有兩組逆之攝影，如

$$u=\Phi(\xi,\eta),\qquad v=\Psi(\xi,\eta)$$

為

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y)$$

之逆函數，則疊合之結果當為 $u=x,\ v=y$，其 Jacobian 為 1，從而得知

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=1.$$

此關係前固已證之矣.

欲論轉換之分解問題，試先就下之轉換

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=y$$

其中僅有 ξ 轉換而 η 並不變者，是卽所謂原始轉換(1)．假定此轉換之 Jacobian 在變區 R 中處處不等於零，如 $\varphi_x>0$，於是此轉換之意義，可視為變區 R 之轉變為另一變區 B；轉換之結果，令每一點沿橫軸移動而其縱坐標依然如故．經此轉換之後，(x,y) 得一新橫坐標，而此新橫坐標實與 x 及 y 有關；復考 $\varphi_x>0$ 之意，卽謂 y 始終如一而 ξ 隨 x 作獨行性之變化．惟其如是，凡點之處於 $y=c$ 之上者在轉換前後必成一一對應之關係，蓋兩點如 $P(x_1,y)$ 及 $Q(x_2,y)$，其縱坐標相同而 $x_2>x_1$ 者必從而轉於 P' 及 Q' 兩點，其縱坐標依然相同，而其橫坐標則滿足

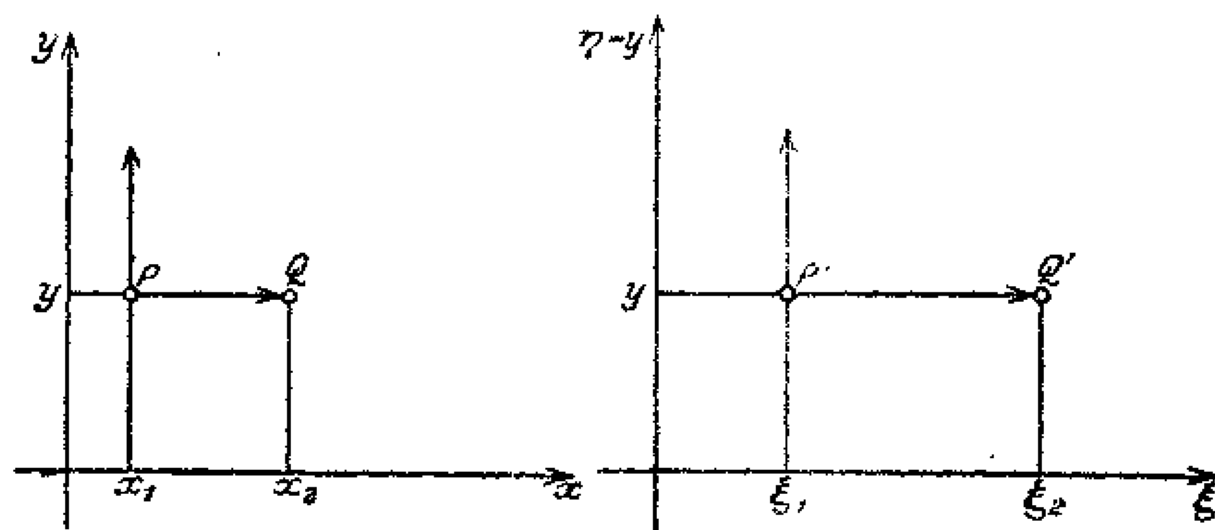
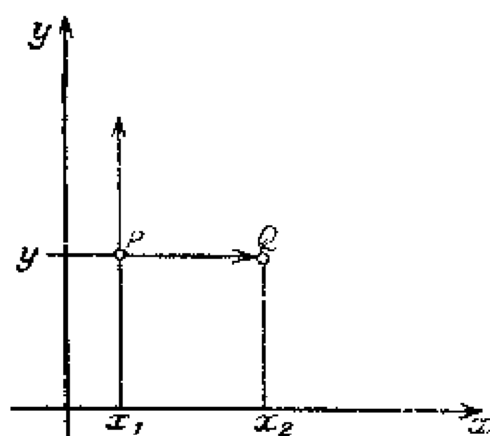


圖 5.12

(1) primitive transformation; primitive Transformation

$\xi_2>\xi_1$，如圖3.12所示.明乎是，可見轉動之向旨亦復前後一致.苟 φ_x 為負數，則 P 及 Q 將轉入於反向，其縱坐標相同而其橫坐標 ξ_1 及 ξ_2 滿足 $\xi_1>\xi_2$，如圖3.13.如是則轉動之向旨前後適相反，前在第一章中論仿射轉換時固已見及之矣.



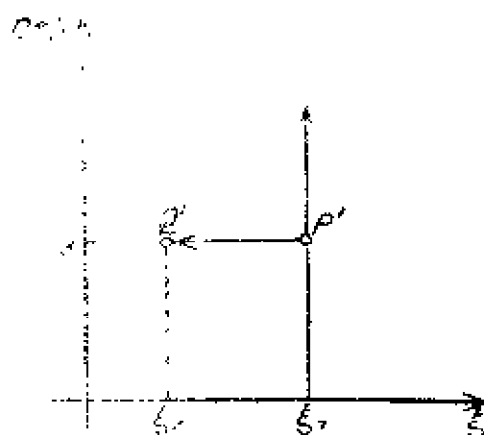


圖 3.13

設有一原始轉換

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=y,$$

其導數有連續性，其 Jacobian 在某點 $P(x_0,y_0)$ 不等於零，則在 P 點鄰近必有一逆轉換，為屬於同類之一原始轉換.此理之真確殊為顯然，蓋根據假定 $\varphi_x\neq 0$，及前已證明之隱函數定理，可知在 (x_0,y_0) 鄰近，$\xi=\varphi(x,y)$ 必有一連續可導之逆函數 $x=g(\xi,\eta)$ 與之對峙，於是

$$x=g(\xi,\eta),\quad y=\eta,$$

卽為所欲求之逆轉換，其 Jacobian 為 $g_\xi=\frac{1}{\varphi_x}\neq 0$，亦不等於零者.

復次，試設想 $\xi\eta$ 平面中一變區 B 由一原始轉換

$$u=\xi,\quad v=\psi(\xi,\eta)$$

轉入於 uv 平面中之一變區 R，則在 $\psi_\eta>0$ 假定之下，一切與前無異，惟其變換沿縱軸之方向進行耳.苟 $\psi_\eta>0$，則其轉動向旨不變，否則如 $\psi_\eta<0$，則適得其反，其理甚明，無待贅焉.

明乎是，可知兩原始轉換疊合之結果將為

$$u=\varphi(x,y),$$

$$v=\Psi(\phi(x,y),y)=\psi(x,y).$$

至其 Jacobian 則爲

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}=\phi_x\Psi_y.$$

以上論原始轉換及其疊合之道.倒而論之,則有任何轉換分解爲原始轉換之問題.故繼此所欲證者,有如下定理:設

$$u=\phi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$$

之導數處處有連續性,是爲一任意具有一一對應性之轉換,將 xy 平面中一變區R轉入於 uv 平面中之 R' 者,如是則在其 Jacobian 處處不等於零之條件下,在 R 中任何一點之鄰近必可分解爲連續可導之原始轉換.何以言之?吾人既假定其 Jacobian 不等於零,則在 R 中任何一點上 ϕ_x 及 ϕ_y 自不能同時爲零.試觀任何一點(x_0,y_0),其上 $\phi_x\neq0$.於是據前述之隱函數定理,必可在(x_0,y_0)鄰近劃得變區 $x_1\leqq x\leqq x_2$, $y_1\leqq y\leqq y_2$,又在 $u_0=u(x_0,y_0)$ 鄰近得一變區 $u_1\leqq u\leqq u_2$,其中 $u=\phi(x,y)$ 得向 x 解開,且其唯一之解 $x=g(u,y)$ 爲 u 及 y 之連續可導函數.然後將此代入於 $v=\psi(x,y)$,即有 $v=\psi(g(u,y),y)=\Psi(x,y)$.由是以觀,上列轉換在$(x_0,y_0)$之任何鄰近可視爲由下列兩原始轉換

$$\xi=\phi(x,y),\quad \eta=y$$

及

$$u=\xi,\quad v=\Psi(\xi,\eta)$$

疊合而成者.據同理,如假定在(x_0,y_0)鄰近,ϕ_y 不等於零,則上列轉換又可分解爲兩原始轉換如

$$\xi=x,\quad \eta=\phi(x,y)$$

及

$$u=\eta,\quad u=\Psi_1(\xi,\eta)\quad(=\psi\{x,g(u,x)\}).$$

此原始轉換在形式上未必與前相同,惟其中必有一坐標不變;如將 u 與 v 互易(u 與 v 之互易,可視爲三種極簡易原始轉換之結果),即可歸併於前式也.

惟轉換之分解爲原始轉換,在其變區內,不能希望其處處由同一方法分解之.觀於上述,可知其分解有兩種可能,而 R 中任何閉區可分作

若干分區①，使每一分區中上述分解得以實現也．據上述結果，又可知一普遍轉換對於平面中轉動向旨之影響爲何如．若其 Jacobian 爲正，則轉動向旨不變，否則如爲負數，則適得其反．蓋在原始轉動時，其理已得證，從而得知普遍轉換時亦復如是也．

3.3.6. 關於逆轉換之普遍定理

一普遍轉換之可逆與否，有下列定理可以解答之：

苟 $\phi(x,y)$ **及** $\psi(x,y)$ **在某點** (x_0,y_0) **鄰近有連續可導性②，而** $u_0=\phi(x_0,y_0)$，$v_0=\psi(x_0,y_0)$，**又其** Jacobian $D=\phi_x\psi_y-\phi_y\psi_x$ **在** (x_0,y_0) **不等於零，則在** (x_0,y_0) **鄰近，**$u=\phi(x,y)$ **及** $v=\psi(x,y)$ **必可逆，換言之，必有唯一之** $x=g(u,v)$，$y=h(u,v)$，**適合** $x_0=g(u_0,v_0)$，$y_0=h(u_0,v_0)$ **而在** (x_0,y_0) **鄰近滿足**

$$u=\phi(g(u,v),h(u,v))\quad 及\quad v=\psi(g(u,v),h(u,v))$$

者．果如是，則其逆函數 $x=g(u,v)$ **及** $y=h(u,v)$ **在** (x_0,y_0) **鄰近必有連續導數如**

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

此定理可由 3.3.5 直接推斷之．蓋在 (x_0,y_0) 相當小之鄰近，吾人可將 $u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 分解爲原始轉動．此種原始轉動均連續可導，且各有唯一之逆函數，亦具有連續可導性者．將此種逆轉換疊合，其結果卽爲欲求之普遍逆轉換；因其爲連續可導函數疊合而成，故必連續可導無疑．此事得證之後，其導數必有上列形式，已在 3.3.4 證之矣．

此定理可視爲隱函數定理之一種特殊情形．前在 3.1.5 所論者，乃限於一個方程式向其中一個變數解開之問題．試將此意推而廣之，則有下列關於隱函數之普遍定理：

苟 $\phi(x,y,u,v,\cdots\cdots,w)$ **及** $\psi(x,y,u,v,\cdots\cdots,w)$ **爲連續可導之函**

①是乃掩蔽定理之必然結果．　②函數之有連續性而其導數亦連續者謂之連續可導．

數,復以 $x_0, y_0, u_0, v_0, \cdots\cdots, w_0$ 表一點,滿足

$$\varphi(x, y, u, v, \cdots\cdots, w)=0 \quad 及 \quad \psi(x, y, u, v, \cdots\cdots, w)=0$$

者,又假定 φ 及 ψ 對 x 及 y 之 Jacobian 在該點不等於零(即 $D=\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x\neq 0$),則 $\varphi=0$ 及 $\psi=0$ 在該點鄰近必可對 x 及 y 解開,而其解 x 及 y 必為 $u, v, \cdots\cdots, w$ 之連續可導函數.

此理之證明,殊無不難.蓋據 $D\neq 0$,不妨假定 $\varphi_x\neq 0$.於是據 3.1.5 所證之理,如令 $x, y, u, v, \cdots\cdots, w$ 之變限於 $x_0, y_0, u_0, \cdots\cdots, w_0$ 之相當小鄰近中,必可將 $\varphi(x, y, u, v, \cdots\cdots, w)=0$ 對 x 解開;其解 $x=g(y, u, \cdots\cdots, w)$ 為一連續可導函數,復有偏導數 $g_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_x}$ 者.然後將 $x=g(y, u, \cdots\cdots, w)$,代入於 $\psi(x, y, u, \cdots\cdots, w)$,將有

$$\psi(x, y, u, \cdots\cdots, w)=\Psi(y, u, \cdots\cdots, w),$$

復考其偏導數 Ψ_y,則有 $\quad \Psi_y=\psi_y-\psi_x\frac{\varphi_y}{\varphi_x}=\frac{D}{\varphi_x};$

由是知 Ψ_y 亦不等於零.於是令 $y, u, v, \cdots\cdots, w$ 之變限於 $y_0, u_0, \cdots\cdots, w_0$ 之相當小鄰近中(假定較前所限定之範圍為小),必可將 $\Psi=0$ 對 y 解開,其唯一之解 $y=h(u, v, \cdots\cdots, w)$ 自必連續可導無疑.惟如是,若將 $y=h(u, v, \cdots\cdots, w)$ 代入於 $x=g(y, u, v, \cdots\cdots, w)$,即可使 x 表達為 $u, v, \cdots\cdots, w$ 之函數,亦同具連續可導性者.故上述之理,於此得證,所當注意者,$x, y, u, v, \cdots\cdots, w$ 之變,必限於 $x_0, y_0, \cdots\cdots, w_0$ 相當小之鄰近耳.

3.3.7. 論函數之相倚

觀上述隱函數之理,有一極重要之假定,即 Jacobian D 之不等於零.苟 D 在點 (x_0, y_0) 上等於零,則方程式在其鄰近之能否解開,為不可知之事.其逆函數即能存在,未必有可導性,蓋在此情形之下,乘積 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\cdot\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ 將等於零,而據前所述,當為 1 也.

舉例言之.方程式如 $\qquad u=x^3, \quad v=y$

自為可解;其解為 $\qquad x=\sqrt[3]{u}, \quad y=v.$

其 Jacobian 在原點實等於零;然 $\sqrt[3]{u}$ 在原點之不可導,則顯而易見.他如

$$u=x^4-y^2, \quad v=2xy$$

在原點鄰近不能有單一之解，蓋 xy 平面中之任何兩點 (x, y) 及 $(-x, -y)$ 與 uv 平面中同一點相應也.

惟 Jacobian D 若不僅在某一點上為零，但其點鄰近處處為零者，則其轉換謂有崩潰性(1). 果如是，則 $u=\phi(x, y)$ 及 $v=\psi(x, y)$ 兩函數必彼此相倚(2). 試先就最特殊及淺近之情形言之. 苟 ϕ_x 及 ϕ_y 處處為零，則 $\phi(x, y)$ 為一常數；於是 (x, y) 在一變區內變動時其影 (u, v) 始終自限於一直線 $u=c$ 之上，而是自無兩變區間之一一相應可言矣. 苟 $D=0$ 而 ϕ_x 及 ϕ_y 兩者間有一不等於零，其情形亦復相似. 試假定 ϕ_x 在 (x_0, y_0) 上不等於零，則吾人必可將其轉換分解為兩原始轉換如 $\xi=\phi(x, y)$, $\eta=y$ 及 $u=\xi$, $v=\psi(\xi, \eta)$. 蓋此分解在 $\phi_x \neq 0$ 條件必為可能，前在 2.3.5 中已證明之. 復因 $D=\phi_x\psi_\eta=0$ 之故，可知 ϕ_x 不等於零之處，ψ_η 必在在為零，而是知 $v=\psi(\xi, \eta)$ 必與 η 無關，故 v 為一僅隨 $\xi=u$ 而變之函數. 循是以論，遂得下列結論：

苟一轉換之 Jacobian 處處為零，則 xy 平面中之一變區未能與 uv 平面中之一變區一一相應，前者將由是而轉入於 uv 平面中之一曲線，蓋在此情形之下，在某一變程中，u 不論如何變化，與之相應者為同一之 v. 惟如是，苟 Jacobian 某處處為零，則其函數必彼此相倚，換言之，其間必有一關係存在：

$$F(\phi, \psi)=0,$$

此關係不論 x, y 在上述變區內如何變化皆能滿足也. 吾人以 $F(u, v)=0$ 為 uv 平面中一曲線之方程式，上述 xy 平面中之一變區將完全轉移於此，故任何 (x, y) 之居於此變區之內者皆滿足

$$F(\phi(x, y), \psi(x, y))=0,$$

從而可知其為 x 及 y 間之一恆等式也.

例如
$$\xi=x+y, \quad \eta=(x+y)^2,$$
即為一崩潰轉換. 蓋 xy 平面中之點將由是而轉入於 $\xi\eta$ 平面中之一拋物線 $\xi=\eta^2$. 至此轉換

(1) degenerate: ausgeartet. (2) dependent: voneinander abhangig.

之不可逆，爲顯而易見之事；凡點之處於 $x+y=$常數之上者皆移於一點(ξ,η)，其不可逆，自無待論. 至其 Jacobian 之等於零，讀者可自證之.

3.3.8. 理論之推廣

將上述之理推廣於三個或三個以上之自變數，其事殊不難. 設轉換中包括有三個變數如

$$\xi=\phi(x,y,z),\quad \eta=\psi(x,y,z),\quad \zeta=\chi(x,y,z),$$

$$x=g(\xi,\eta,\zeta),\quad y=h(\xi,\eta,\zeta),\quad z=l(\xi,\eta,\zeta),$$

則其 Jacobian 爲

$$D=\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\phi_x & \psi_x & \chi_x\\ \phi_y & \psi_y & \chi_y\\ \phi_z & \psi_z & \chi_z\end{vmatrix}.$$

苟其含有 n 個自變數者：

$$\begin{aligned}\xi_i&=\phi_i(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)\\ x_i&=g_i(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)\end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots\cdots n.$$

則其 Jacobian 爲

$$\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_n}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

當轉換疊合時，其 Jacobian 必相乘如：

$$\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)}{\partial(\eta_1,\eta_2,\cdots\cdots,\eta_n)}\cdot\frac{\partial(\eta_1,\eta_2,\cdots\cdots,\eta_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)}=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)},$$

此與前亦復相同. 又任何轉換與其逆轉換之 Jacobian 相乘必爲 1，亦與前無異. 至轉換之疊合及分解，轉換之可逆及轉換之相倚等等，在三個以上自變數時均一一有效，無待縷述.

觀上述所論轉換之理，與前述仿射轉換頗多相同之處，如在此之 Jacobian 卽爲前之行列式. 此事之所以然，亦不難明瞭. 蓋 $\xi=\phi(x,y)$

及 $\eta=\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 鄰近 [illegible] 皆可由下式展開之:

$$\xi-\xi_0=(x-x_0)\varphi_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\varphi_y(x_0,y_0)$$
$$+\epsilon\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$\eta-\eta_0=(x-x_0)\psi_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\psi_y(x_0,y_0)$$
$$+\delta\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

其中 ϵ 及 δ 乃隨 $\sqrt{(x-x_0)^2+ [illegible]}$ 而 [illegible] 是,當 $|x-x_0|$ 及 $|y-y_0|$ 相當小時,其轉換可 [illegible]

$$\xi=\xi_0+(x-x_0)\varphi_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\varphi_y(x_0,y_0),$$

$$\eta=\eta_0+(x-x_0)\psi_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\psi_y(x_0,y_0)$$

近似表達之也.

例　　題

1.若 $f(x)$ 爲連續可微,則下列轉 [illegible]

$$[illegible]\ f(x), \qquad [illegible]\ f(x),$$

在 xy 平面中任何變區,其中 $f(x)$ [illegible] 之轉換之形式爲

$$[illegible](u), \qquad [illegible](v)$$

2.一轉換謂有保角性,倘任何兩曲線間之角 [illegible]

(a)試證
$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \eta=\frac{[illegible]}{x^2+y^2}$$

爲一保角轉換.

(b)試證任何圓 [illegible] 由上列轉換 [illegible]

(c)求上列轉換之 Jacobian.

3.經過一點 O 之三圓所組成之 [illegible] 形,其中三 [illegible] 之和必等於 π,試證之.

4.試證
$$u=[illegible](\xi,\eta),\ v=[illegible](x,y)$$

之保形性,假定 φ,ψ 滿足
$$[illegible].$$

5.下列方程式
$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}=1 \quad (a>b)$$

決定 t 之兩值 t_1 及 t_2,隨 x,y 而變者

$$t_1=\lambda(x,y),$$

$$t_2=[illegible](x,y)$$

(a)證 $t_1=c$, $t_2=c$ 為橢圓及雙曲線,且依點相同;

(b)證 $t_1=c$ 與 $t_2=c$ 互相垂直;

(c) t_1 及 t_2 可作曲線坐標用(所謂共焦坐標),將 x,y 由此坐標表達之.

(d)將 $\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(x,y)}$ 由 x,y 表達之.

(e)兩曲線以焦點坐標表示之後

$$t_1=f_1(\lambda),\qquad t_2=g_1(\lambda)$$

及

$$t_1=f_2(\lambda),\qquad t_2=g_2(\lambda)$$

如互相垂直,其條件為何如.

6. (a)下列方程式

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t}=1\qquad(a>b>c)$$

決定不同之三實根 t_1, t_2, t_3, 分別落於如下區間之中

$$-\infty<t<c,\quad c<t<b,\quad b<t<a,$$

假定(x,y,z)不在坐標面之中.

(b)證經過任何一點之三曲面 $t_1=c_1$, $t_2=c_2$, $t_3=c_3$ 互相垂直.

(c)將 x,y,z 由焦點坐標 t_1,t_2,t_3 表達之.

7. 設有一轉換式如

$$\xi=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right),\quad \eta=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(a)證其有保角性;

(b)證其能轉換任何直線之經過原點及圓之以原點為中心者於同焦點之兩次曲線如:

$$\frac{\xi^2}{c+\frac{1}{c}}+\frac{\eta^2}{c-\frac{1}{c}}=1$$

8. 設有轉換式如

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

(a)證任何兩曲面間之角不變,(b)證球面被轉換於球面或平面.

9. 若一曲面 $z=u(x,y)$ 之法線均與 z 軸相交,則其曲面必為一旋成曲面,證之.

第四節 理論之應用

3.4.1. 曲面理論中之應用

在空間中欲為一曲面建立一方程式,常用參變數之表達法,此與前論曲線時其意正同.蓋參變數之用非但有其便利而已也.惟欲表達一曲面,必用兩個參變數,其方程式有如下形式:

$$x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v),$$

其中 u 及 v 為兩參變數而 x,y,z 則為 u,v 之函數.當 u 及 v 在 uv 平面中某區 R 內變化時,點之直角坐標為 x,y,z 者將從而在 xyz 空間中描繪一圖形,通常為一曲面如 $z=f(x,y)$.蓋由上列三方程式,可將其中兩者對 u 及 v 解出,代入於第三式,即得一曲面之方程式如 $z=f(x,y)$.但是以論,若[illegible]果[illegible]之一曲面,則

$$\begin{vmatrix}\phi_u & \psi_u & \chi_u\\ \phi_v & \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}$$

三 Jacobian 不能同時為零,即下之條件

$$(\phi_u\psi_v-\phi_v\psi_u)^2+(\psi_u\chi_v-\psi_v\chi_u)^2+(\chi_u\phi_v-\chi_v\phi_u)^2\neq 0$$

成立而後可.果如是,則在空間中任何一點鄰近必可將其坐標之一由其他兩坐標之單值函數表而出之.

例如球面之半徑為 r 者即 $x^2+y^2+z^2=r^2$,得由

$$x=r\cos u\sin v,\quad y=r\sin u\sin v,\quad z=r\cos v$$

$$(0\leq u<2\pi,\ 0\leq v\leq\pi)$$

表達之,其中 $v=\theta$ 為極距,$u=\varphi$ 為經度,可視為兩參變數也.由此一例,已可略見應用參變數之便利.蓋 x,y,z 在此皆表為 u,v 之單值函數,當 v 在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間變化時,可得其下半球,即 $z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$,而 v 在 0 及 $\frac{\pi}{2}$ 之間變化時為其上半球.如是即可不必將 $z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ 裂為兩單值支矣.

又吾人可將球面上之點由其北極投影於"赤道平面"從而攷得其參變數方程式如次.試用一直線將球面上任何一點與其北極 $(0,0,r)$ 相連,復令此直線與赤道平面相交,於是球面上之點,除北極一點外,必與赤道平面上之點成一一對應之關係(見圖[illegible]),其間關係得以

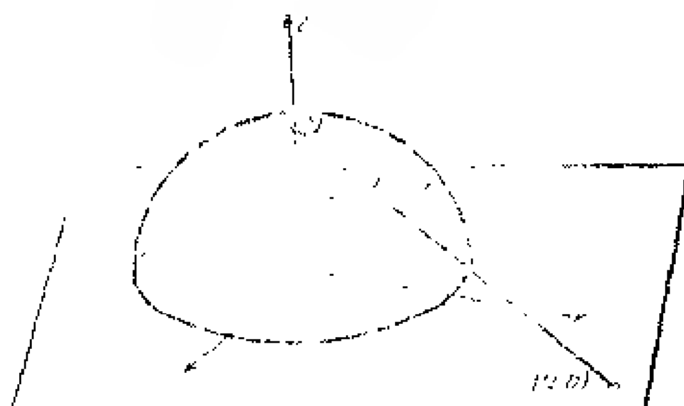


圖 3.14

$$x=\frac{2r^2u}{u^2+v^2+r^2},\qquad y=\frac{2r^2v}{u^2+v^2+r^2},\qquad z=\frac{(u^2+v^2-r^2)r}{u^2+v^2+r^2}$$

表而出之.此即可作爲球面之參變數方程式,其中 u,v 爲 u,v 平面中之直角坐標也.

復次,單葉雙曲面(見圖 3.15) 及雙葉雙曲面(見圖 3.16):

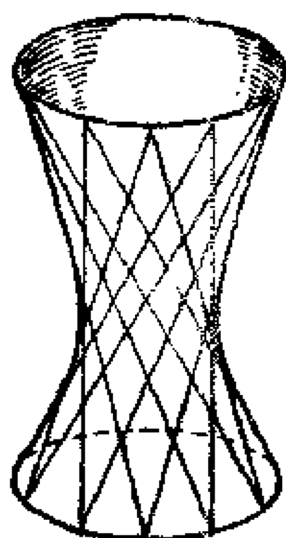


圖 3.15

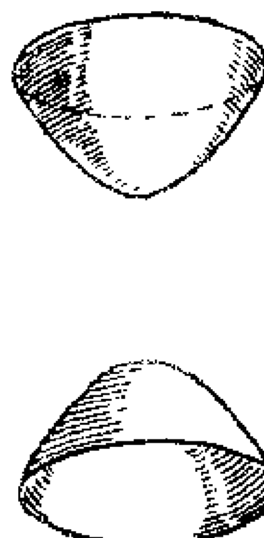


圖 3.16

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad 及 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

亦得藉用參變數以表出之.前者如

$$x=a\cos u\,\frac{e^v+e^{-v}}{2}=a\cos u\cosh v,$$

$$y=b\sin u\,\frac{e^v+e^{-v}}{2}=b\sin u\cosh v,\qquad \begin{matrix}0\leqq u\leqq 2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{matrix}$$

$$z=c\,\frac{e^v-e^{-v}}{2}=c\sinh v;$$

後者如

$$x=a\,\frac{e^v+e^{-v}}{2}=a\cosh v,$$

$$y=b\cos u\,\frac{e^v-e^{-v}}{2}=b\cos u\sinh v,\qquad \begin{matrix}0\leqq u\leqq 2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{matrix}$$

$$z = c\sin u \frac{e^{v}-e^{-v}}{2} = c\sin u \sinh v$$

要而論之，曲面之參變數方程式可視為 uv 平面之攝影於一曲面，使彼此之點發生一一相應之關係①。依是以觀，設於 uv 平面中取一曲線 $u=u(t)$, $v=v(t)$，則曲面上亦有一曲線 $x=\varphi(u(t),v(t))=x(t)$, ……與之對應。例如以球面坐標建立球面之方程式，則球面上之子午線當由 $u=c_1$ 表達之，球面上之緯度線由 $v=c_2$ 表達之。故此兩曲線族實與 uv 平面中直線之平行於縱橫坐標軸者相應也。

欲研討曲面之特性，可由其上之曲線入手。故曲面上弧長 s 之義，甚關重要，特略述之。前在第二章中，已知下列關係：

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

復因

$$\frac{dx}{dt}=x_u\frac{du}{dt}+x_v\frac{dv}{dt},\ \cdots$$

之故，得知

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

其中 E,F,G 即所謂曲面上 Gauss 之基本量(1)：

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

考其定義，可知其值與曲面之特性即其參變數方程式直接發生關聯者，是以為研討曲面之重要工具。為求簡之故，吾人可將 t 棄去，專就弧長之微分 ds 立論，稱之為曲面之"線素"(2)：

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

---

①惟不可一概而論，若用球面坐標以表達球面，則其兩極則分別與兩直線 $v=0$ 及 $v=\pi$ 相應也。

(1) fundamental quantities of the surface, Fundamentale Grossen der Fläche

(2) line element, Linienelement

據前所論,苟有一曲面如 $\Phi(x,y,z)=0$,則其法線之方向餘弦為

$$\cos\alpha=\frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{\Phi_y}{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\Phi_z}{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}}.$$

今假定其參變數方程式為 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$,則

$$\Phi(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))=0$$

對 u,v 為一恆等式,從而知

$$\Phi_x\varphi_u+\Phi_y\psi_u+\Phi_z\chi_u=0,$$

$$\Phi_x\varphi_v+\Phi_y\psi_v+\Phi_z\chi_v=0.$$

由是得 $\Phi_x=\rho(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)$, $\Phi_y=\rho(\chi_u\varphi_v-\varphi_u\chi_v)$,

$$\Phi_z=\rho(\varphi_u\psi_v-\psi_u\varphi_v).$$

其中ρ為一比例常數. 更由 E,F,G 之定義,可知

$$(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2+(\chi_u\varphi_v-\varphi_u\chi_v)^2$$
$$+(\varphi_u\psi_v-\psi_u\varphi_v)^2=EG-F^2;$$

於是 $\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2=\rho^2(EG-F^2)$.

而法線之方向餘弦遂有如下形式:

$$\cos\alpha=\frac{\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \cos\beta=\frac{\chi_u\varphi_v-\varphi_u\chi_v}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\varphi_u\psi_v-\psi_u\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

復次, $u=g(t)$, $v=h(t)$ 既可用以表達曲面上之一曲線; 試在此曲線之任何一點上作一切線,則其方向餘弦當為

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{ds}=\frac{x_uu'+x_vv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_uu'+y_vv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_uu'+z_vv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}};$$

在此暫作 $\frac{dg(t)}{dt}=u'$, $\frac{dh(t)}{dt}=v'$ 之簡寫. 明乎此,設在曲面上另

作一曲線如 $u=g_1(t)$, $v=h_1(t)$, 其切線之方向餘弦為 $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, 又應用 $\frac{dg_1(t)}{dt}=u'$, $\frac{dh_1(t)}{dt}=v'$, 則此兩曲線間之角，即其切線間角之餘弦必為

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1$$

$$=\frac{Euu'+F(uv'+u'v)+Gvv'}{\sqrt{Eu^2+2Fuv+Gv^2}\,\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}},$$

其中各導數之值自指其在兩曲線相交點之值而言也.

試更就一特殊情形而細考之. 設令 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ 中之 u 暫時固定，則得一空間中之曲線，居於上列曲面之上，以 v 為參變數者. 據同理，若令 v 固定，u 為參變，亦得曲面上之一曲線. 故與 $u=c$ 及 $v=c$ 相應者，為曲面上之參變曲線網，觀圖 3.17，可以瞭然矣.

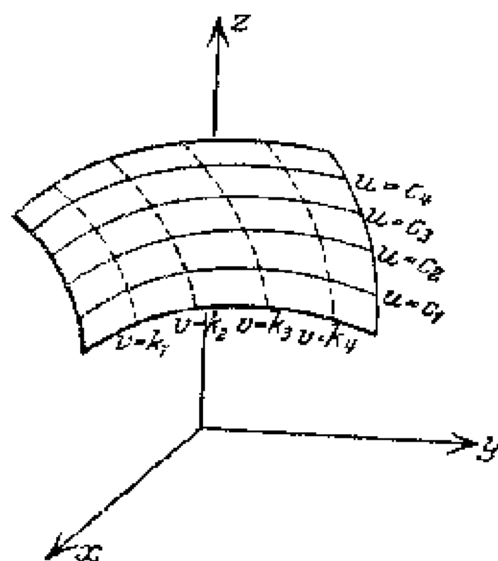


圖 3.17

復次，一平面之攝影於他一平面，可視為參變數方程式之一種，包括於上述情形之中者. 何以言之？試假定 $\chi(u,v)$ 不論 u 及 v 如何變化恆等於零，如是則當 u, v 在 uv 平面中某變區內任意變化時，其影 (x,y,z) 將在 xy 平面中描繪一變區. 故謂此方程式之意義，乃將 uv 平面中之一變區攝影於 xy 平面中之一變區，自無不可. 苟以坐標之轉換立論，則此方程式實規定 uv 平面中之一種曲線坐標，而其逆函數(苟其存在)則規定 xy 平面中之 uv 坐標系. 若以 (u,v) 為曲線坐標，則 xy 平面中之線素當為

$$ds^2=Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2,$$

其中 $$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

兹更舉一例以見參變數方程式之用：設在平面中取一圓，在同一平面中復取一直線，與圓不相交者，以此為轉軸將圓轉動之，從而舉一曲面（見圖 3.18），求其方程式由參變數表達之。為求簡之故，可假定圓處於 yz 平面之內，令 z 軸為轉軸，y 軸通過圓之中心，復假定中心之 y 坐標為 a，半徑為 r，則在 $r<|a|$ 之假定下，當圓在 yz 平面中時，必有

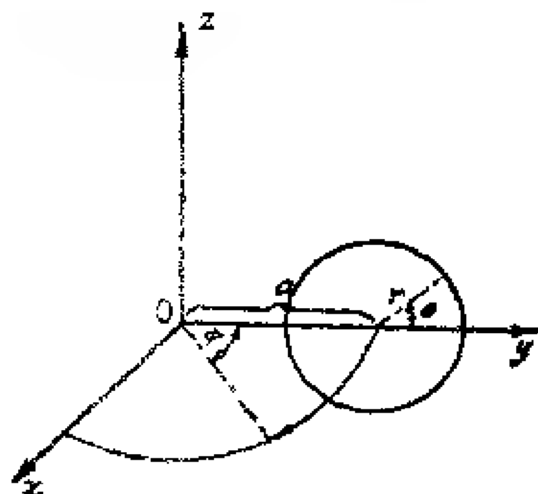


圖 3.18

$$x=0,\ y=a+r\cos\theta,\ z=r\sin\theta \qquad (0\leqq\theta<2\pi)$$

然後令其轉動，則無論如何，圓上任何一點必滿足 x^2+y^2 ……，即 $x^2+y^2=(a+r\cos\theta)^2$，$z=r\sin\theta$ 之關係。由此可知，若以 φ 表其轉的角，則

$$x=(a+r\cos\theta)\sin\phi, \qquad 0\leqq\phi<2\pi$$

$$y=(a+r\cos\theta)\cos\phi, \qquad 0\leqq\theta<2\pi$$

$$z=r\sin\theta,$$

是即所求曲面之參變數方程式也。據此以論，此曲面實由 θφ 平面中一平方形（其邊之長為 2π 者）所攝影而成者，而 $\theta=c$ 或 $\phi=c$ 中之兩端點與曲面上之一點相應，平方形之四頂點又與曲面上同一之點相應。至其線素，則為

$$ds^2=r^2d\theta^2+(a+r\cos\theta)^2d\phi^2.$$

3.4.2. 轉換之保角性

設有一轉換 $\qquad \xi=\phi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y),$

苟其能將任何兩曲線轉換於其他兩曲線而不變其間之角者，則此轉換謂有保角性。轉換之有無保角性，得由下列定理決定之：轉換之有保角性者，其必要與充分條件為

$$\phi_x-\psi_y=0, \quad \phi_y+\psi_x=0,$$

或
$$\phi_x+\psi_y=0, \quad \phi_y-\psi_x=0;$$

是即所謂 Cauchy-Riemann 之微分方程式。由前兩式言之，角之方向依然如舊，由後兩式言之，角之方向適得其反

欲證此理,試先假定轉換之保角性，則由 $\xi\eta$ 平面中兩相垂直之曲線 $\xi=c$ 及 $\eta=c$ 必與 xy 平面中兩相垂直之曲線 $\varphi(x,y)=c$ 及 $\psi(x,y)=c$ 相應,從而知

$$\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y=0.$$

於是必有一比例常數 λ 如

$$\varphi_x=\lambda\psi_y,\quad \varphi_y=-\lambda\psi_x.$$

據同理，知與 $\xi+\eta=c$ 及 $\xi-\eta=c$ 相應之曲線亦必相垂直,故

$$(\varphi_x+\psi_x)(\varphi_x-\psi_x)+(\varphi_y+\psi_y)(\varphi_y-\psi_y)=0.$$

由是得

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2=\psi_x^2+\psi_y^2.$$

然後將前式代入於此,即得 $\lambda^2=1$. 於是上述兩種 Cauchy-Riemann 微分方程式之成立,已得證矣. 欲證其同時亦為充分條件,當注意 xy 平面中之曲線 $F(x,y)=0$ 及 $G(x,y)=0$ 經轉換而入於 $F(x,y)=\Phi(\xi,\eta)$, $G(x,y)=\Gamma(\xi,\eta)$ 之後,據 Cauchy-Riemann 微分方程式必有

$$F_x^2+F_y^2=(\Phi_\xi^2+\Phi_\eta^2)(\varphi_x^2+\varphi_y^2),$$

$$G_x^2+G_y^2=(\Gamma_\xi^2+\Gamma_\eta^2)(\varphi_x^2+\varphi_y^2),$$

$$F_xG_x+F_yG_y=(\Phi_\xi\Gamma_\xi+\Phi_\eta\Gamma_\eta)(\varphi_x^2+\varphi_y^2);$$

由是遂得

$$\frac{F_xG_x+F_yG_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\sqrt{G_x^2+G_y^2}}=\frac{\Phi_\xi\Gamma_\xi+\Phi_\eta\Gamma_\eta}{\sqrt{\Phi_\xi^2+\Phi_\eta^2}\sqrt{\Gamma_\xi^2+\Gamma_\eta^2}}.$$

是即 $F=0$, $G=0$ 間之角與其影 $\Phi=0$ 及 $\Gamma=0$ 所成之角相等之謂也.

例　　題

1. (a)試將球面之半徑為1者由其北極投影於一平面,其轉換必有保角性.

   (b)試證球面上之圓將由是而轉為平面中之圓或直線.

   (c)試就此種轉換詳考一球面以赤道面為反射面而反射之，果相當於 uv 平面中何種轉換.

   (d)將球面上之線素 ds 由 u 及 v 兩轉變數表達之.

2. 就下列各球面求其線素 ds.

   (a)在一球面上: $x=\cos$ [illegible], [illegible] $\cos v$;

(b)在一雙曲面上：$x=\cos u\cosh v$，　$y=\sin u\cosh v$，　$z=\sinh v$；

(c)在一轉成面上：$r=\sqrt{x^2+y^2}=f(z)$，應用柱面坐標 z 及 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 作爲曲面上之坐標；

*(d)在下列同焦點曲面族

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t}=1$$

之一曲面 $t_3=c$，以 t_1 及 t_2 爲坐標

3.若應用新曲線坐標 r,s 以轉換一曲面，其原有輔變數爲 u 及 v，如

$$u=u(r,s),\quad v=v(r,s),$$

則其第一基本式 E,F,G 依下式轉換於新基本式 E',F',G'.

$$E'G'-F'^2=(EG-F^2)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}\right)^2.$$

4.設 t 爲曲面 S 在 P 點上之切線，將 S 與一切合 t 之平面相交之曲線，證此種曲線之曲率中心在一圓之上.

5.設 t 爲曲面 S 在 P 點之切線，其垂直截面（卽一平面經過 t 及 S 在 P 之法線者）在 P 點之曲率，吾人常以 S 沿 t 方向之曲率 k 稱之．以 P 爲起始點作一矢量，其方向爲 S 在 P 之切線方向，其長爲 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 者，則此種矢量之終點必在一兩次曲線之上.

*6.設有一曲線，其形式以兩曲面

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

之相交線表之，求其(a)切線，(b)在任何點之密吻面.

第五節　曲線族、曲面族及其包線或包面

3.5.1.　曲線族及曲面族

在前數章中，吾人已知有所謂曲線族及曲面族者，是乃屬於同類之曲線或曲面合組而成，如 $f(x,y)=c$，其中 c 之每一數值必有此族中之一曲線與之對應.

舉例言之，xy 平面中平行於縱軸之直線 $x=c$ 卽組成一族．同心圓之以原點爲中心者卽 $x^2+y^2=c^2$ 亦爲一族，蓋每一 c 可用以表其中一圓，其半徑適爲 c 者．他如直角雙曲線 $xy=c$，

如圖 3.2 所示者亦成一族，其中與 $c=0$ 相應者，爲一[illegible]雙曲線，由縱橫兩坐標軸所合成. 又一曲線在其每點上之法線亦爲曲線族之一例；若此曲線之參數方程式爲 $\xi=\varphi(t)$, $\eta=\psi(t)$,

則其法線族爲 $$(x-\varphi(t))\varphi'(t)+(y-\psi(t))\psi'(t)=0,$$

其中 t 爲一參變數. 凡曲線族之方程式中必有一參變數，以表達其中每一曲線.

曲線族之義既明，當進而論如何建立其方程式之法. 設

$$f(x,y,c)$$

爲 x 及 y 之一函數，具有連續可導性，而 c 爲一參變數，在規定變程中變化者(其實 c 爲另一自變數，因其作用不同，故符號亦異)；苟

$$f(x,y,c)=0$$

在 c 之值固定時表達一曲線，則當 c 在其規定變程中變化時所有一切曲線即組成一曲線族. 是爲一隨參變數 c 而變之曲線族. 惟族中各曲線亦可由參變數方程式表而出之，如

$$x=\varphi(t,c),\quad y=\psi(t,c),$$

當其中 c 固定時，即得族中之一曲線. t 與 c 雖同稱參變數，而其意義不可不明辨也.

例如 $$x=c\cos t,\quad y=c\sin t$$

可用以表達一切同心圓之以原點爲中心者. 又如上述之雙曲線可由

$$x=ct,\quad y=\frac{1}{t}$$

表而出之.

曲線族之方程式中，有含兩個以上之參變數者，如令 $(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0$ 中之 a 及 b 參變，c 爲固定，亦得一族，若令 a,b,c 三者均參變，則其族自包括平面中一切可能之圓. 故論曲線族時，必說明其中所含之參變數；因之有所謂單參變，二參變，三參變……之曲線族.

至於空間中之曲面族，其義亦復相似. 設有一連續可導之函數 $f(x,y,z,c)$，當 c 之值在其規定變程內固定時，

$$f(x,y,z,c)=0$$

所表者爲一曲面，則令其 c 在規定範圍中變化時從而獲得之一切曲面即組成一曲面族，如 $x^2+y^2+z^2-c^2=0$ 即爲一族球面，以原點爲中心者．又曲面族中可含兩個以上之參變數，與前論曲線族時正同．

例如

$$ax+by+\sqrt{1-a^2-b^2}\,z=1,$$

其中 a,b 爲兩個參變數，在 $a^2+b^2\le 1$ 之範圍中變化者，即代表一平面族．族中一切平面離原點之距離爲 1，自顯而可見

3.5.2. 單參變曲線族之包線

試爲平面中之曲線 E 在其每點上作一切線，即可獲得一單參變之直線族，而 E 本身即爲此直線族之包線．據此理，試觀一切圓之中心在橫軸之上，其半徑爲 1 者，即 $(x-c)^2+y^2-1=0$．實有兩直線如 $y=1$ 及 $y=-1$ 與其中每一圓相切，是即爲其包線．考其包線之所由成，乃取族中

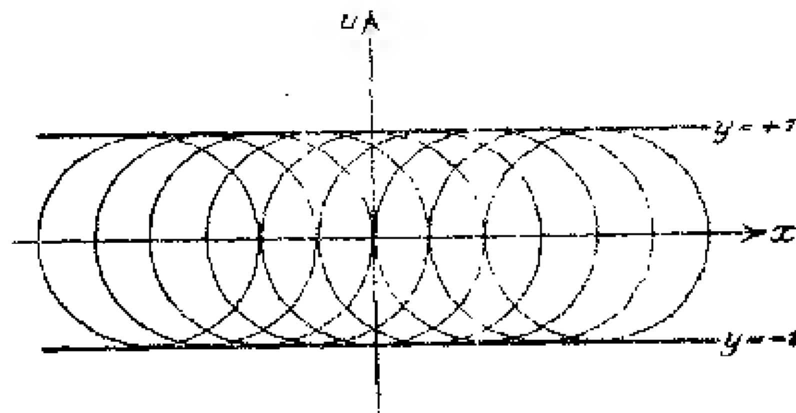


圖 3.19

任何兩曲線之與 c 及 $c+h$ 相應者，求其交點在 $h\to 0$ 之極限而已；因此之故，所謂包線，可視爲族中任何兩曲線之無限接近者相交處之軌跡也．

設有一族曲線如 $f(x,y,c)=0$，其中 c 爲一參變數．苟其果有一包線，則其與 $f(x,y,c)=0$ 之接觸點可依下法獲得之．試於族中取兩曲線如 $f(x,y,c)=0$ 及 $f(x,y,c+h)=0$，然後令其中 $h\to 0$，因假定偏導數 f_c 之存在，可知 $f(x,y,c)=0$ 與其包線接觸處必有

$$f(x,y,c)=0,\quad f_c(x,y,c)=0$$

成立．據是可將 x,y 表達爲 c 之函數，是即所求包線之參變數方程式，復將其中 c 消去，可將其形式化爲 $g(x,y)=0$．此方程式常稱爲

$f(x,y,c)=0$ 之鑑別式[1]，而其曲線 $g(x,y)=0$ 則稱爲 $f(x,y,c)=0$ 之鑑別曲線．據是以論，**若欲求一曲線族 $f(x,y,c)=0$ 之包線，當求 $f(x,y,c)=0$ 及 $f_c(x,y,c)=0$ 兩方程式之同時成立，復據是將 x,y 表爲 c 之函數或將其中之 c 消去之可矣**．

以上乃事之顯而可見者．惟包線之定義，爲一接觸線，所謂 $f(x,y,c)=0$ 之包線，爲一如是之曲線，與其中每一曲線相接觸者．然則根據上述方法所求得之曲線在何種條件之下果爲一包線，不可不加以一番探討也．

假定 E 果爲一包線，應用一參變數 c，由兩連續可導函數如

$$x=x(c),\quad y=y(c)$$

表而達之，其中 $\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2\neq 0$，又在 c 固定時，與族中曲線之與 c 相應者適相接觸．於是在接觸點上，必有 $f(x,y,c)=0$ 成立，試設想 $x(c)$ 及 $y(c)$ 代入於此，則此式不論 c 在其規定變區內如何變化皆能成立．惟如是，求導之後，必有

$$f_x\frac{dx}{dc}+f_y\frac{dy}{dc}+f_c=0.$$

復考接觸條件之所要求者，爲

$$f_x\frac{dx}{dc}+f_y\frac{dy}{dc}=0;$$

蓋 $\frac{dx}{dc}$ 及 $\frac{dy}{dc}$ 爲 E 在其每點上切線之方向餘弦，而 f_x 及 f_y 實與曲線族 $f(x,y,c)=0$ 在任何點上法線之方向餘弦成比例也．由是以論，可知 E 之必然滿足 $f_c=0$，而上述方法爲求包線之必要條件，從可見矣．

欲考上述條件之是否充分，當假定有兩連續可導函數 $x=x(c)$ 及 $y=y(c)$，表達一曲線 E，而又滿足 $f(x,y,c)=0$ 及 $f_c(x,y,c)=0$．試設想 $x=x(c)$，$y=y(c)$ 代入於 $f(x,y,c)=0$，然後求導，復注意 $f_c=0$ 之成立，即可明 E 上之點無不滿足 $f_x\frac{dx}{dc}+f_y\frac{dy}{dc}=0$．故 $f_x^2+f_y^2$

(1) discriminant, Diskriminatengleichung.

如在E之某點上不等於零,則族中曲線在此點上果有一確定切線,則兩者之接觸可必;由是以觀,必須作$f_x+f_y\neq 0$之假定,而後上述之法始爲包線之充分條件.若f_x及f_y同時爲零,則族中曲線在此將呈特異之象,欲求其與E接觸,爲不可能之事.因此之故,當鑑別曲線求得之後,必細考其果否爲一包線;鑒於以上所論,此層探討,殊不可略去也.

3.5.3. 包線舉例

[例一] $(x-c)^2+y^2=1$,是乃圓之半徑爲1,中心在x軸之上者,觀圖3.19,已可知其包線爲兩直線$y=1$及$y=-1$.此可由上法驗證之,蓋欲求$(x-c)^2+y^2=1$及$-2(x-c)=0$同時成立,必$y^2=1$而後可也.

[例二] $(x-\cos c)^2+(y-\sin c)^2=1$,是乃圓之半徑爲1而又經過原點者,故其中心在一圓(其半徑爲1,中心在原點)之上,遂得其方程式如此.此式亦可寫如

$$x^2+y^2-2x\cos c-2y\sin c=0.$$

求其對c之導數爲零,則有

$$x\sin c-y\cos c=0.$$

此兩式得由$x=0$, $y=0$滿足之.惟如假定$x^2+y^2\neq 0$,則其解爲$\sin c=\frac{y}{2}$, $\cos c=\frac{x}{2}$,由是消去c,得其包線之方程式如$x^2+y^2=4$,爲一圓,以原點爲中心,其半徑爲2者;此外復有一點,孤立於原點$x=0$, $y=0$;其事之眞確,極顯然也.

[例三] $(x-c)^2-2y=0$.是乃一拋物線族,如圖3.20所示.根據上法或由觀覺,可知其包線必爲橫軸無疑.

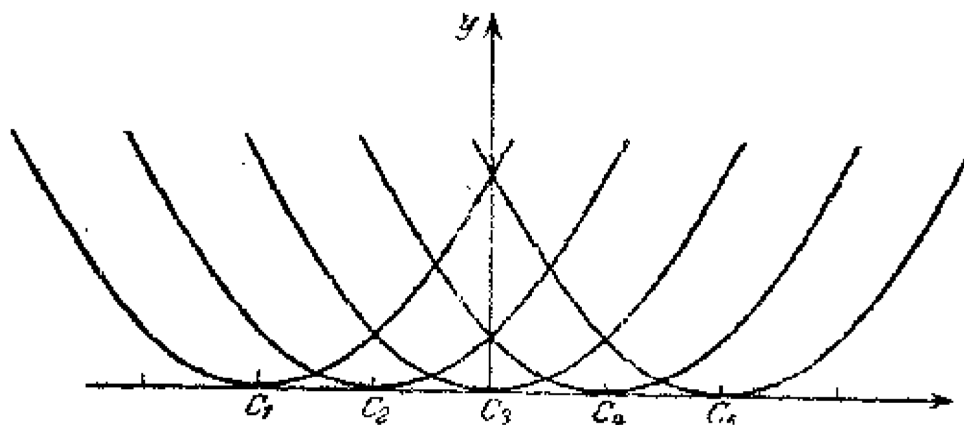


圖 3.20

[例四] $(x-2c)^2+y^2-c^2=0$.是爲一族圓,如圖3.21所示.求其對c之導數爲零,則

有 $2x-3c=0$，然後代入上式，得其包線方程式如

$$[illegible]$$

故其包線為兩直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ [illegible]例外，在原點上不相接觸也。

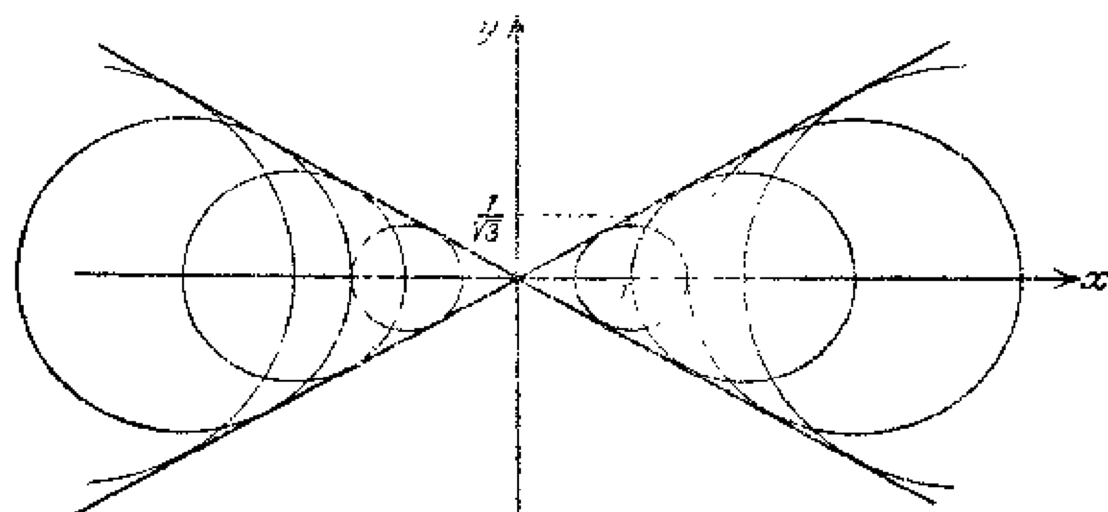


圖 3.21

［例五］ $\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=1$，是為一族直線，如圖 3.22 所示，據上法，求其包線，則因

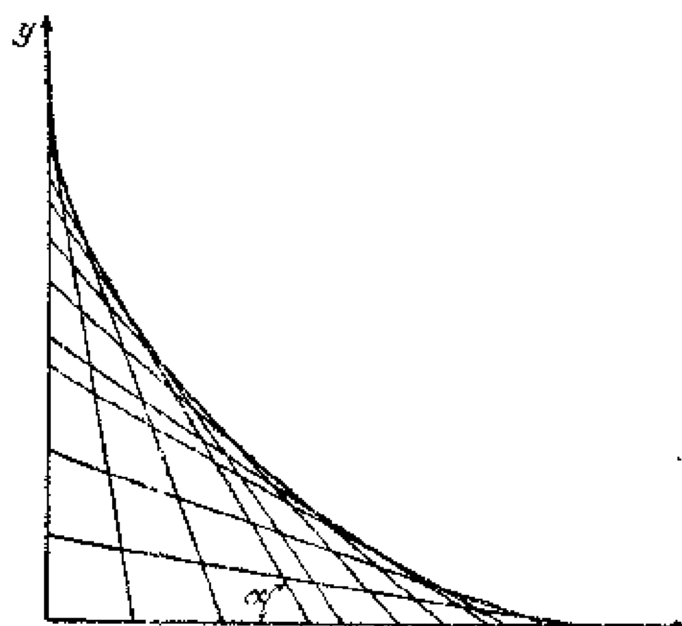


圖 3.22

$$\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}x-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}y=0$$

之故，得

$$x=\cos^3\alpha,\quad y=\sin^3\alpha.$$

將其中 α 消去，得

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$

此曲線名爲星線,爲四對稱之相遇於四尖點而成者,如圖 3.23.

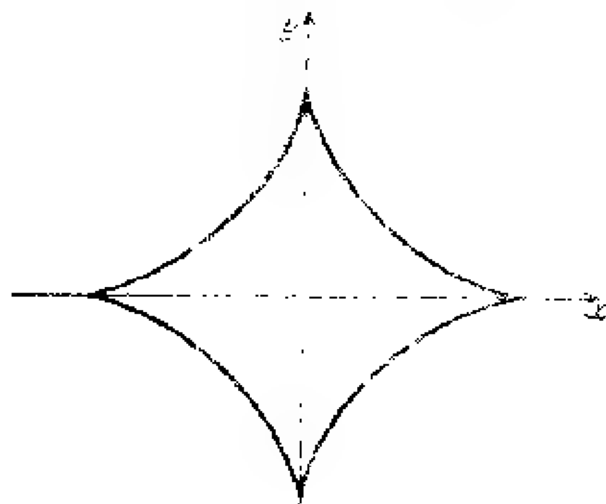


圖 3.23

［例六］ 復考此星線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, 同時亦爲下列橢圓族

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{(1-c)^2}=1$$

(其半軸 c 及 $1-c$ 之和爲一常數 1 者)之包線,觀圖 3.24 自明.

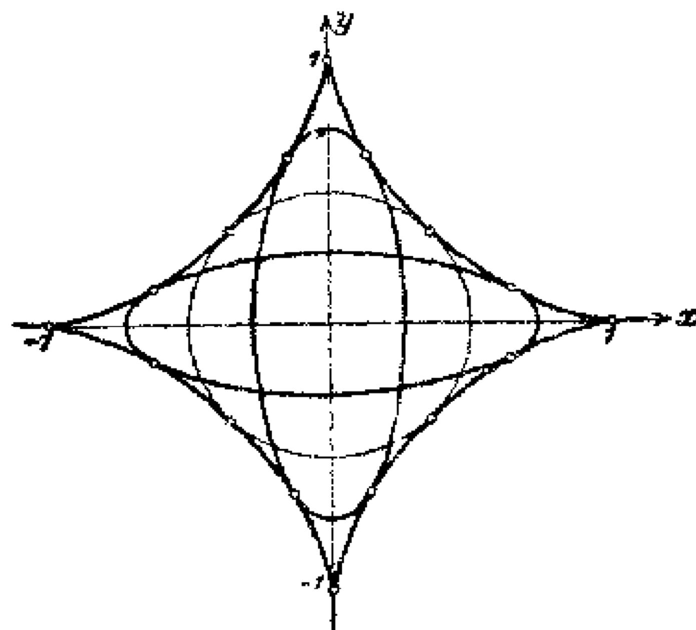


圖 3.24

［例七］ $(x-c)^2-y^3=0$,其曲線族如圖 3.25 所示. 若據上法求之,則 x 軸顯非其包線,是爲族中曲線之尖點所成之軌跡.故在此情形下,不能獲得其包線.

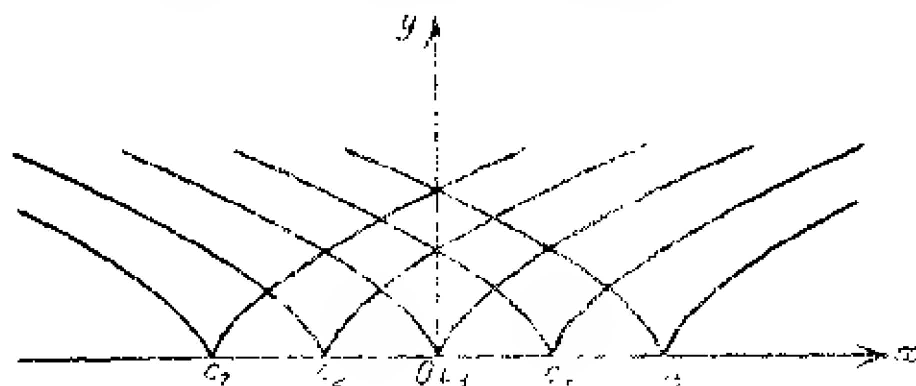


圖 [illegible]

[**例八**] 更就 $(x-$[illegible]$)$[illegible] 觀之,其鑑別曲線亦為x軸,同時亦為族中曲線之尖點所成之軌跡(見圖 3.26),與例七正相同,惟其族中每曲線傾斜,故就此意立論,未始不可謂為其包線也.

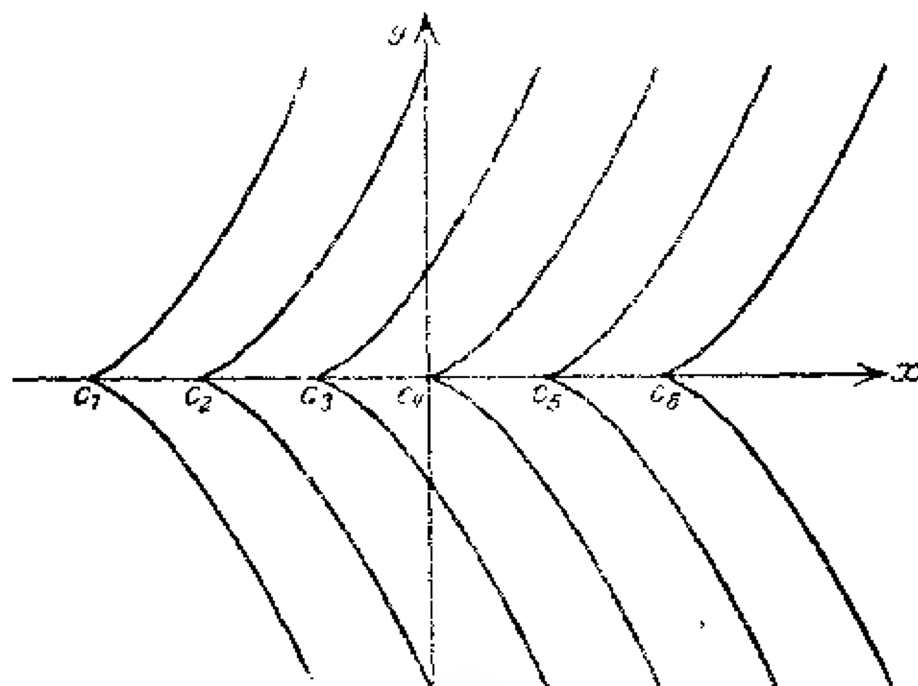


圖 [illegible]

[**例九**] $[x^2+(y-c)^2](x-2)+x=0$,如圖 3.27 所示. 考其中曲線均彼此相似,且上下移動可由其一至他. 據上法求其對 c 之導數,得 $f_c=-2(y-c)(x-2)=0$,故必 $x=2$ 或 $y=c$ 而後可. 惟 $x=2$, 自可不論,蓋 $x=2$ 時, y 之值未能確定. 因此遂有 $y=c$, 故吾人所欲求之鑑別曲線為 $x^2(x-2)+x=0$, 是為兩直線 $x=0$ 及 $x=1$. 試一觀圖 3.27, 可知僅 $x=0$ 為一包線,因 $x=1$ 實經過曲線之重點者也

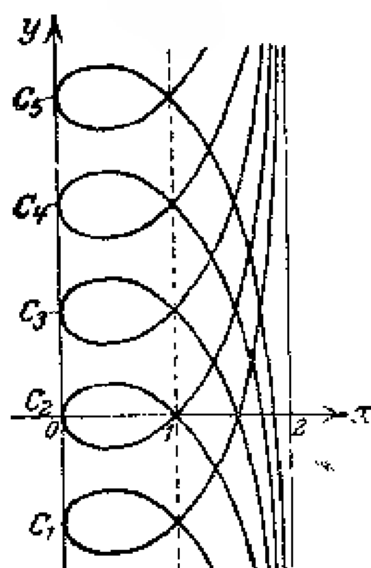
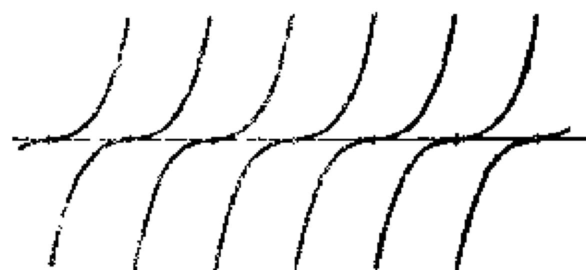


圖 3.27

［例十］ 所謂一族之包絡，可不必為其中任何兩鄰近曲線之交點，此由 $y=(x-c)^3$ 可以見之．此族中任何兩線不能相交，如圖3.28所示．然據上述之法，得 $f_c=3(x-c)^2=0$，故其鑑別曲線實為橫軸或 $y=0$．考族中各線無不與之接觸，


圖 3.28

故為其包線無疑．

［例十一］前論曲線之曲率時，知有所謂法包線者，為其曲率中心之軌跡．此名之由來，現亦可以講明之．設 C 為一曲線，其方程式為 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$．於是 C 之法包線 E 無他，即 C 在其每點上法線之包線而已．考 C 在每點上之法線為

$$[x-\phi(t)]\phi'(t)+[y-\psi(t)]\psi'(t)=0,$$

據前法求其包線，則有

$$0=[x-\phi(t)]\phi''(t)+[y-\psi(t)]\psi''(t)-\phi'^2(t)-\psi'^2(t);$$

求此兩式同時成立，可知其包線之方程式為

$$x=\phi(t)-\psi'(t)\frac{\phi'^2+\psi'^2}{\psi''\phi'-\phi''\psi'}=\phi-\frac{\psi'\rho}{\sqrt{\phi'^2+\psi'^2}},$$

$$y=\psi(t)+\phi'(t)\frac{\phi'^2+\psi'^2}{\psi''\phi'-\phi''\psi'}=\psi+\frac{\phi'\rho}{\sqrt{\phi'^2+\psi'^2}},$$

其中

$$\rho=\frac{(\phi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi''\phi'-\phi''\psi'},$$

即為 C 之曲率半徑．觀此結果，與上卷所論法包線之方程式完全相符．

［例十二］ 設有一曲線 C，其方程式為 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$．然後擇圓之中心在此 C 之上而一一經過原點者，要求其包線 E 為何如．考此種圓之方程式既為

$$x^2+y^2-2x\phi(t)-2y\psi(t)=0,$$

則 E 之方程式當為

$$x\phi'(t)+y\psi'(t)=0.$$

由是以論，若P爲C上任何一點$(\varphi(t),\psi(t))$，$Q(\xi,\eta)$爲E上之點與之相應者，則OQ必與C在P點之切線相垂直．復因$PQ=PO$之故，PO與PQ必分別與C在P點之切線成相等之角度而後可．

試設想O爲一發光點，C爲一反射曲線，則QP爲一反射由OP反射而得者．此種反射線之包線常稱之爲C對O之焦散曲線．故焦散曲線實爲E之法包線．蓋PQ爲E之法線，因一圓之中心在P者與E接觸於Q，故E之法線如有一包線，即爲其法包線，在前例中固已見及之矣．

例如令C爲一經過原點之圓，如是則E之軌跡，乃由另一圓C'上之點O'所繪成，而C'爲一與C完全相同之圓，在C上由O與C點出發同時出發轉動者．蓋轉動之時，O及O'所處地位，實與兩圓之公共切線相對稱．故E必爲一外擺線無疑．復因外擺線之法包線亦爲一相似外擺線，故C對O之焦散曲線亦爲一外擺線．

3.5.4. 曲面族之包面

欲論曲面族之包面，其理與前略多相似．設有一單參變之曲面族如$f(x,y,z,c)=0$，其中參變數c在一規定範圍內變化，則一曲面E可稱之爲此族之包面，苟其與族中每一曲面沿一曲線相接觸，而此種接觸曲線在E上自成一單參變之曲線族，將E完全掩蔽，從而使E得以產生者．

例如一切球面之半徑爲1，中心在z軸之上者，顯能自成一族．其包面爲一柱面$x^2+y^2-1=0$，以z軸爲軸，半徑爲1者．至其接觸曲線則爲平行於xy平面之圓，其半徑爲1，中心在z軸之上者．其事甚顯，可不深論．

吾人如假定果有一包面存在，則可應用下法以求得之．試在族中任意取兩曲面如$f(x,y,z,c)=0$及$f(x,y,z,c+h)=0$，與c及$c+h$分別相應者．此兩方程式自決定一交線（假定果有一交線），此交線又必滿足

$$\frac{f(x,y,z,c+h)-f(x,y,z,c)}{h}=0;$$

令其中h趨零，則此交線將因之而趨於一極限．此極限遂得以下列兩方程式規定之：

$$f(x,y,z,c)=0,\quad f_c(x,y,z,c)=0.$$

因此之故,此曲線常稱之爲兩無限鄰近之曲線相交之處;是爲參變數 c 之函數,當 c 變化時,卽從而得一單參變之空間曲線.苟將其中 c 消去,卽得一鑑別方程式.所謂包面,自必滿足此鑑別式而後可.吾人不難證明(其法與前證平面中之曲線時相似),在 $f_c{}^2+f_{cc}{}^2\neq 0$ 條件之下,凡與鑑別曲面相接觸之平面必同時與族中之曲面相接觸.故在鑑別曲面中,必可獲得包面及族中特殊點之軌跡也.

試觀　　　　$x^2+y^2+(z-c)^2-1=0$,

其包面除此方程式外,必更滿足　　　　$2(z-c)=0$.

當 c 固定時,此兩式實代表一圓,以 1 爲半徑,位於一平面中而高出 $z=c$ 者.若將其中 c 消去,可知其包面爲 $x^2+y^2-1=0$.

復次,有所謂雙參變之曲面族如 $f(x,y,z,c_1,c_2)=0$,其中含兩參變數,各在規定變區中變化,其包面亦可試求之.例如一切球面之半徑爲 1,中心在 xy 平面之中者.

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2-1=0.$$

由觀覺言之,可見其中每一球面均與 $z=1$ 及 $z=-1$ 兩平面相接觸,故此兩平面卽爲其包面.要之,設有一雙參變之曲面族,其包面 E 爲一如是之曲面,如以 P 表其與族中每一曲面相接觸之任何一點,當 P 在 E 上任意變動時,c_1 及 c_2 之值隨之而在一變區中變化,若 (c_1,c_2) 之值生變,與之相應之 P 亦異;果如是,E 卽爲此族之一包面.所當注意者,此族中之每一曲面僅能與包面接觸於一點.與前之沿一曲線接觸者不同.在與前相似之假定下,可證一雙參變之曲面族,與其包面相接觸之點必滿足　$f(x,y,z,c_1,c_2)=0$,　$f_{c_1}(x,y,z,c_1,c_2)=0$,

$$f_{c_2}(x,y,z,c_1,c_2)=0.$$

由此可決定其接觸點之軌跡.復將其中 c_1 及 c_2 消去,卽得一方程式,爲其包面所必須滿足者.

就上舉之例言之,設有

$$f(x,y,z,c_1,c_2)=(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2-1=0,$$

則 $f_{c_1} = -2(x-c_1) = 0$, $f_{c_2} = -2(y-c_2) = 0$,

故其鑑別式為 $z^2 = 1-0$, 由是得其包面為 $z=1$ 及 $z=-1$.

例 題

1. 令 $z=\varphi(x,y)$ 為一管面之方程式. 所謂管面, 為一切球面之半徑為 1, 中心在 $y=f(x)$ 上者之包面. 試證

$$z^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2+1)=1.$$

2. (a)設有雙參變之平面族, 滿足下列條件者:

$$OP+OQ+OR=\text{常數}=1,$$

其中 O 所表為坐標原點, P,Q,R 為各平面與坐標軸之交點. 試求其包面.

(b)又假定族中平面滿足

$$\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2=1,$$

試求其包面.

3. 設 C 為平面中任何曲線, 試考慮之半徑為 p, 而中心在 C 之上者, 證其包線為兩平行於 C 之曲線, 相去距離為 p 者.

*4. 空間中一族直線可視為兩種平面(依一輔變數 t 而變者)之相交:

$$a(t)x+b(t)y+c(t)z=1,$$

$$d(t)x+e(t)y+f(t)z=1.$$

此種直線如為一種曲線之切線, 換言之, 如有一包線, 則

$$\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix}=0.$$

5. 設有一族平面如

$$x\cos t+y\sin t+z=t,$$

其中 t 為一輔變數. (a)以柱面坐標(r,z,θ)求其包面之方程式; (b)其包面為一種曲線之切線所組成.

6. 設有一剛體由一始點以同一始速度, 惟不同角度在一鉛直平面中拋擲之, 則其運動軌跡為一族拋物線, 證其包線又為一拋物線.

*7. 設有一族球面, 與下列三球面相切

$$S_1:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{9}{4},$$

$$S_2:x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4},$$

$$S_3:x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4},$$

試求其包面.

8. 設有一平面曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$, 其倒極線 C' 為下列直線族 $\xi f(t)+\eta g(t)=1$ 之包線,其中 ξ,η 為流動坐標. (a)證 C 亦為 C' 之倒極線; (b)求 $(x-a)^2+(y+b)^2=1$ 之倒極線; (c)求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之倒極線.

第六節　莫大與莫小值問題

3.6.1.　莫大及莫小值之必要條件

兩個以上自變數之函數亦有莫大莫小值可言, 其理為偏微分之一種重要應用,特略述之.

設有一函數 $u=f(x,y)$, 可想像為三維空間中之一曲面. 苟其在(x_0,y_0)之值較其在鄰點之值為大,則 $u=f(x,y)$在(x_0,y_0)謂有一莫大值,苟其在(x_0,y_0)之值較其在鄰點之值為小,則 $u=f(x,y)$在(x_0,y_0)謂有一莫小值.在此所謂莫大莫小,自就(x_0,y_0)之相當鄰區比較言之,即就含有(x_0,y_0)之某種變區而論,其中函數之值無過(或無小)於其在(x_0,y_0)之值,故實含有相對之意義,與整個變區內函數之最大及最小值不可混為一談. 既明此,吾人乃立一普遍定義,說明兩個以上自變數函數之莫大與莫小值如下:若 $u=f(x,y,\cdots\cdots)$在$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$之鄰所得之值皆小於(或皆大於)其在$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$本身所得之值,則此函數在$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$謂有一莫大值(或莫小值).

復次,為求應用範圍之擴張, 吾人更創廣義之莫大及莫小值, 其言曰:若 $u=f(x,y,\cdots\cdots)$ 在 $(x_0,y_0,\cdots\cdots)$之鄰所得之值未必皆小於,但求不大於其在$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$之值,則此函數在 $(x_0,y_0,\cdots\cdots)$ 謂有一廣義莫大值.又有所謂廣義莫小值,其說與此相似,可不瑣述.

所欲一再聲明者,此定義僅可應用於一點(x_0,y_0)之適當鄰區,由(x_0,y_0)向各方面伸展而成者.又函數之莫大及莫小值與其整個閉區內之最大及最小值①不可混而為一,前論一個自變數之函數時固已見及之.若一函數若在其閉區之邊點獲得最大值,則此最大值卽未必為一莫大值.試假定變區為一閉區,而函數在其一邊點 P_0 獲得一最大值,如是則欲以 P_0 為中心,劃一鄰區自不可得;卽使將變區擴大,將後有鄰區包括於其中,則在此擴大之變區中,此函數在 P_0 未必有一莫大值,觀下例可以知之.如 $u=-x-y$ 在整個 xy 平面中處處確定,若於其中劃一閉區,如 $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$,則此函數在 $x=0$, $y=0$ 顯有一最大值.惟此最大值絕非莫大,蓋在原點鄰近,函數之值固有大於零者.至於函數之最大及最小值若在一變區之內點出現時,則其為莫大或莫小可以斷言.

莫大與莫小值之義既明,吾人乃可求索其出現時之必要條件,卽假定其出現於$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$時,其在此點上所必須滿足之條件為何如.吾人可斷言者,苟一可導函數 $u=f(x,y,z,\cdots\cdots)$ 在 P_0 點獲得莫大或莫小值而 P_0 點之坐標為$(x_0,y_0,\cdots\cdots)$,則其必要條件為:

$$f_x(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$f_y(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$f_z(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其理可歸併於一個自變數之問題而識之.試將 $y,z,\cdots\cdots$ 諸變數固定於 $y_0,z_0,\cdots\cdots$ 視 $u=f(x,y,\cdots\cdots)$在 P_0 點鄰近為唯一變數 x 之函數,則必在 $x=x_0$ 時得其莫大或莫小值,而據前所論必有 $f_x(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0$ 無疑.餘可仿此類推.

若假定 $u=f(x,y)$ 為兩個自變數之函數,則上述條件可由其幾何意義闡明之.所謂 $u=f(x,y)$ 之兩個導數 f_x 及 f_y 在 (x_0,y_0) 點上為零,其意卽此曲面之切面在此適與 xy 平面平行也.

為推理之便,吾人可將上述必要條件併為一個方程式而表達之.此

①一連續函數在閉區內必有一最大或最小值,前在 [illegible] 已詳論之.

方程式為

$$df(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=f_x(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)dx+f_y(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)dy$$
$$+f_z(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)dz+\cdots\cdots=0,$$

換言之，**若一函數 $u=f(x,y,\cdots\cdots)$ 在 $(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)$ 點有莫大或莫小值，則此函數在此點之微分不論 $x,y,\cdots\cdots$ 各自變數之變量 $dx,dy,dz,\cdots\cdots$ 為何如，必為零而後可**．倒言之，不論 $dx,dy,dz,\cdots\cdots$ 等之值為何如，一函數之微分為零時，則必有 $f_x=f_y=\cdots\cdots=0$．蓋 $dx,dy,dz,\cdots\cdots$ 各變量既各自獨立，吾人可令 $dx\neq 0$，其他 dy,dz 等皆為零，於是得由 $df=0$ 之成立，推斷 $f_x=0$，其他 $f_y=0,\cdots\cdots$ 等亦如之，無待贅也．

考

$$f_x(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$f_y(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$f_z(x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

諸式，其中欲定之數 $x_0,y_0,z_0,\cdots\cdots$ 適與方程式之個數相等，故由是可以規定莫大或莫小值之所在．惟如是規定之點未必為莫大或莫小點，此不可不注意者耳．

例如 $u=xy$．上述必要條件在原點 $x=0,\ y=0$ 自能滿足；惟在原點鄰近，此函數之值可正可負，視所處象限而定，顯無莫大或莫小值之可言．就其幾何圖所表示者言之，此函數實表一雙曲拋物面如圖 3.1，在原點無莫大或莫小點，至為顯然．

吾人為求推理之便利，擬採用一名詞，以表滿足上述條件之點．**不論其是否為莫大或莫小點，苟有一點，滿足 $f_x=0,f_y=0,f_z=0,\cdots\cdots$，即函數之微分在此為零時：**

$$df=f_xdx+f_ydy+f_zdz+\cdots\cdots=0,$$

吾人常稱此點為駐點[1]，而函數在此謂有一駐值[2]．於是一可導函數若在一閉區之內點達其最大或最小值時，此內點自必為一駐點無疑．所當

(1) stationary point. (2) stationary value.

注意者,一駐點未必為一莫大或莫小點耳. 欲決定滿足上述必要條件之點是否為莫大或莫小,非另加研討不可. 惟在某種特殊情形之下,其事殊不難. 如上述必要條件僅有唯一之解,又函數在其變區之內點 P 獲得最大或最小值時,則此唯一之解必為 P,而且為莫大或莫小,可以斷言. 至於其他情形,非數言可盡,自當另行設法判定之,其法詳本章附錄. 茲先舉數例以明上述之理.

3.6.2. 舉例

[例一]　如 $u=x^2+y^2$,其偏導數祇能在 $x=0$, $y=0$ 同時等於零. 此函數在 $x=0$, $y=0$ 確有一莫小值,因在其他異於 $(0,0)$ 之點,其值皆正故也.

[例二]　設

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2}\qquad (x^2+y^2<1)$$

其偏導數為

$$u_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\qquad u_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

自僅能在 $x=0$, $y=0$ 等於零. 此函數在此必有一莫大值,試觀其值在原點之鄰近皆小於其在原點之值,可以知之.

[例三]　試作一三角形,其三角的正弦之積為莫大者. 即欲求

$$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$$

得其莫大值,其中 x 及 y 之變區為 $0\leqq x\leqq\pi$, $0\leqq y\leqq\pi$, $0\leqq x+y\leqq\pi$. 若 f 在此變區內為正,故其最大值亦必為一正數. 復觀上述變區之邊際,即如上規定變區之不等式中至少有一個等號成立時,f 之值在此將為零,於是可知 f 之最大值必出現於變區之內. 然後要求 f 之偏導數為零,得方程式如下:

$$\cos x\sin y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)=0,$$

$$\sin x\cos y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)=0.$$

既假定 $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $0<x+y<\pi$,可知其解為 $\tan x=\tan y$, 或 $x=y$. 於是將此代入第一式,得 $\sin 3x=0$, 故 $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$ 為唯一駐點,從而知欲作之三角形為一等邊三角形.

[例四]　設有一銳角三角形,其頂之坐標分別以 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 及 $P_3(x_3,y_3)$ 表之. 試求一第四點 P, 其坐標為 (x,y), 與 P_1, P_2, P_3 三點距離之和為最小者. 此距離之和自為 x 及 y 之連續函數. 因此之故,如作一圓,包含此三角形於其中者,必可於圓內求得一點 P,

其他一頂之所要求．惟此P決不能爲三角形之一頂，倘如是，則由適合本題作垂直線於對邊，可得一點，其距三頂之和將更小於之．復次，若圓與三角形相去相當遠時，P之地位不能臨於圓之邊上，亦可想見．要之，若以



圖　3.29

$$r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2},$$

吾人所欲求者，爲

$$f(x,y)=r_1+r_2+r_3$$

之最小值．考此函數，除在P_1，P_2，P_3三點外皆爲可導．茲要求其偏導數在P點之等於零，得方程式如

$$\frac{x-x_1}{r_1}+\frac{x-x_2}{r_2}+\frac{x-x_3}{r_3}=0,$$

$$\frac{y-y_1}{r_1}+\frac{y-y_2}{r_2}+\frac{y-y_3}{r_3}=0,$$

由是得三個矢量u_1，u_2，u_3，其矢量部分分別爲

$$\frac{x-x_1}{r_1},\ \frac{y-y_1}{r_1},\quad \frac{x-x_2}{r_2},\ \frac{y-y_2}{r_2},\quad \frac{x-x_3}{r_3},\ \frac{y-y_3}{r_3}.$$

此三個矢量之長各爲1，而其和適爲零．由是可知此三個矢量實組成一等邊三角形，其中任何一個矢量如作$\frac{2}{3}\pi$度之轉動即可移於其次(見圖3.29)．復著此三個矢量之方向與P_1，P_2，P_3對P之方向正同，故三角形每邊對P之角度必同爲$\frac{2}{3}\pi$而後可．

3.6.8. 附有條件之莫大與莫小值問題

莫大與莫小值問題，其中自變數在兩個以上者，其自變數之變化常可另設條件以限制之．例如吾人若欲在一曲面$\phi(x,y,z)=0$之上求索一點，與原點相去之距離最近，是即要求

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

之値爲莫小，而x，y，z各變數不若從前之可以自由變化，必始終受$\phi(x,y,z)=0$之束縛而後可．此種附有條件之問題，前論一個自變數之函數時，自無提出之可能，惟在兩個以上自變數時，其問題頗饒趣味且殊爲重要．

既明問題意義之所在，可知其解決殊非難事，蓋在原則上此問題實

非新問題,因之可用已有之方法應付之.就上所舉之例題言之,吾人可將所設條件 $\varphi(x,y,z)=0$ 化為 z 之顯函數,即將 z 由 x 及 y 表而出之,然後代入 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,以求其最小值,而是即歸於前已討論之問題.惟如此則 x,y,z 三變數之間似有偏重之弊,且實際應用時,在運用上或嫌過於繁瑣.為求應用之便利及形式之美觀,乃有如下之法.請先舉一簡單問題說明其要旨.

試求 $f(x,y)$ 之駐值,其中 x 及 y 為 $\varphi(x,y)=0$ 所限制者.此條件 $\varphi(x,y)=0$ 可設想為平面中之一曲線,復假定曲線族 $f(x,y)=$ 常數 $=c$ 能掩蔽平面之一部分如圖 3.30,於是所欲研討之問題,為如何在此一族曲線中,與 $\varphi(x,y)=0$ 相交者,求得一條如是之曲線,其 c 之值為最大或最小.試沿 $\varphi=0$ 而行,經過 $f(x,y)=c$,可假定 c 隨之而遞增(或遞減),當 c 由遞增轉為遞減(或遞減轉為遞增)時,可望獲得所欲求之駐值.觀圖 3.30,可見此事發生於族中曲線與 $\varphi(x,y)=0$ 相切之處,其切點之坐標 $x=\xi$, $y=\eta$,即為 $f(x,y)$ 之莫大或莫小值.在 $f=c$ 與 $\varphi(x,y)=0$ 相切之處 $x=\xi$, $y=\eta$,必有如下關係

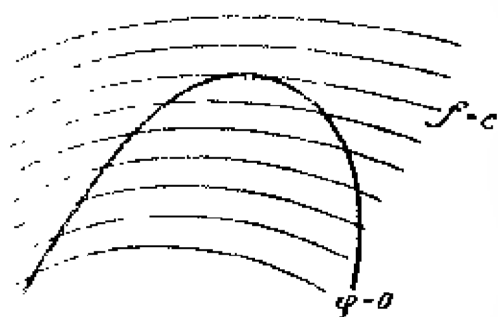


圖 3.30

$$f_x:f_y=\varphi_x:\varphi_y$$

成立,或應用一比例常數 λ,謂必有下列兩方程式

$$f_x+\lambda\varphi_x=0,$$

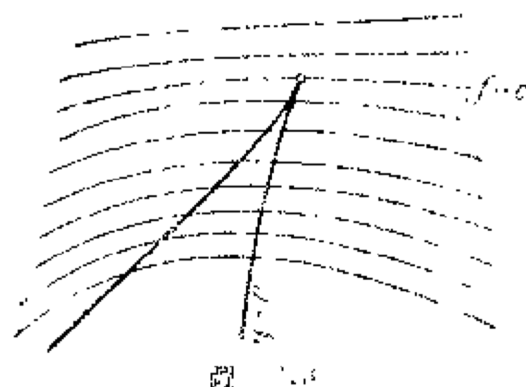
$$f_y+\lambda\varphi_y=0$$

成立亦可.此兩方程式連同

$$\varphi(x,y)=0,$$

可用以規定 ξ,η 及 λ.所當注意者,如上之推理當 $\varphi(x,y)=0$ 在 (ξ,η) 有一奇點時,自未能有效,觀圖 3.31 自明,蓋在此尖點將有

$$\varphi_x(\xi,\eta)=0,\qquad \varphi_y(\xi,\eta)=0,$$



圖

上述推理自失其效.

要之,在 $\phi(x,y)=0$ 條件之下,一函數 $f(x,y)$ 如在 (ξ,η) 有一莫大或莫小值,而

$$\phi_x(\xi,\eta)=0,\quad \phi_y(\xi,\eta)=0$$

不能同時成立,其必要條件爲必有一比例常數 λ,滿足

$$f_x(\xi,\eta)+\lambda\phi_x(\xi,\eta)=0,$$

$$f_y(\xi,\eta)+\lambda\phi_y(\xi,\eta)=0$$

是即所謂 Lagrange 之待定乘數法,λ 即稱之爲 Lagrange 乘數.除欲求索之 ξ,η 外,復多一未定之 λ,而上列三個條件適足以規定之.其法整潔對稱,便於應用.茲再述其用法如下:

欲在 $\phi(x,y)=0$ 條件下求索 $f(x,y)$ 之莫大或莫小值,當採用一未定因子 λ,與 x 及 y 無關者,與 $\phi(x,y)$ 相乘,加於 f,從而得 $F=f+\lambda\phi$,然後寫出 F 獲得莫大或莫小值之必要條件:

$$F_x=0,\quad F_y=0,$$

以此兩方程式及 $\phi(x,y)=0$ 規定 λ 及所欲求索之莫大或莫小點可矣.此方法之證明,擬留待下段中詳之;茲先舉一例以明其用.

試求

$$u=xy$$

之莫大或莫小值,其中 x 及 y 須滿足

$$x^2+y^2-1=0,$$

即在一半徑爲 1 之圓上求一點,致 $u=xy$ 之爲大或爲小.根據所述之法,當用一未定乘數 λ,求 $xy+\lambda(x^2+y^2-1)$ 之偏導數爲零:

$$y+2\lambda x=0,$$

$$x+2\lambda y=0,$$

將此兩式連同

$$x^2+y^2-1=0$$

解開，得

$$\xi=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \eta=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi=-\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \eta=-\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \eta=-\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi=-\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \eta=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

其中前兩數，必足致 $u=xy$ 獲得其最大值 $u=\frac{1}{2}$，而後兩數使其值為 $u=-\frac{1}{2}$，必為最小．至何以必為最大及最小，乃由於 x 及 y 之變域為閉區間，而圓周無邊點，其必然存在之最大及最小值（據 A2.1.2）因之必與所求得之駐值相同也

3.6.4. Lagrange 方法之證明

欲證 Lagrange 方法，當假定駐點 ξ,η 之存在，復假定 φ_x 及 φ_y 在駐點上不能同時為零；吾人不妨假定 $\varphi_y(\xi,\eta)\neq 0$．如是據隱函數定理（見前3.1.3）必可在 ξ,η 鄰近將 $\varphi(x,y)=0$ 解開，將 y 化成唯一連續可導之函數 $y=g(x)$．將此代入 $f(x,y)$，得

$$f(x,g(x)),$$

於是為一個自變數問題．此函數在 $x=\xi$ 獲得最大或最小值之必要條件為：

$$f'(x)=f_x+f_y g'(x)=0,$$

在 $x=\xi$ 之成立．惟 $y=g(x)$ 自必滿足 $\varphi_x+\varphi_y g'(x)=0$．將此式乘以 λ，加於 $f_x+f_y g'(x)=0$，要求

$$f_y+\lambda\varphi_y=0$$

成立，即可從而推斷

$$f_x+\lambda\varphi_x=0$$

在 $\varphi_y\neq 0$ 之假定下，λ 即由 $f_y+\lambda\varphi_y=0$ 而定，而欲證之理即在於是矣．

觀上述證法,可以見 ϕ_x 及 ϕ_y 在(ξ,η)不能同時為零之假定殊為重要.若同時為零，則此法卽不可用,特舉一例以說明之.如欲求

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

為莫小,其中 x,y 限於如下條件

$$\phi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0,$$

意卽欲在此曲線上求得一點,離坐標原點最近者.據圖 3.32 所示,由原點至此曲線之最短距離自為原點與此曲線之尖點相連而成之直線（吾人不難證明,以原點為中心又以 1 為半徑之圓與此曲線,僅有此尖點為共同點).若此尖點之坐標為 $x=1$, $y=0$, 顯能滿足 $\phi(x,y)=0$ 及 $f_y+\lambda\phi_y=0$(不論 λ 為何數),但

$$f_x+\lambda\phi_x=2x+3\lambda(x-1)^2=2\neq0.$$

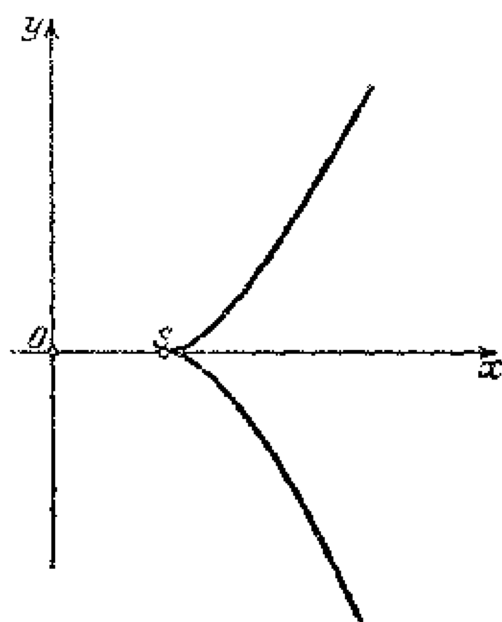


圖　3.32

上述 Lagrange 方法，倘可應用於其他比較繁複之問題.為將來擴張應用時之便,特再述一證法於下.若 $f(x,y)$在$x=\xi,y=\eta$ 有一莫大或莫小值,則其微分 df 在ξ,η 必為零,前已詳論之矣.今 x 及 y 如更有條件之束縛,如以 $\phi(x,y)=0$ 限制之,其意無異謂 dx 及 dy 不能獨立,而必限於

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0.$$

由是以論,dx 及 dy 在(ξ,η)除滿足

$$df=f_x(\xi,\eta)dx+f_y(\xi,\eta)dy$$

外,又必滿足 $d\phi=0$ 而後可.如是則 dx 及 dy 兩者之中，僅 dx 可自由變化，而 dy 應隨之而變.然後採用一 λ，將 $d\phi=0$ 乘以 λ，加於 $df=0$,得

$$(f_x+\lambda\phi_x)dx+(f_y+\lambda\phi_y)dy=0.$$

因 $\phi_y\neq0$ 之故,可規定 λ，令其滿足

$$f_y + \lambda\phi_y = 0,$$

於是得$(f_x+\lambda\phi_x)dx=0$. 復因 dx 得自由變化之故(如可令 $dx=1$), 遂有

$$f_x + \lambda\phi_x = 0,$$

是即欲證之理.

3.6.5. Lagrange 方法之擴張

當自變數多於兩個時，莫大及莫小值問題中所附條件自有增多之可能. 此種問題,仍可用 Lagrange 方法處理之. 今特舉一特殊情形而討論之;觀此一例,其法之如何擴張,即可概見.

試求

$$u = f(x, y, z, t)$$

之莫大或莫小值,其中 x, y, z, t 四變數以如下兩條件

$$\phi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0$$

限制之. 假定在 (ξ, η, ζ, τ), $f(x, y, z, t)$得其莫大或莫小值,復假定在 $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ 之鄰近, 四變數中之二, 如 z 及 t 可表達爲其他兩變數之單值函數,即假定在 P 點

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, t)} = \phi_z\psi_t - \phi_t\psi_z$$

不等於零,則必有 $z = g(x, y)$ 及 $t = h(x, y)$. 將此代入 $u = f(x, y, z, t)$, 則 $f(x, y, z, t)$爲 x 及 y 之函數,而此函數在 $x=\xi, y=\eta$ 獲得莫大或莫小值之必要條件爲

$$f_x + f_z\frac{\partial z}{\partial x} + f_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$f_y + f_z\frac{\partial z}{\partial y} + f_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

在 $x=\xi, y=\eta$ 之成立. 此兩式中之 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ 必須由 $\phi=0, \psi=0$ 兩條件求得之. 由此兩條件可以推知

$$\phi_x + \phi_z\frac{\partial z}{\partial x} + \phi_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\psi_x + \psi_z\frac{\partial z}{\partial x} + \psi_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

及
$$\phi_y+\phi_z\frac{\partial z}{\partial y}+\phi_t\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

$$\psi_y+\psi_z\frac{\partial z}{\partial y}+\psi_t\frac{\partial t}{\partial y}=0.$$

因$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,t)}$不等於零之故,必可由此諸式求得$\frac{\partial z}{\partial x}$,……,$\frac{\partial t}{\partial y}$,而吾人之問題,於是遂獲解決.惟此方法又陷於偏重 x 及 y 之弊,因之擬仍用 Lagrange 之法解之,略如下述

吾人可採用兩待定因子 λ 及 μ, 以下列兩式規定之:

$$f_z+\lambda\phi_z+\mu\psi_z=0,$$

$$f_t+\lambda\phi_t+\mu\psi_t=0.$$

其事在$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,t)}$不等於零之條件下自必可能.然後將

$$\phi_x+\phi_z\frac{\partial z}{\partial x}+\phi_t\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

$$\psi_x+\psi_z\frac{\partial z}{\partial x}+\psi_t\frac{\partial t}{\partial x}=0$$

兩式分別以 λ 及 μ 乘之,加於

$$f_x+f_z\frac{\partial z}{\partial x}+f_t\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

卽得

$$f_x+\lambda\phi_x+\mu\psi_x+(f_z+\lambda\phi_z+\mu\psi_z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+(f_t+\lambda\phi_t+\mu\psi_t)\frac{\partial t}{\partial x}=0.$$

由是注意 λ 及 μ 之定義,卽得

$$f_x+\lambda\phi_x+\mu\psi_x=0.$$

據同理,若將

$$\phi_y+\phi_z\frac{\partial z}{\partial y}+\phi_t\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

$$\psi_y+\psi_z\frac{\partial z}{\partial y}+\psi_t\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

分別以 λ 及 μ 乘之,復加於

$$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} + f_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

並注意 λ 及 μ 之意義，即得

$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0.$$

綜上所論，遂有如下之重要結果：若 $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ **爲 $f(x, y, z, t)$ 之莫大或莫小點，其中 x、y、z、t 四個變數受制於兩種條件，如**

$$\phi(x, y, z, t) = 0,$$

$$\psi(x, y, z, t) = 0,$$

而 $\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, t)}$ 在 P 不等於零，則必有兩常數 λ 及 μ，除滿足如上兩條件外，復有

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x = 0,$$

$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0,$$

$$f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z = 0,$$

$$f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t = 0,$$

在 P 點之成立. 觀此諸式，可謂異常對稱，對各變數絕無偏重之意. 所必須假定者，爲 $\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}$，$\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, z)}$，……，$\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, t)}$ 諸 Jacobian 中至少有一非零，如是在 P 之近鄰必可將四個變數中之二化爲其他二變數之函數. 欲應用此法，勢必將未知數由四個增至六個，由六個方程式決定之，惟在形式上較爲整潔對稱，自覺便利多矣.

上述證法，若應用微分之義以出之，則更覺簡潔明瞭. 據前所論，一函數 $f(x, y, z, t)$ 在 P 點得有莫大或莫小値之必要條件爲

$$df = 0,$$

其中 dz 及 dt 不能自由變化，須隨 dx 及 dy 而定，並由下列關係限制之：

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz + \phi_t dt,$$

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz + \psi_t dt.$$

如假定 $\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, t)} \neq 0$，必可將

$$f_x+\lambda\phi_x+\mu\psi_x=0,$$
$$f_y+\lambda\phi_y+\mu\psi_y=0,$$

規定常數 λ 及 μ. 於是將 $d\phi=0$ 以 λ 乘之，將 $d\psi=0$ 以 μ 乘之，而後加於 $df=0$，即得

$$d(f+\lambda\phi+\mu\psi)=(f_x+\lambda\phi_x+\mu\psi_x)dx+(f_y+\lambda\phi_y+\mu\psi_y)dy=0.$$

因 dx 及 dy 得自由變化，故有

$$f_x+\lambda\phi_x+\mu\psi_x=0,$$
$$f_y+\lambda\phi_y+\mu\psi_y=0,$$

是即欲證之理.

既明此，如欲推廣其理以處理任何 n 個變數及附有 m 個 $(m<n)$ 條件之問題，其事亦殊易易. 於是得一普遍方法如下：

苟一函數 $u=f(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n)$

中之 n 個變數不許各自獨立，而必受制於 m 個條件 $(m<n)$，

$$\phi_1(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n)=0,$$
$$\phi_2(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\phi_m(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n)=0,$$

則採用 m 個待定常數 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\cdots,\lambda_m$，求

$$F=f+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\cdots\cdots+\lambda_m\phi_m$$

對 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 之各偏導數皆等於零：

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\cdots\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

此 n 個方程式連同 m 個條件：

$$\phi_1=0,\phi_2=0,\cdots\cdots,\phi_m=0,$$

可用以規定 $n+m$ 個待定數 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_m$. 苟 f 在此 m 個條件下果有一莫大或莫小值，而 $\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_m$ 對 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 中任何 m 個變數之 Jacobian 至少有一非零時，則此 $m+n$ 個方程式在莫大或莫小值所在點必能成立.

綜觀此法,可謂簡美極矣. 惟不可不注意者,此法僅為莫大莫小之必要條件而非充分條件. 惟如是,由是規定各方程式之根是否果為莫大莫小值之所在,非另加研討不可. 其說甚長,非本卷所能詳論. 惟在特殊情形之下,此事之決定亦殊不難. 如3.6.1所述,吾人常可依據函數及其變區之特性以決定莫大及莫小值之存在問題;存在既決,如由上述之法所得方程式之解具有唯一性,而又無特異情形發生時(如所有Jacobian皆為零),則一切困難即可迎刃而解.

3.6.6. 舉例

[例一] 試求 $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ 之最大值,其中 x,y,z 須受制於 $x^2+y^2+z^2=c^2$; 意即欲在一球面之上求某一點,使 f 致其最大值. 若 f 為一連續函數,當 x,y,z 在球面上變化時必有一最大值,乃必然之理,復因球面之上無所謂邊點,故此最大值必與莫大值相同. 據上述之法以求之,當先求

$$F=x^2y^2z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-c^2)$$

之偏導數等於零:

$$2xy^2z^2+2\lambda x=0,$$

$$2x^2yz^2+2\lambda y=0,$$

$$2x^2y^2z+2\lambda z=0.$$

此方程式得以 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 解之. 此解使 f 變為零,為其最小值,故在此可不論. 其他之解為 $x^2=y^2=z^2$, $\lambda=-x^4$. 復據所附條件可知:

$$x=\pm\frac{c}{\sqrt{3}},\quad y=\pm\frac{c}{\sqrt{3}},\quad z=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

如是則 f 之值為 $\frac{c^6}{27}$,是即其莫大值. 循是以觀,可見

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leq\frac{c^2}{3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

之必然成立. 所謂任何三個正數之幾何中數必不能超過其算術中數,於此又得一證.

[例二] 試求一三角形(其邊之長分別以 x,y,z 表之),其周長為 $2s$, 其面積為可能之最大者. 查一三角形面積之平方與 s 及 x,y,z 之關係為

$$f(x,y,z)=s(s-x)(s-y)(s-z).$$

故必求此函數達其莫大值,同時要求下列條件

$$\varphi = x + y + z - 2s = 0$$

滿足，其中 x, y, z 之變區為

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq z,\ y + z \geqq x,\ z + x \geqq y.$$

由是知 f 之值在其變數閉區之邊際(即上列不等式中有一變為等式時)皆等於零，故其最大值必出現於閉區之內，是必與其某大值從同．然後求

$$F(x, y, z) = s(s-x)(s-y)(s-z) - \lambda(x + y + z - 2s)$$

之偏導數等於零，得三個方程式：

$$-s(s-y)(s-z) - \lambda = 0,$$

$$-s(s-x)(s-z) - \lambda = 0,$$

$$-s(s-x)(s-y) - \lambda = 0.$$

解之，即得 $x = y = z = \frac{2s}{3}$．故欲求之三角形必須等邊．

(例三) 吾人擬證明下列不等式：

$$uv \leqq \frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

在 $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ 變區中，不論 α, β 為任何正數滿足 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ 總保著皆為真確．此不等式在 u 或 v 為零時之真，顯而可見．故可假定 $uv \neq 0$．又此不等式如對任何 u 及 v 為真，則不論 t 為任何正數，對 $ut^{\frac{1}{\alpha}}$, $vt^{\frac{1}{\beta}}$ 亦必真確，讀者可自證之．因此之故，吾人不妨附加一條件，要求 $uv = 1$，但證如上不等式對 u, v 之滿足此條件者皆為真確即可，蓋此事得證，其普遍成立，亦可從而推知之．

假定 u, v 為任何正數，滿足 $uv = 1$ 者，欲證

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \geqq 1$$

之真確，可將 $uv = 1$ 視為限制 u, v 之條件，先求

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

之某小值．此某小值之存在自無待論，且必出現於 $u \neq 0$ 及 $v \neq 0$，亦可斷言．因之必有一 λ，滿足：

$$u^{\alpha - 1} - \lambda v = 0 \quad 及 \quad v^{\beta - 1} - \lambda u = 0.$$

將此兩式以 u 及 v 分別乘之，得 $u^{\alpha} = \lambda$, $v^{\beta} = \lambda$．因 $uv = 1$ 之故，遂知 $u = v = 1$．於是知 $\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$ 之某小值為 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$，而

$$\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}\geqq 1,$$

在 $uv=1$ 時之真確可以見矣.

既證

$$uv\leqq\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}$$

吾人可將其中 u 及 v 分別以

$$u=\frac{u_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}},\qquad v=\frac{v_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

替代之,其中 $u_1,u_2,\cdots\cdots,u_n,v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$ 假定任何不能為負之數且至少有一 u 及 v 不能為零.令其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$,將各不等式一一相加,即得

$$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

是即所謂 Holder 不等式,其中 u_i 及 v_i 不全為零,而又 $u_i\geqq0$, $v_i\geqq0$ $(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$, α 及 β 為任何正數滿足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 者.

［例四］ 試在一曲面

$$\varphi(x,y,z)=0$$

上(假定附合者)求得一點,離一固定點(ξ,η,ζ)最近者.設其果有如是一點,則

$$F(x,y,z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\lambda\varphi(x,y,z)$$

之偏導數在此必等於零:

$$2(x-\xi)+\lambda\varphi_x=0,$$

$$2(y-\eta)+\lambda\varphi_y=0,$$

$$2(z-\zeta)+\lambda\varphi_z=0,$$

或

$$\frac{x-\xi}{\varphi_x}=\frac{y-\eta}{\varphi_y}=\frac{z-\zeta}{\varphi_z}.$$

故欲由一固定點沿最短線行至一曲面(假定為可導者),當依曲面之法線方向進行.惟是否果為莫大或莫小值,或竟無莫大莫小可言,非詳細審定不可(例如固定點如居於一球面之內,則由此沿球面之直徑達其一端為莫大,達其他端為莫小).

例 題

1.試在一橢圓

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

之上求一點,其去一直線 $x+y-4=0$ 之距離為最大及最小者.

2. 設有一長方形木塊,其十二邊之長相加為 a, 其六個面面積相加為 $\frac{a^2}{25}$. 木塊之體積自超過一立方體,其邊等於木塊之最短邊者,當此超過部分最大時其邊之長應為如何.

3. 求

$$(ax^2+by^2)e^{-x^2-y^2} \qquad (0<a<b)$$

之莫大及莫小值.

4. 證

$$\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{ex^2+2fxy+gy^2} \qquad (eg-f^2>0)$$

之莫大值適等於下列二次方程式中

$$(ac-b^2)-\lambda(ag-2bf+ce)+\lambda^2(eg-f^2)=0$$

較大之一根.

5. 求下列函數之莫大值:

$$(a)\quad \frac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}, \qquad (b)\quad \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}.$$

6. 求

$$f(x,y)=y^2\left(\sin x-\frac{x}{2}\right)$$

之駐值並考其特性.

*7. 試定 a 及 b 之值,使 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之包圓 $(x-1)^2+y^2=1$ 於其中者得其最小面積.

8. 一四邊形之邊為 a,b,c,d 者,求其面積為最大.

9. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一點,與 $(1,2,3)$ 相去最遠者.

10. 設 $P_1P_2P_3P_4$ 為一凸形四邊形,求一點 O,其與 P_1,P_2,P_3,P_4 四點距離之和為最小.

11. 在一橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上求一點使 (a) $A+B+C$, (b) $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 為莫小,其中 A,B,C 為其 (x,y,z) 點上之切面在坐標軸上之截段.

12. 求橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 之內切直角平行體之體積為最大.

13. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之內切長方形之周為最大.

14. 在橢圓 $5x^2-6xy+5y^2=4$ 上求一點,其切線離原點最遠.

*15. 證橢圓體 $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=1$ 之最大軸之長 l 為

$$\begin{vmatrix} a-\frac{1}{l^2} & d & e \\ d & b-\frac{1}{l^2} & f \\ e & f & c-\frac{1}{l^2} \end{vmatrix}=0$$

之最大實根.

第三章 附錄

第一節 莫大及莫小值之充分條件

莫大或莫小值出現時之必要條件，本章中已論其梗概．由此條件所規定之駐値果為莫大莫小與否，常待由問題之特性判定之，觀本章中所舉各例，亦可略見．惟莫大或莫小値之充分條件，要不可不一論及之．茲就兩個自變數之情形述其大要於下．

若以(x_0,y_0)表一函數$f(x,y)$之駐點，即假定其偏導數在此為零，則莫大或莫小値在(x_0,y_0)是否出現，應視

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

當h及k在相當小之變區中變化時是否始終為負或始終為正而可以決定之．試據 Taylor 定理將此式展開，至其餘項含有三重導數而止，復注意$f_x(x_0,y_0)=0$及$f_y(x_0,y_0)=0$，則有

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})+\epsilon\rho^2,$$

其中$\rho^2=h^2+k^2$，與ϵ則隨$\rho\to 0$而趨零．由是以觀，在(x_0,y_0)周圍相當小之近鄰中，$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$是否處處為負或為正，當視

$$Q(h,k)=ah^2+2bhk+ck^2$$

而定，其中a,b,c為

$$a=f_{xx}(x_0,y_0),\quad b=f_{xy}(x_0,y_0),\quad c=f_{yy}(x_0,y_0)$$

之意．考此$Q(h,k)$實為一二次之齊次式，其中a,b,c自假定不全等於零．倘全為零，則欲求此問題之解決，須將 Taylor 級數更展至高重導數，在此擬不加討論．

細考$Q(h,k)$，可有三種不同情形：

其一，此齊次式為確定．當h及k在其變區內任意變化時，Q之値始終為正或始終為負，且惟$h=0$，$k=0$時始得為零．如是者謂之確定齊次式，其正者謂正定，其負者謂負定．例如h^2+k^2為正定，

$-h^2+2hk-2k^2=-(h-k)^2-k^2$ 爲負定.

其二,此齊次式爲**不定**.當 h 及 k 在其變區內變化時,Q 之值可正可負者謂之不定.例如 $Q=2hk$

其三,此齊次式爲**半定**.若 $Q\geqq 0$ 或 $Q\leqq 0$,換言之,雖始終不負或始終不正,惟不必僅在 $h=0$,$k=0$ 時爲零,此其異於確定者,謂之半定.如$(h+k)^2$即爲半定式,在 $h=-k$ 時常爲零

既明上述定義,自不難證明 $Q=ah^2+2bhk+ck^2$ 爲確定之必要與充分條件爲

$$ac-b^2>0,$$

若其中 $a>0$ (如是則 $c>0$)則爲正定,否則爲負定.又 Q 爲不定之必要與充分條件爲

$$ac-b^2<0。$$

而 Q 之半定則由

$$ac-b^2=0$$

可以認識之.

其證甚易.若 $a=c=0$,則 $b\neq 0$,如是則 Q 爲不定,故上述條件在此情形下自爲真確.茲假定 $a\neq 0$,則

$$ah^2+2bhk+ck^2=a\left[\left(h+\frac{b}{a}k\right)^2+\frac{ca-b^2}{a^2}k^2\right]$$

觀此可知在 $ca-b^2>0$ 時自必確定,其爲正爲負當視 a 而定.又在 $ca-b^2=0$ 時爲半定,蓋當 h 及 k 滿足$\frac{h}{k}=-\frac{b}{a}$時,Q 之值爲零,而在其他情形下視 a 而定正負.復次,若 $ac-b^2<0$,則其不定可知,蓋如是當 $k=0$ 時,Q 之值爲 $+a$,在 $h+\frac{b}{a}k=0$ 時爲 $-a$ 也.

明乎是,吾人乃可說出下列條件.苟$Q(h,k)$爲正定,則 f 在 $h=0$,$k=0$ 所有之駐値爲莫小値,苟爲負定,則爲莫大値.又 Q 若爲不定,則無莫大或莫小値可言.故 $Q(h,k)$ 之確定,實爲莫大或莫小之充分條件,復由 $Q(h,k)$之不定,可以判莫大或莫小之不存在.至於$Q(h,k)$爲半定時之情形,因所涉問題較繁,擬不加以討論.

欲證上述之理,請先假定 Q 爲一正定式,然後在此假定下,求索一

正數 m，與 h 及 k 無關者，適合

$$Q \geqq 2m(h^2+k^2)=2m\rho^2;$$

如是則①

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}Q(h, k)+\epsilon\rho^2 \geqq (m+\epsilon)\rho^2.$$

故當 ρ 趨小，ϵ 之絕對值隨之而小於 $\frac{1}{2}m$ 時，必有

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) \geqq \frac{m}{2}\rho^2,$$

果如是，$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 實有一莫小值．據同理，可以證 Q 爲負定時，$f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 有一莫大值．

最後所欲討論者，乃 Q 爲一不定式之情形，即有一點 (h_1, k_1) 存在，使 Q 在此爲負，復有一點 (h_2, k_2)，使 Q 在此爲正．如是必有一正數 m 可尋，滿足

$$Q(h_1, k_1) < -2m\rho_1^2,$$

$$Q(h_2, k_2) > 2m\rho_2^2.$$

苟令 $h=th_1$，$k=tk_1$，$\rho^2=h^2+k^2 \; (t \neq 0)$，意即在聯結 (x_0, y_0) 及 (x_0+h, y_0+k) 兩點之直線上觀察任何一點 (x_0+h, y_0+k)，則在此點上根據 Q 之齊次性既有 $Q(h,k)=t^2q(h_1, k_1)$ 及 $\rho^2=t^2\rho_1^2$，必可推知 $$Q(h, k) < -2m\rho^2.$$

故當 t 相當小時(即 ρ 相當小時)，$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ 爲一負數．據同理，如令 $h=th_2$，$k=tk_2$，復可在 (x_0, y_0) 之近鄰，求得如是之點，其值大於 $f(x_0, y_0)$，即 $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ 爲一正數者．於是 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 無莫大或莫小值，從可知矣．

綜言之，得如下方法以判定一函數之莫大莫小：

苟在 (x_0, y_0) 有

---

① m 之求得，可說明如下．吾人可視 $\frac{Q(h,k)}{h^2+k^2}$ 爲 $u=\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ 及 $v=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ 之函數．此函數自爲連續，而 u 及 v 復滿足 $u^2+v^2=1$，故在其變域 $u^2+v^2=1$ 內必有一最小值 $2m$．此 m 自不能爲 0，因 u 及 v 在圓上不能同時爲零．上述 m 數之存在，可由是而識之．

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ 及\ f_y(x_0,y_0)=0$$

成立,復有

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0,$$

則 $f(x,y)$ 在此有一莫大或莫小值.如 $f_{xx}<0$(隨之必有 $f_{yy}<0$),則爲莫大值;如 $f_{xx}>0$,則爲莫小值.復次,若

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0,$$

則無莫大又無莫小值可論.至

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$$

時,其事尚不能決.

此條件之意義,復可由幾何觀點闡明之.考必要條件 $f_x=f_y=0$ 之意,謂 $z=f(x,y)$ 之切面,在此實與 xy 平面平行;苟其果爲一莫大或莫小值,則其切面在此點鄰近不能與 $z=f(x,y)$ 相交.反之,苟其無莫大或莫小,則 $z=f(x,y)$ 可在此點鄰近與其切面相交,而其交線將由此點分爲若干分支,俟下節討論曲線之奇點後將更覺明瞭,茲不縷述.

最後復舉數例以明上述方法之用.如有

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+ax+by,$$

求其偏導數爲零,得

$$2x+y+a=0,\quad x+2y+b=0,$$

其解爲 $x=\frac{1}{3}(b-2a)$, $y=\frac{1}{3}(a-2b)$.由是得

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=3$$

爲一正數.復因 $f_{xx}=2$,故在此有一莫小值.

更考

$$f(x,y)=(y-x^2)^2+x^5$$

在坐標原點有一駐值.惟因 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ 在原點爲零,故不能用此法判定.然一觀此函數在原點鄰近可正可負,即可斷定其在原點無莫大或莫小值可論.

復次,試考

$$f(x,y)=(x-y)^4+(y-1)^4$$

在 $x=1$, $y=1$ 有一駐值,惟 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ 爲零.然

$$f(1+h,1+k)-f(1,1)=(h-k)^4+h^4$$

在 $\rho\neq0$ 時爲正，故可斷定其有一莫小值

例 題

若 $\varphi(a)=b\neq0$，$\varphi'(a)\neq0$，而 x，y，z 又滿足

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)=b^3。$$

試證 $f(x)+f(y)+f(z)$ 在 $x=y=z=a$ 時有一莫大值，但假定

$$f'(a)\left(\frac{\varphi''(a)}{\varphi'(a)}-\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}\right)>f''(a).$$

第二節 平面曲線之奇點

前在本章第二節中，已知有所謂曲線之奇點者．若以 $f(x,y)=0$ 爲曲線之方程式，則 $x=x_0$，$y=y_0$ 之同時滿足下列三方程式者

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

常爲一奇點．欲討論奇點之特性，當假定 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 鄰近有二重連續偏導數不全等於零，然後據 Taylor 定理展開，可將 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 鄰近寫成

$$2f(x,y)=(x-x_0)^2f_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(x_0,y_0)$$
$$+(y-y_0)^2f_{yy}(x_0,y_0)+\epsilon\rho^2=0,$$

其中 $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$，而 ϵ 隨 $\rho\to0$ 而趨零．

任何直線之經過 (x_0,y_0) 者，如應用 t 作爲輔變數，必有如下方程式：

$$x-x_0=at,\quad y-y_0=bt,$$

其中 a 及 b 爲兩任意常數，可假定適合 $a^2+b^2=1$ 條件．茲要求此直線與 $f(x,y)=0$ 相交，但將此兩式代入 $f(x,y)$ 之展開式，可知其交點必滿足

$$a^2t^2f_{xx}+2abt^2f_{xy}+b^2t^2f_{yy}+\epsilon t^2=0.$$

觀此方程式，其解顯爲 $t=0$，卽 (x_0,y_0) 點本身，是乃必然之理．所當注意者，此方程式可用 t^2 除盡，故 $t=0$ 實爲其二重根．因此之故，近人常

稱奇點為重點.

將前式除去 t^2 後,得一方程式如下:

$$a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}+\epsilon=0$$

吾人現欲研討者,$f(x,y)=0$除在(x_0,y_0)與此直線相交外,是否更有一交點,然後將此交點向(x_0,y_0)趨近,以觀此直線有無極限可趨.苟其果有一極限,此極限卽吾人所稱在(x_0,y_0)之切線.試將所假定存在之交點向(x_0,y_0)趨近,意卽$t\to0$,因之ϵ亦隨之趨零.如是欲求上列方程式依然滿足,必$a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}$亦趨零而後可.據是以論,苟在$(x_0,y_0)$果有切線存在,必由下列條件

$$a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}=0$$

規定之.

考此為規定$\frac{a}{b}$之二次方程式.苟其

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0,$$

則有兩條不同切線.於是 $f(x,y)=0$ 在此謂有一重點或有一結[1]點.例如 $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ 在 $x_0=0$, $y_0=0$,及 $(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x=0$ 在 $x_0=a$, $y_0=0$ 各有一結點.

苟 $$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0,$$

則僅有一條切線.如是則 $f(x,y)=0$ 在此可能有兩分支相切,是謂尖點.

最後所欲討論者,為

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0,$$

苟如是,則無切線存在(謂無一實數,表達切線之方向).例如 $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=a^4+b^4$ 在$x=0,y=0$卽有一如是之奇點.此點之鄰近點,如 x,y 之滿足 $|x|<a\sqrt{2}$, $|y|<b\sqrt{2}$者皆未能滿足此曲線之方程式,故此點 $x=0,y=0$ 實離衆獨立,其旁更無他點,是為孤點.

(1)node.

綜觀以上所論，奇點之分類及特性，已約略可見．惟在此所假定者，為二重偏導數不能全等於零．否則將有他種繁複情形發見，非本書所能論列．

最後擬將奇點之性質與莫大莫小值問題之關係，略加討論．假定 $f(x,y)$ 之初重偏導數為零，則 $z=f(x,y)$ 在其駐點上之切面將有如下方程式

$$z-f(x_0,y_0)=0.$$

如是則 $z=f(x,y)$ 與其在 (x_0,y_0) 之切面必交於

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=0,$$

是即為其相交線在 xy 平面中之投影，而 (x_0,y_0) 實為此曲線之奇點．苟此奇點為一孤點，則 $z=f(x,y)$ 在其鄰近與其切面不能更有其他交點，如是則 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 即有一莫大或莫小值．苟此奇點為一結點，則 $z=f(x,y)$ 在此將與其切面相交於一曲線之兩支．此結果適與前節所論之充分條件相符，讀者幸前後參閱，善自體會而得之也．

第三節　曲面之奇點

應用與前節所述類似之推理，可以研討一曲面之奇點．試以 $f(x,y,z)=0$ 為曲面之方程式，並為推理之便，假定坐標原點為滿足

$$f=0,\quad f_x=0,\quad f_y=0,\quad f_z=0$$

之點，復以

$$f_{xx}=\alpha,\ f_{yy}=\beta,\ f_{zz}=\gamma,\ f_{xy}=\lambda,\ f_{yz}=\mu,\ f_{xz}=\nu,$$

則有

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\lambda xy+2\mu yz+2\nu xz=0$$

方程式以決定 (x,y,z)，居於經過零點之切線者．此方程式表一兩支錐體，與曲面相切於奇點者，是與曲面在尋常點上之有一確定切面者顯然不同．苟吾人假定此方程式除 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 外尚有他根，復假定 $\alpha,\beta,\cdots\cdots,\nu$ 等不全為零，即可從而研討其在奇點之特性為何如．

第四節 描寫流體運動之兩種方法

欲描寫流體之運動狀態，可設想一質點在時間 $t=0$ 之坐標爲 (a,b,c)，於是其動態可由三個函數

$$x=x(a,b,c,t),$$
$$y=y(a,b,c,t),$$
$$z=z(a,b,c,t),$$

或由一規定位置之矢量 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(a,b,c,t)$ 以識之．其速度及加速度則由此函數對 t 之導數表達之．如是則規定速度之矢量 $\dot{\mathbf{x}}$（其矢量部分爲 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$）及規定加速度之矢量 $\ddot{\mathbf{x}}$（其矢量部分爲 $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$），皆爲其開始坐標 a,b,c 及時間 t 之函數．明此函數，則不論 t 之値爲何如，可由 a,b,c 以推 x,y,z．試假定一流體爲種種質點所組成，苟知其各質點之開始坐標 a,b,c，可從而明其如何移於 x,y,z，則其動態如何，自可昭然若揭．是爲 Lagrange 之描寫法，其主旨在乎闡明各質點運動前後坐標之關係．若對於流體之組織不欲有所假設，但以速度矢量爲時空之函數：

$$u(x,y,z,t),\ v(x,y,z,t),\ w(x,y,z,t)$$

而描寫之，則有所謂 Euler 之法．

此兩法自可相互溝通．欲由 Lagrange 法轉爲 Euler 法，當將 a,b,c 化爲 x,y,z,t 之函數，代入 $\dot{x}(a,b,c,t)$，$\dot{y}(a,b,c,t)$，$\dot{z}(a,b,c,t)$，

得
$$u(x,y,z,t)=\dot{x}[a(x,y,z,t),b(x,y,z,t),c(x,y,z,t)],$$
$$v(x,y,z,t)=\dot{y}[a(x,y,z,t),b(x,y,z,t),c(x,y,z,t)],$$
$$w(x,y,z,t)=\dot{z}[a(x,y,z,t),b(x,y,z,t),c(x,y,z,t)].$$

復由
$$\dot{x}(a,b,c,t)=u[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

可以計算加速度矢量如：

$$\ddot{x}=u_x\dot{x}+u_y\dot{y}+u_z\dot{z}+u_t,$$

[illegible]

[illegible]

或 $\ddot{x} = u_x u + u_y v + [illegible]$

$\ddot{y} = [illegible]$

$\ddot{z} = [illegible]$

吾人在流體力學中有[illegible]關係

$$\operatorname{div} v = [illegible]$$

其中

$$D(x, y, z, t) = [illegible]$$

是即闡明兩法如何相通之道,讀者可自證之.

第五節 週合曲線之切線表達法

設有一族直線如

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中 α 爲一輔變數, $p(\alpha)$ 假定爲二回連續可導且爲一週期函數,其週期爲 2π (世常稱之爲切線函數). 此族直線之包線 C 爲一週合曲線,滿足(1)而又滿足

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - p'(\alpha) = 0,$$

故其方程式爲

$$\left.\begin{aligned} x &= p\cos\alpha - p'\sin\alpha \\ y &= p\sin\alpha + p'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

考(1)所表者,爲 C 之切線,亦稱 C 之**切線表達式**.

試將(2)向 α 求導數,得

$$x' = -(p + p'')\sin\alpha,$$

$$y' = (p + p'')\cos\alpha,$$

由是即可求得 C 之長 L 及其所圍面積 A 如下.

$$L=\int_0^{2\pi}(p+p'')d\alpha=\int_0^{2\pi}p\,d\alpha,$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-yx')d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p+p'')p\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)d\alpha.$$

因 $p'(\alpha)$ 亦爲一循環函數，其週期爲 2π 故也．據此，吾人可建立一重要關係，謂 $L^2\geq 4\pi A$.
其中等號僅對圓始能成立．於是知一切週合曲線之長相等者，以圓所圍之面積爲最大．

欲證此，可將 $p(\alpha)$ 依 Fourier 展開之

$$p(\alpha)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu\alpha+b_\nu\sin\nu\alpha),$$

又

$$p'(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(b_\nu\cos\nu\alpha-a_\nu\sin\nu\alpha),$$

然後根據上卷 9.4.2 所論，可知

$$L=\pi a_0,$$

$$A=\frac{\pi}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}-\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu^2-1)(a_\nu^2+b_\nu^2)\right].$$

由是得

$$A\leq\frac{\pi a_0^2}{4}=\frac{L^2}{4\pi};$$

式內之等號惟在 $a_\nu=b_\nu=0\ (\nu\geq 2)$ 時方能成立，其時將有 $p(\alpha)=\dfrac{a_0}{2}+a_1\cos\alpha+b_1\sin\alpha$．由是則(2)爲一圓，讀者可自證之．

---

①欲作一曲線，與 C 平行而相距爲 c 者，但令式中之 $p(\alpha)$ 改爲 $p(\alpha)+c$ 即可．故此平行線之長及其所圍面積不難由是以推知之．

第四章 重積分

第一節 含輔變數之定積分

4.1.1. 舉例

設 $f(x,y)$ 為一連續函數，其自變數之變區為一長方形，如 $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $a\leqq y\leqq b$. 吾人可假定其中 x 暫時固定，將 $f(x,y)$ 對 y 求定積分，於是

$$\int_a^b f(x,y)dy$$

之意義自顯而易明. 此定積分值可隨 x 而異，故其實不僅為一個定積分，可謂一族定積分；而 x 在對 y 求積時暫時固定，其值在規定變區內仍可隨意變化者，吾人以輔變數稱之. 故此定積分實為一輔變數之函數.

定積分之含輔變數者，固數見不鮮，例如

$$\int_0^1 \frac{x\,dy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=\arcsin x,$$

可以 $xy=u$ 代替而知之. 又求普通冪函數時，可將其中指數視作輔變數，從而得知

$$\int_0^1 y^x dy=\frac{1}{x+1},$$

在此自必假定 $x>-1$. 諸如此類，皆為含有輔變數之定積分.

令 $f(x,y)$ 中一個變數暫時固定，先對其他一變數求積分之理，可由幾何觀點闡明之. 試先假定 x 及 y 之變區為一長方形如圖 4.1. 於是令 x 固定，視 $f(x,y)$ 為 y 之函數，其意即謂作一直線與縱軸平行，如圖 4.1 中之 AB，然後沿 AB 以求 $f(x,y)$ 之定積分耳.

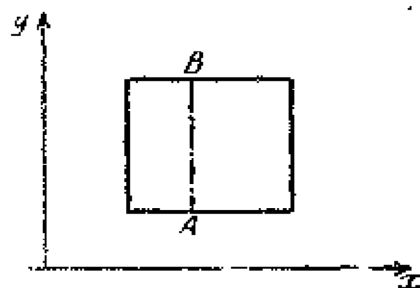


圖 4.1

此說既明，吾人可廣其意以論一普遍情形，即 $f(x,y)$ 中 x 及 y 之變

區未嘗爲一長方形，而爲一任何迴合曲線所圍成者（假定此曲線按段光滑，又與平行於縱軸之直線至多僅能相交於兩點如圖 4.2），其理亦復相似．試令 x 固定於某值，爲即作一平行於縱軸之直線如圖 4.2 中之 AB，吾人可將 $f(x,y)$ 沿 AB 線求定積分．而 AB 線與變區邊際之交點（僅有兩交點）即爲定積分之上下界，惟此上下界不能爲常數，而必隨 x 而異．此其與前不同之處，至其所以然之故，自不難想見．因此之故，遂得

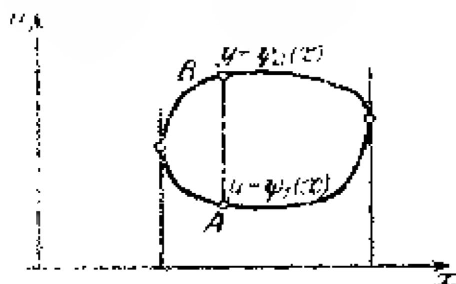


圖 4.2

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy = F(x),$$

是爲一隨輔變數而變之定積分，其中輔變數 x 不僅在 $f(x,y)$，又同時在其上下界中出現．

舉例明之．設 x 及 y 之變區爲一圓，以原點爲中心而半徑爲 1 者，又 $f(x,y)$ 在此圓內處處連續，則有下列積分

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \qquad 及 \qquad \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

可供討論，前者視 x 爲輔變數，而後者以 y 爲輔變數，皆同時出現於其上下界．其幾何意義，讀者可自覓得之．

4.1.2. 在積分符號下求導數

含輔變數 x 之積分如

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy,$$

若 $f(x,y)$ 在其變區中爲連續，亦必爲 x 之一連續函數．此理可證之如次．據定義既有

$$\left|F(x+h)-F(x)\right| = \left|\int_a^b [f(x+h,y)-f(x,y)]\,dy\right|$$

$$\leqq \int_a^b \left|f(x+h,y)-f(x,y)\right| dy;$$

復據 $f(x,y)$ 之連續性，可知不論 y 之值爲何如，但求 h 相當小，試任意指定一 ϵ'，又令 $\epsilon = \frac{\epsilon'}{b-a}$，必可求得一 δ，僅隨 ϵ' 而異，與 y 之變無

關者，使 $|h|$ 小於 δ 時，足致

$$|F(x+h,y)-F(x)|<\epsilon$$

成立．是即欲證之理．

既證 $F(x)$ 之連續性，其定積分自必存在．因之吾人可將 $F(x)$ 求積，從而得

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)dy\right)dx.$$

居右之積分可簡稱爲

$$\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,y)dy\,dx.$$

謂之**重積分**(在此爲兩重積分)．蓋將 $f(x,y)$ 在 x 暫時固定之條件下對 y 求積，如是獲得之積分爲 x 之函數，然後更對 x 求積而得之者．

繼此所欲討論者，爲 $F(x)$ 是否可導之問題．試先假設此含輔變數之積分有固定之上下界如

$$\int_a^b f(x,y)dy.$$

復假定 $f(x,y)$ 在其閉區內處處有對 x 之連續偏導數 f_x，從而討論 $F(x)$ 之可導性，即

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy$$

之存在及如何求之之問題．欲解答此問題，吾人擬證如下定理．

苟 $f(x,y)$ 在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$，$a\leqq y\leqq b$ 變區內對 x 之偏導數 f_x 有連續性，則吾人可在積分符號下求導數，換言之，在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 有下列關係成立：

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy=\int_a^b f_x(x,y)dy;$$

意謂 $f(x,y)$ 先對 y 求積，後對 x 求導，其結果與先對 x 求導，後對 y 求積相同，換言之，對 y 求積與對 x 求導兩種運算可以互易先後，不致影響所得之結果．欲證此理，可在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 之間任取 x 及 $x+h$ 兩值，根據 $F(x)$ 之定義而得

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b f(x+h,y)dy-\int_a^b f(x,y)dy$$
$$=\int_a^b [f(x+h,y)-f(x,y)]dy.$$

因 $f(x,y)$ 爲可導，遂得應用微分學中之中値定理，得①

$$f(x+h,y)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y),\qquad 0<\theta<1.$$

復因 f_x 在閉區內假定爲連續，因之必爲匀連續，惟如是，但令 h 相當小，必足致

$$f_x(x+\theta h,y)-f_x(x,y)$$

之絕對値小於任何小之 ϵ，而 ϵ 必與 x 及 y 無關，僅隨 $h\to 0$ 而趨零者．因此之故，遂有

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b f_x(x,y)dy\right|$$
$$=\left|\int_a^b f_x(x+\theta h,y)dy-\int_a^b f_x(x,y)dy\right|<\epsilon(b-a);$$

從而得

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\int_a^b f_x(x,y)dy,$$

是卽欲證之理．

更進而論 $F(x)$，爲一含輔變數之積分，其輔變數同時含於上下界者．欲求此種 $F(x)$ 之導數，至是亦無何種困難．假定

$$F(x)=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy$$

中之 $f(x,y)$ 在其變區中有連續偏導數．又 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之導數亦復連續，則應用 $u=\psi_1(x)$, $v=\psi_2(x)$，可將 $F(x)$ 視作疊函數：

$$F(x)=\int_u^v f(x,y)dy=\phi(u,v,x);$$

應用鏈導法以求其導數：

---

① θ 在此可隨 y 而異，或竟隨 y 而作不連續之變化．惟此舉殊無關係，因由 $f_x(x+\theta h,y)=h^{-1}[f(x+h,y)-f(x,y)]$，可見 $f_x(x+\theta h,y)$ 爲 x 及 y 之連續函數，故其積分必存在無疑．

$$F'(x)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

於是根據適所證明之理及微積分學之基本定理可知

$$F'(x)=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f_x(x,y)dy-\psi'_1(x)f(x,\psi_1(x))+\psi'_2(x)f(x,\psi_2(x)),$$

是為對積分中輔變數求導之理，至是已得普遍之解決．

茲更舉數例於下，以明其用，如

$$F(x)=\int_0^x \sin(xy)dy,$$

則

$$\frac{dF(x)}{dx}=\int_0^x y\cos(xy)dy+\sin(x^2).$$

又如

$$F(x)=\int_0^1\frac{x\,dy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=\arcsin x,$$

則

$$F'(x)=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

復次，若

$$F_n(x)=\int_0^x\frac{(x-y)^n}{n!}f(y)dy,$$

$$F_0(x)=\int_0^x f(y)dy,$$

其中n假定為任何正整數，$f(y)$為一連續函數．於是求$F_n(x)$之導數，得

$$F_n'(x)=F_{n-1}(x).$$

試繼續為之，因對上界求導，結果為零，又因$F_0'(x)=f(x)$，遂得

$$F_n^{(n+1)}(x)=f(x).$$

於是知$F_n(x)$之$(n+1)$重導數為$f(x)$，從而知$f(x)$繼續求積$n+1$次之後必為$F_n(x)$，惟據上述結果，此逐番求積得以$\frac{(x-y)^n}{n!}f(y)$對y求積之法替代之．

觀上述證明，實根據積分符號下所求得之導數處處連續．苟其未嘗處處連續，未始不可應用此法以求得真確之結果．惟吾人在此對其應用之普遍條件，無暇作深入之研討．但在特殊情形下，一考其事之是否許可，細觀下例，即可概見．

試觀下列橢圓積分(參閱上卷第四章第六節)：

$$F(k)=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};\qquad (k^2<1)$$

其中

$$f(k,x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

在 $x=+1$ 及 $x=-1$ 未嘗連續,惟其積分實爲一收斂之旁義積分. 試在積分符號下求導數,得

$$F'(k)=\int_{-1}^{+1}\frac{kx^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)^3}}.$$

此關係是否眞確,非細加研討不可. 若追溯 $F'(k)$ 之原來定義,可由是引出

$$\frac{F(k+h)-F(k)}{h}=\int_{-1}^{+1}f_k(k+\theta h,x)dx=\int_{-1}^{+1}\frac{(k+\theta h)x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(k+\theta h)^2x^2)^3}},$$

此式與上面所得結果之差爲

$$\Delta=\int_{-1}^{+1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{k+\theta h}{\sqrt{(1-(k+\theta h)^2x^2)^3}}-\frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}}\right]dx;$$

如能證明 Δ 隨 $h\to0$ 而趨零,則其事卽爲成功. 欲證此,可劃定 k 之一段變程如 $k_0\leqq k\leqq k_1$, 其中不含 ±1, 復令 h 如是小,使 $k+\theta h$ 居此變程之內. 如是則在 $-1\leqq x\leqq1$ 及 $k_0\leqq k\leqq k_1$ 之內

$$\frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}}$$

爲一連續函數,因之遂爲均勻連續. 因此可以推斷

$$\left|\frac{k+\theta h}{\sqrt{(1-(k+\theta h)^2x^2)^3}}-\frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}}\right|<\epsilon,$$

其中 ϵ 爲與 x 及 k 無關,僅隨 $h\to0$ 而趨零之一正數. 由是知 Δ 之絕對值必小於

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\epsilon=M\epsilon,$$

其中 M 爲一與 ϵ 無關之常數,故 Δ 實隨 $h\to0$ 而趨零,卽吾人欲證之理. 於是知積分符號下求導數,在此仍然可行. 惟此積分要爲一旁義積分,果在何種條件下可將上述之求導法推用於旁義積分,爲一重要問題,當於本章附錄中略論之.

例　題

1. 試求

$$F(y)=\int_0^1x^{y-1}(y\log x+1)dx.$$

2. 假定 $f(x,y)$ 爲兩重連續可導,又 $u(x,y,z)$ 爲

$$u(x,y,z)=\int_0^{2\pi}f(x+z\cos\varphi,y+z\sin\varphi)d\varphi,$$

試證

$$z(u_{xx}+u_{yy}-u_{zz})-u_z=0.$$

3. *若 $f(x)$ 爲兩重連續可導,又

$$u(x,t)=\frac{1}{t^{p-2}}\int_{-t}^{+t}f(x+y)(t^2-y^2)^{\frac{p-3}{2}}dy\qquad(p>1).$$

試證

$$u_{xx}=\frac{p-1}{t}u_t+u_{tt}.$$

4. 所謂 Bessel 函數 $J_0(x)$, 其定義爲

$$J_n(x) = [illegible]$$

試證 [illegible]

5．若 n 為零或正整數，Bessel 函數 [illegible] 之定義為

$$J_n(x) = [illegible] dt,$$

試證 (a) [illegible] $(n \geqq 0)$．

(b) [illegible] $(n \geqq 1)$

及 [illegible]

第二節 連續函數之重積分

4.2.1. 兩重積分之幾何意義

由幾何觀點導論積分概念，最為簡明易曉，引人入勝，無論為一個或兩個自變數之積分，皆可循此途徑作初步之探討．試在 xy 平面中劃一閉區，簡稱為 R，其邊際為一連續且具有逐段連續導數之曲線．設有 $z=f(x,y)$，當其自變數 x 及 y 在 R 中平行變化時，為一處處連續之函數，復假定其值無處為負．如是則其幾何意義為 xyz 空間中之一曲面，懸於 R 之上空．此曲面與 R 相隔之空間當有其體積可言．此體積將如何知之．憑吾人之觀覺，雖可信此體積之存在，然平情論之，要不可無一明確之說明．故吾人之問題，如何為此體積立一精確定義．讀者既熟習極限之思想，其最簡捷之法自必將 R 裂為 N 個分區如 $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_N$，各有光滑之邊線，然後在各分區 R_i 中求 f 之最大值 M_i 及最小值 m_i．各分區 R_i 之面積分別以 ΔR_i 稱之．若以 ΔR_i 為底，建一柱面，其高為 M_i，更以 ΔR_i 為底，建一柱面，其高為 m_i 者．此兩種柱面分別合併後之體積自為 $\sum_{i=1}^{N} M_i \Delta R_i$ 及 $\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta R_i$．如以 V 表吾人所欲規定之體積，隔於 $f(x,y)$ 及 R 之間者，其間關係必為

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta R_i \leqq V \leqq \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta R_i,$$

觀圖 4.3，更覺顯然.

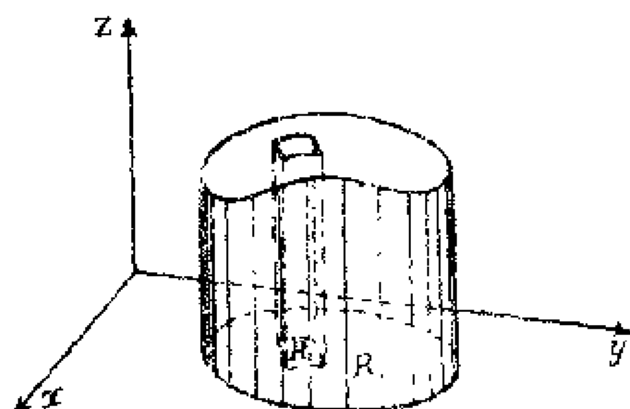


圖 4.3

明乎是，吾人可使分區趨細，即N趨大，隨之而R_i之最大直徑(即R_i中兩點之最大距離)趨零，如是則憑觀覺可知 $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\Delta R_i$ 與 $\sum\limits_{i=1}^{N} M_i\Delta R_i$ 彼此將愈見接近而共趨於V.因之V可視爲此兩和數在$N\to\infty$時之極限，惟此極限之存在，必有一嚴密之證明耳.

苟此極限果能存在，吾人可捨m_i或M_i而取其間之任何一數，如$f(x,y)$在R_i中任何一點(x_i,y_i)之值$f(x_i,y_i)$，從而組織 $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\Delta R_i$，則在$N\to\infty$時亦必趨同一極限.

4.2.2. 重積分之解析定義

綜觀上說，全憑觀覺. 茲擬剖析抽象，求與觀覺獨立而爲重積分建一解析定義.設有一閉區R，其面積爲ΔR.假定$f(x,y)$在此區內，包括其邊線在內，處處連續. 將R用按段光滑之曲線① 分作N個分區$R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots,R_N$，其面積分別爲$\Delta R_1,\Delta R_2,\cdots\cdots,\Delta R_N$.在每一分區$R_i$中，任意擇定一點$(\xi_i,\eta_i)$，得$f(x,y)$在此點之值，以$f_i=f(\xi_i,\eta_i)$表之.從而組成：

$$V_N=\sum_{1}^{N} f_i\Delta R_i.$$

於是吾人欲證之基本定理爲：此V_N在N趨大即其分區之最大直徑趨

①即在一適當坐標系由$y=\varphi(x)$可以表示之曲線，$\varphi(x)$除其導數至多作有志次跳躍外，爲一連續函數.

零時，不論分區如何產生及分區內各點 (ξ_i,η_i) 如何選擇，必趨一極限 V。此極限 V 謂之 $f(x,y)$ 在 R 區內之兩重積分，以如下符號表而出之

$$\iint_R f(x,y)dS.$$

循是以論，當吾人組織 V_N 時，若就其分區中僅取其居於 R 之內者，即假定一切 R_i 與 R 之邊線無共同點者，於事已足。蓋如其果能收斂，必斂於同一極限，可以斷言。

此爲一存在定理①，謂函數之連續者，其重積分必能存在。其證與上卷論一個自變數時相似，當於本章附錄中詳之。

爲求積分概念透徹明瞭，特例舉數種分區之法於後。請先論最簡單之變區，如 R 爲一長方形，即 x 及 y 之變，限於 $a\leqq x\leqq b$，$c\leqq y\leqq d$。其分區 R_i 亦爲長方形，由下法組成之。將橫軸上由 $x=a$ 達 $x=b$ 之一段等分爲 n 段，名其分點爲 $x_0=a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n=b$。復將縱軸上由 $y=c$ 達 $y=d$ 之一段等分爲 m 段，名其分點爲 $y_0=c, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m=d$，各段之長分別爲

$$h=\frac{b-a}{n},\quad k=\frac{d-c}{m}.$$

然後經過各分點作平行於縱橫軸之直線，從而得 $N=nm$ 個分區，其面積爲 $\Delta R_i=hk$，或應用 $h=\Delta x, k=\Delta y$，可寫如 $\Delta R_i=\Delta x\Delta y$，分

①此定理可再求精密，爲應用範圍擴張，當設法削減其中所假設。在每一分區中，任意擇定一點 (ξ_i,η_i) 之後，吾人不必定求 f 在此點所應得之值 $f(\xi_i,\eta_i)$，但求一值，與此相當接近，即其間有一差數，而此差數，不論在任何分區，在分區趨小時趨於零者，亦未始不可。換言之，吾人不必定取 $f(\xi_i,\eta_i)$，可取 f_i 以替代之，f_i 爲

$$f_i=f(\xi_i,\eta_i)+\epsilon_{i,N},$$

但假定其中 $|\epsilon_{i,N}|<\epsilon_N$，$\lim_{N\to\infty}\epsilon_N=0$。此事之實確，自顯而可見。蓋既假定 $\epsilon_{i,N}$ 勻斂於零（即與 i 無關，僅隨 $N\to\infty$ 時趨零之意），則

$$\sum_1^N f_i\Delta R_i \quad 及 \quad \sum_1^N(f_i+\epsilon_{i,N})\Delta R_i$$

兩數相差之絕對值必小於 $\epsilon_N\sum\Delta R_i$，在 N 相當大時自必任意小。因此之故，如 $f(x,y)=P(x,y)Q(x,y)$，則可取 $f_i=P_iQ_i$，其中 P_i 及 Q_i 爲 P 及 Q 在 R_i 之最大值，此最大值自未必在同一點上獲得，於此已可見其便利矣。

區既成，可在各區內任意指定一點(ξ_i,η_i)，求$f(\xi_i,\eta_i)$，由是得

$$\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta x\Delta y$$

若 n 及 m 各自獨立趨大時，此數有一極限，此極限即爲 f 在 R 之兩重積分．

上述分區之法，可應用 $x=a+\nu h$ $(\nu=0,1,2,\cdots,n-1)$ 及 $y=c+\mu k$ $(\mu=0,1,2,\cdots,m-1)$ 記號作爲下標之法而更簡明表達之．如是則上式可寫如

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu,\eta_\mu)\Delta x\Delta y$$

將變區 R 分爲長方形之分區，只於變區本身爲長方形時可行．設 R 爲一按段光滑之曲線所圍成，吾人可設想在平面中有一長方形網，由

$$x=\nu h\quad(\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$y=\mu k\quad(\mu=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所組成，其中 h 及 k 爲任意固定之數．然後一切長方形之完全處於 R 之內者，以 R_i 名之．此種 R_i 自不能將 R 充滿，除此種 R_i 外，將更有其他接近於邊際之分區，以 R_i' 名之，其邊由長方形網中之直線及 R 之邊線所合成者，觀圖 4.4 自明．但吾人不妨僅就處於 R 中之長方形，即一切 R_i，求其之 $f(\xi_i,\eta_i)$ 乘以 ΔR_i 之積和，然後求其極限即可，其理已詳於前矣．

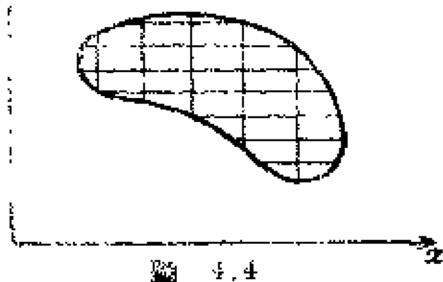
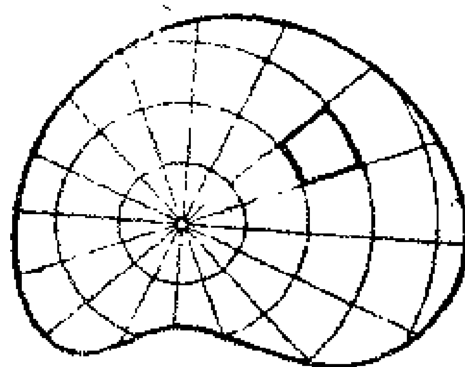


圖 4.4

雖此尚有一分區之法，在應用上頗覺便利，是爲極坐標網，見圖 4.5．假定極坐標系之原點 O 處於變區 R 之中；試令 $\Delta\theta=\frac{2\pi}{n}=h$，又 $\Delta r=k$，作直線 $\theta=\nu h(\nu=0,1,2,3,\cdots\cdots,n-1)$ 經過原點，又作同心圓 $r_\mu=\mu k(\mu=1,2,\cdots\cdots)$．如是即有分區產生，其處於 R 之內者以 R_i 名之，其面積爲 ΔR_i．據初等


圖 4.5

幾何學可知其為

$$\Delta R_\iota=\frac{1}{2}(r_{\mu+1}^2-r_\mu^2)h=\frac{1}{2}(2\mu+1)k^2h.$$

在此必假定 R_ι 之地位，在半徑為 μk 及 $(\mu+1)k$ 兩圓所組成之環中．據是以觀，$f(x,y)$ 在 R 之兩重積分實為

$$\Sigma f(\xi_\iota,\eta_\iota)\Delta R_\iota$$

在 h 及 k 各自獨立趨零時之極限（其中 (ξ_ι,η_ι) 為 R_ι 中任意指定之點，而 R_ι 為處於 R 中之分區）．

4.2.3. 舉例

〔例一〕 如 $f(x,y)=1$，此函數在任何變區 R 之積分自必與 R 之面積相等．由幾何觀點言之，為一柱面之體積，以 R 為底而高為 1 者．

〔例二〕 如 $f(x,y)=x$，假定其變區 R 為一平方形 $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$．既明積分之幾何意義為一種體積，即可知 $f(x,y)=x$ 在 R 之積分必等於 $\frac{1}{2}$．此亦可用積分之解析定義證實之：將 R 分為 n^2 個平方形，其邊之長為 $h=\frac{1}{n}$，復取其中每平方形之左手下角作為指定之 (ξ_ι,η_ι)，則 $f(\xi_\iota,\eta_\iota)=\nu h$．試先合 ν 個沿該平方形左邊坐標為 νh 者而論，以此種平方形（其面積為 h^2）為底，高為 νh 者，其體積自為 νh^3，此種立體共有 n 個，故其為 $n\nu h^3=\nu h^2$．然後令 ν 依次為 $0,1,2,\cdots\cdots,n-1$ 而求其總和，得

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu h^2=\frac{n(n-1)}{2}h^2=\frac{1}{2}-\frac{h}{2},$$

此在 $h\to 0$ 時固趨於 $\frac{1}{2}$．

〔例三〕 $f(x,y)=x\cdot y$ 或 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$，假定其積分區 R 為一長方形如

$$0\leqq x\leqq a,$$

$$0\leqq y\leqq b.$$

將 R 分為 $N=nm$ 個長方形如上段所述，復以每分區之左手下角作為 (ξ_ι,η_ι)，則 $f(\xi_\iota,\eta_\iota)=f(\nu h,\mu k)=\varphi(\nu h)\psi(\mu k)$．因之吾人所欲求之積分為

$$hk\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\varphi(\nu h)\psi(\mu k),$$

在 $n\to\infty$，$m\to\infty$ 時所趨之極限．惟此數亦可寫如

$$\left[\sum_{\nu=0}^{n-1}h\varphi(\nu h)\right]\left[\sum_{\mu=0}^{m-1}k\psi(\mu k)\right].$$

因 h 及 k 各自獨立之故，遂分別趨於一簡積分。由是而論，若 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$，其變數又分別自限於兩常數如 $a\leqq x\leqq b$，$c\leqq y\leqq d$，則二重積分可化為二積分之積：

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\varphi(x)\,dx\cdot\int_c^d\psi(y)\,dy.$$

［例四］　設有　　$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，

其變區 R 假定為一圓，以 1 為半徑，復以坐標原點為中心者，$x^2+y^2\leqq1$。此例題之意義，乃欲求一半球體之體積。在此自以應用極坐標網為最便。試設圓之半徑為 $r_\mu=\mu k$ 及 $r_{\mu+1}=(\mu+1)k$ 者，復取任何兩直線 $\theta=\nu h$ 及 $\theta=(\nu+1)h$，而介於其間之平面為一分區，以 R_i 名之。此種處於同一環內之分區 R_i，共計有 $n=\frac{2\pi}{h}$ 個。在各一 R_i 之中，任意擇定一點如 $\rho_\mu=\frac{r_{\mu+1}+r_\mu}{2}$，從而組成

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r_{\mu+1}+r_\mu}{2}\right)^2}\,(r^2_{\mu+1}-r_\mu^2)h=\sqrt{1-\rho_\mu^2}\,\rho_\mu kh,$$

既有 $n=\frac{2\pi}{h}$ 個 R_i 在同一環內，由是遂得

$$2\pi\sqrt{1-\rho_\mu^2}\,\rho_\mu k.$$

然後令 μ 依次為 $0,1,2,\cdots\cdots,m-1$，一一相加，可知吾人所欲求之積分為

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}2\pi\sqrt{1-\rho_\mu^2}\,\rho_\mu k$$

之極限。惟此在 $m\to\infty$ 時實歛於

$$2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=-\frac{2\pi}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

因此之故，遂有

$$\iint_R\sqrt{1-x^2-y^2}\,dS=\frac{2\pi}{3},$$

是即為半球體之體積。

4.2.4.　積分之估值與中値定理

論至此，積分概念，可瞭然無餘蘊矣。論重積分，必先考其變區 R，而變區之如何劃分，殊無一定。不論分區 R_i 如何組成，但求各分區之直徑趨零時，

$$\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta R_i$$

果有一極限者，即稱之為 $f(x,y)$ 在此變區 R 之重積分；而以

$$\iint_R f(x,y)dS$$

表之,其中 dS 乃暗示 ΔR_i 趨零.惟最初分區之法,以應用長方形網爲多,故常用

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy$$

以表兩重積分,是乃用以表

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{p-1} f(\xi_\nu,\eta_\mu)\Delta x\,\Delta y$$

之極限,其中 $dx\,dy$ 不可看作兩數之積,其意不過一種趨向極限之記號而已.明乎是,可知 R 確定之後,

$$\iint_R f(u,v)du\,dv \quad 或 \quad \iint_R f(\xi,\eta)d\xi\,d\eta$$

所表意義實同,其中表示變數之字母可隨意採用,絕無關係,其理與前論一個自變數之積分時正同,可不贅.

前由幾何觀點導入積分概念時,曾假定 $f(x,y)$ 在其變區內處處爲正.此事殊非必要,在建立積分之解析定義時已可見之.$f(x,y)$ 若負時,其所表曲面將與變區 R 相交.故體積亦可正可負.又 $f(x,y)$ 雖非處處爲零,其在 R 之重積分未始不可爲零,其理至顯,無待縷述.

重積分之義既明,下列關係之眞確,自顯而易見.其一,若 c 爲一常數,則

$$\iint_R c\,f(x,y)dS=c\iint_R f(x,y)dS.$$

其二,若 $f(x,y)$ 及 $\varphi(x,y)$ 爲 R 中兩連續函數,則

$$\iint_R[f(x,y)+\varphi(x,y)]dS=\iint_R f(x,y)dS+\iint_R\varphi(x,y)dS.$$

其三,若 R 爲兩分區 R' 及 R'' 合併而成,而 R' 及 R'' 至多僅有數段之共同邊際者,則

$$\iint_R f(x,y)dS=\iint_{R'}f(x,y)dS+\iint_{R''}f(x,y)dS.$$

其四,若 $f(x,y)$ 在 R 中無處爲負,即 $f(x,y)\geqq 0$,則

$$\iint_R f(x,y)dS\geqq 0.$$

若無處爲正，$f(x,y)\leqq 0$，則

$$\iint_R f(x,y)\,dS\leqq 0,$$

由是知

$$f(x,y)\geqq \phi(x,y),$$

若在 R 中處處成立，則必有

$$\iint_R f(x,y)\,dS\geqq\iint_R \phi(x,y)\,dS.$$

明乎是，可知

$$\iint_R f(x,y)\,dS\leqq\iint_R |f(x,y)|\,dS$$

及

$$\iint_R f(x,y)\,dS\geqq -\iint_R |f(x,y)|\,dS$$

之眞確.推此兩不等式之意義，無異謂

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dS\right|\leqq\iint_R |f(x,y)|\,dS.$$

其五，旣明上述之理，可知 $f(x,y)$ 在 R 中之上下界若分別以 M 及 m 表之，

$$m\leqq f(x,y)\leqq M,$$

則

$$m\Delta R\leqq\iint_R f(x,y)\,dS\leqq M\Delta R$$

之眞確，自無疑義，其中 ΔR 爲 R 之面積.誠如是，若以 μ 表一數，介於 m 及 M 之間者，則

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\mu\Delta R$$

之成立，爲必然之理. 式中之 μ 雖未能確定，惟 $f(x,y)$ 在 R 中若處處連續，則其必有一點，使 $f(x,y)$ 之值爲 μ. 此卽所謂積分學中之中值定理，與本書上卷 2.6.1 所論正同.此中值定理尙可擴充之如下：若 $p(x,y)$ 及 $f(x,y)$ 在 R 中爲連續，又 $p(x,y)$ 爲正，則必有一數 μ，介於 $f(x,y)$ 之最大及最小值之間者，滿足下列關係

$$\iint_R p(x,y)f(x,y)\,dS=\mu\iint_R p(x,y)\,dS.$$

由於上述積分估値之法，可知推知一函數 $f(x,y)$ 之積分必隨

$f(x,y)$ 而作連續性之變化. 意即 $f(x,y)$ 稍稍變化時,其積分隨之而發生之變化亦必甚微. 精言之,若 $f(x,y)$ 與 $\phi(x,y)$ 之差在 R 中未嘗超過一固定正數 ϵ:

$$|f(x,y)-\phi(x,y)|<\epsilon,$$

則其積分

$$\iint_R f(x,y)\,dS \quad 與 \quad \iint_R \phi(x,y)\,dS$$

相差自小於 $\epsilon\Delta R$, 其中 ΔR 指 R 之面積. 故 $\epsilon\Delta R$ 當隨 $\epsilon\to0$ 而趨零.

復次,**一函數 $f(x,y)$ 之積分又隨其變區 R 作連續性之變化**. 若 R' 及 R'' 為兩變區, 其間面積之差小於 ϵ, 又 $f(x,y)$ 在 R' 及 R'' 中皆為連續,其值不超過一固定常數 M,則

$$\iint_{R'} f(x,y)\,dS \quad 與 \quad \iint_{R''} f(x,y)\,dS$$

之差自小於 $M\epsilon$, 因之必隨 $\epsilon\to0$ 而趨零.

要而言之,重積分之值不繫於其變區之細微繁複. 自此理得證之後,如欲求 $f(x,y)$ 在 R 之積分, 可將 R 代以一較簡之變區 R', 如一多邊形,其邊平行於縱橫坐標軸者;但求 R 與 R' 之面積相差甚微,則以是計算而得之誤差可任意微小,而問題即因之簡化多矣.

4.2.5. 三個以上自變數之積分

上述概念與定理可無絲毫改易擴充於三個或多於三個之自變數. 設 x,y,z 之變,限於三維變區 R 之中, 吾人可用有盡個連續且具有連續切面之曲面,組成 N 分區 $R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots,R_N$, 將 R 完全填滿. 若 $f(x,y,z)$ 在 R 中(包括 R 之邊際)處處連續,又 (ξ_i,η_i,ζ_i) 為其分區 R_i 中任意指定之點,則

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta R_i$$

之值,自必確定. 式中之 ΔR_i 乃表示分區 R_i 之體積. 為求簡便故,即僅取其未甚接近邊際之分區已足. 若令式中 N 趨大,即最大分區之直徑趨零時,不論分區如何組成及其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 如何選擇, 必有一極

限存在爲此數所斂,則此極限謂之 $f(x,y,z)$ 在 R 之三重積分,以

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV$$

表而出之. 劃分變區之法, 自以應用平行於坐標平面之平面爲最便,因之其分區可假定爲長方體, 以 Δx, Δy, Δz 爲邊, 其體積自爲 $\Delta x\Delta y\Delta z$. 因此之故,三重積分常由

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

表之.

既明上述之理,欲據是以擴充於任何 n 維空間,其事亦不難. 設有 n 個自變數 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots, x_n$, 其變限於

$$a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + h_1,\ a_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + h_2,\ \cdots\cdots,\ a_n \leqq x_n \leqq a_n + h_n,$$

其分區亦可假定爲長方體. 如是則 n 重積分

$$\iint\cdots\cdots\int_R f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$

之義,自可瞭然.

4.2.6. 積分與微分之關係,總量與比量

積分與微分之關係,前在本書上卷第二章中已詳論之. 其時曾以積分與微分之相逆性爲最基本之定理,且視爲此學所以成功之最要關鍵,並以物理學中總量比量之對峙性闡明之. 今若有兩個以上自變數之函數,而一考其積分與微分,則其間關係亦復相似,雖其意義不若從前之基本,似不可不論及之.

設有重積分如

$$\iint_B f(x,y)\,dS \quad \text{或} \quad \iiint_B f(x,y,z)\,dV,$$

其中 B 乃用以表示兩維或三維變區,而 $f(x,y)$ 及 $f(x,y,z)$ 則在 B 中處處連續. B 之面積或體積不妨均以 ΔB 表之. 吾人在 B 中任取一固定點 P, 其坐標爲 (x_0, y_0) 或 (x_0, y_0, z_0). 於是據中值定理,此兩積分若以 ΔB 除之,必等於一數 μ, 大於 $f(x,y)$ 或 $f(x,y,z)$ 在 B 之最小值,小於 $f(x,y)$ 或 $f(x,y,z)$ 在 B 之最大值. 惟就含 P 之變區 B 以觀,若令 B

之直徑趨零, B 隨之而縮小於 P, 則將有

$$\lim_{\Delta B\to 0}\frac{1}{\Delta B}\iint_B f(x,y)\,dS = f(x_0,y_0),$$

及

$$\lim_{\Delta B\to 0}\frac{1}{\Delta B}\iiint_B f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0,z_0).$$

此種求極限之法，實將一積分對變區求導數(1)，其結果復為原有之函數.

上述積分與微分之關係,亦可自物理學中總量與其密度之關係明之.吾人可設想一種物質散佈於兩維或三維空間中之某區域,且假設任何部分之物質總量可確定.苟欲知此物質在任何一點 P 之密度為何如,當以 P 為中心,在 B 中劃出 P 之近鄰,其面積或容積為 ΔB 者,然後將 ΔB 中之物質總量以 ΔB 除之,是即所謂物質在 ΔB 中之平均密度.此平均密度在 B 之直徑趨零時,不論 P 之近鄰如何選擇,但求其漸縮於 P 時,如果有一極限可趨,此極限即為物質在 P 之密度.如以 $\mu(x,y)$ 或 $\mu(x,y,z)$ 表密度,假定其函數為連續,則上述求索極限之事,無異於

$$\iint_B \mu(x,y)\,dS \quad 或 \quad \iiint_B \mu(x,y,z)\,dV$$

對變區求導數.故此兩積分之意,實為物質分佈於 B 之總量,其密度為 μ 者①.

如是描寫物質在空間中之散佈狀態,由物理學之觀點言之,似屬近於理想.惟物理學必假定此種描寫法相當接近於實際,且其接近之誤差,為實驗所不能控制而後可.

又上述之密度不必定為正數.若為負時,亦未始不可有物理意義,如電荷之散佈即其一例.

第三節　重積分逐步歸於簡積分

重積分之計算，如可逐步化為簡積分(指一個變數之積分)而實施之,則上卷所論積分之法,在此依然可用.故此事之可能與否,實為一重要問題.

4.3.1.　積分之變區為一長方形者

(1) space differentiation; Gebietsdifferentiation

①此說自有一重要假定為根據.假定為何,凡向空間求導數所得為密度之重積分為描寫物質散佈狀態之唯一方法.此事之證明甚不易,在此從略.

設 x 及 y 兩變數之變，限於 $a \leqq x \leqq b$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$，即其變區 R 爲一長方形. 又設 $f(x,y)$ 爲一函數，在 R 中處處連續. 又不妨假定 $f(x,y) \geq 0$. 據前所論，

$$\iint_R f(x,y)\,dS$$

之幾何意義，爲一立體之體積，立於 xy 平面上，而於 $z=f(x,y)$ 之下，四週由平面所圍成者，見圖 4.5. 欲知其體積，可先將立體切成 n 片薄

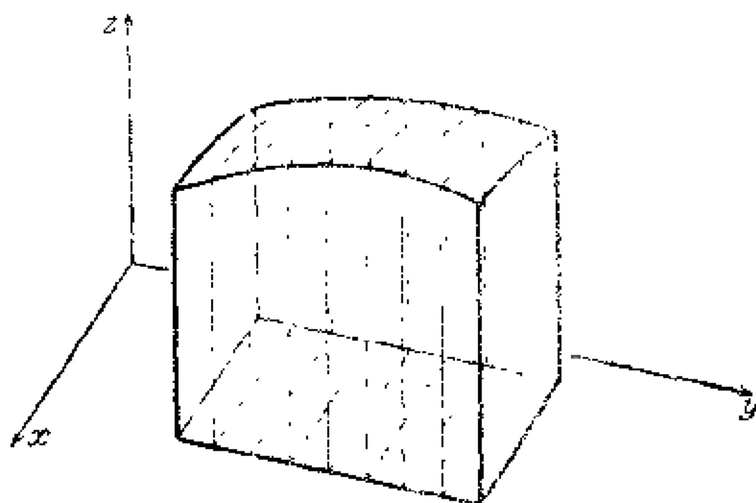


圖 4.6

片，厚各如 $k=\dfrac{\beta-\alpha}{n}$，但作 $y=\alpha+\nu k\,(\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ 諸直線平行於 x 軸，然後沿此作平面與 xz 平面相平行即得. 觀圖 4.6，至爲顯然. 此每一薄片將隨 n 之趨大而趨薄，惟知其每片之體積、相疊相增，則欲求之整個體積，從可知矣. 考每一薄片之體積，約等於其厚 k 乘其左壁之面積，故約爲

$$k\int_a^b f(x,\alpha+\nu k)\,dx.$$

試應用下列縮寫:

$$\int_a^b f(x,y)\,dx=\varphi(y),$$

可知 n 片相疊之體積約如

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(\alpha+\nu k)k.$$

其精確程度自隨 k 之趨薄而益進. 故令 $k=\dfrac{\beta-\alpha}{n}\to 0$ 以求

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy,$$

由是可望獲得

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy.$$

循是以觀，欲求 $f(x,y)$ 在 R 之重積分，即

$$\iint_R f(x,y)\,dS,$$

可令 y 固定，先對 x 求其自 a 達 b 之積分．此積分

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

爲輔變數 y 之函數，又可對 y 求其自 α 達 β 之積分．此事可由

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy,\quad \varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

表之，或簡寫如

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

此理既由幾何觀點闡明之後，特再補述其解析證明於下．欲證此，當仍以重積分之定義作出發點．設

$$h=\frac{b-a}{m}\quad 及\quad k=\frac{\beta-\alpha}{n},$$

則據定義

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h,\alpha+\nu k)hk,$$

復考極限存在之義，不論如何指定一正數 ϵ，必可求得一 N，僅隨 ϵ 而異者，當 m 及 n 各大於 N 時，足致

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h,\alpha+\nu k)hk$$

與

$$\iint_R f(x,y)\,dS$$

相差之絕對值小於 ϵ①．因此之故，如應用如下縮寫：

①前在本卷第二章附錄中曾討論 a_{nm} 在 n 及 m 各自獨立趨大時之極限．此極限之求索可析爲兩步，先令 n 固定時 m 趨大，然後令 n 趨大．此理之證明，即以是爲根據。

$$\Phi_\nu=\sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h,\alpha+\nu k)h$$

可知任意指定 ϵ 之後，如 $\epsilon=\frac{1}{100}$ 或 $\epsilon=\frac{1}{10000}$，必可求得一N，不論 n 爲任何大於 N 之數，凡 n 之大於 N 者皆足投

$$\left|\iint_R f(x,y)dS-k\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_\nu\right|<\epsilon$$

成立．然後令 n 固定於大於 N 之值，此式自必有效．惟 m 大於 N 時，Φ_ν 實歛於

$$\int_a^b f(x,\alpha+\nu k)dx=\phi(\alpha+\nu k),$$

故上式可寫如

$$\left|\iint_R f(x,y)dS-k\sum_{\nu=1}^{n}\phi(\alpha+\nu k)\right|\leqq\epsilon.$$

於是令 $n\to\infty$（卽 k 趨零），遂得根據積分定義及$\int_a^b f(x,y)dx=\varphi(y)$ 之連續性以知

$$\lim_{n\to\infty}k\sum_{\nu=1}^{n}\phi(\alpha+\nu k)=\int_\alpha^\beta\phi(y)dy.$$

由是得

$$\left|\iint_R f(x,y)dS-\int_\alpha^\beta\phi(y)dy\right|\leqq\epsilon,$$

式中 ϵ 既爲任意小，而式之左方爲固定，故非零不可，從而知

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

據同理，可知

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy,$$

故重積分之計算，實爲兩次簡積分先後實施．

4.3.2. 積分次序之互易；在積分符號下求導數

綜觀上述結果，得

$$\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy,$$

是卽所謂積分次序互易先後．苟 $f(x,y)$ 爲一連續函數，其變區 R 爲一長方形如 $a\leqq x\leqq b$，$\alpha\leqq y\leqq\beta$，欲求其在 R 之重積分，可先對其中之一

變數求積分，然後對其他變數求積分．換言之，如欲將 $\int_a^b f(x,y)dx$ 對 y 求積，可在積分符號下行之，即先對 y，後對 x 求積分．此理與前論積分符號下求導數之法相對峙，讀者可前後比觀而深得之．

復次，觀上列重積分，如假定其中 b 為一補變數，則可對 b 求導數，於是據微積分學之基本定理必有

$$\frac{\partial}{\partial b}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta f(b,y)\,dy.$$

或視 β 為一補變數，對 β 求導，則有

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x,\beta)\,dx.$$

由是可以推知①

$$\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial \beta}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=f(b,\beta).$$

前述之理，應用甚廣．如一函數之不定積分未能求得而欲求其定積分，若顛倒積分次序，常見奇效．特舉一例於後，在本章附錄，將有更多類是之例，可參閱之．

例如
$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx, \qquad b>0,\ a>0$$

此可出以重積分之形式如

$$I=\int_0^\infty dx\int_a^b e^{-xy}\,dy.$$

因其為一旁義積分，須研討下列極限

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T dx\int_a^b e^{-xy}\,dy;$$

惟將
$$\int_0^T dx\int_a^b e^{-xy}\,dy$$

中積分次序互易，則

$$\int_0^T dx\int_a^b e^{-xy}\,dy=\int_a^b dy\int_0^T e^{-xy}\,dx=\int_a^b \frac{1-e^{-Ty}}{y}\,dy$$

$$=\log\frac{b}{a}-\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}\,dy.$$

復因
$$\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}\,dy=\int_{Ta}^{Tb}\frac{e^{-y}}{y}\,dy$$

①此事與前論求導次序互易之理必有關係可尋，讀者可自求之．

隨 $T\to\infty$ 而趨零，遂得

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\log\frac{b}{a}.$$

循是以論，下列定理之真確，不難想見：若 $f(x)$ 在 $x\geq 0$ 時為連續，且

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$$

假定為斂積分，則

$$I=\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\log\frac{b}{a}\qquad (a>0,\ b>0).$$

蓋吾人可將 I 寫成重積分如

$$I=\int_0^\infty dx\int_a^b f'(xy)\,dy,$$

然後將積分次序互易，此理得證，前例所以然之故，亦得一簡易之解釋。

4.3.3. 所得結果擴充於較普遍之變區

設有一凸形變區 R，其邊際與任何直線相交不能過於兩點（兩點間之直線若為邊際之一部分時，自須除外）（如圖 4.7），又假定此變區左右為

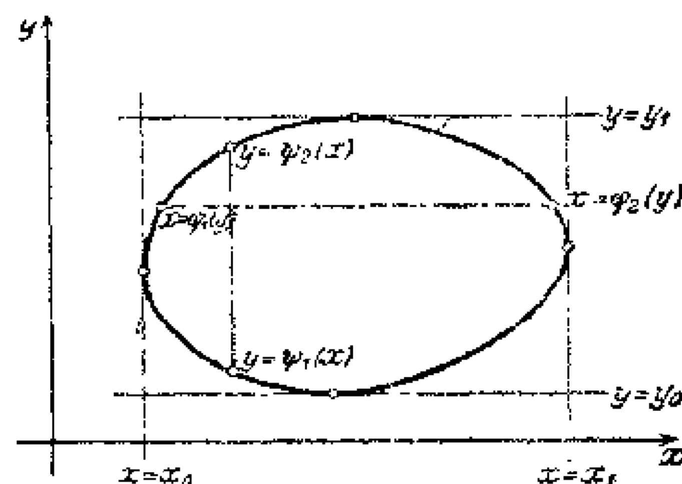


圖 4.7

$x=x_0$ 及 $x=x_1$ 兩直線所限制，上下不超越 $y=y_1$ 及 $y=y_0$ 兩直線，故完全處於一長方形之中。如是欲求

$$\iint_R f(x,y)\,dS$$

勢必將其中變數之一固定於某值而對其他求積。若令 y 固定，意即作一平行於橫軸之直線 $y=c$（c 為常數），此直線與 R 之邊際相交於兩點，其居左之交點稱之為 $\varphi_1(y)$，居右者稱之為 $\varphi_2(y)$，其位自隨 y 而異，

因之遂有

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

是爲一含輔變數之積分，其輔變數同時出現於上下界者．據同理，可以明

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

之意義，乃令 x 固定，作平行於縱軸之直線 $x=x$，其與 R 之相交處分別爲 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$，然後對 y 求積．吾人所欲證者，苟 $f(x,y)$ 爲 R 中之一連續函數，則

$$\iint_R f(x,y)\,dS = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

欲證此，可將 R 之邊線分作上下兩段觀，其上段爲 $y=\psi_2(x)$，下段爲 $\psi_1(x)$，見圖 4.8．在每段上，任取一點列，其中每兩點相距不超過一正數 δ 者，然後在 R 中作平行於縱橫軸之直線綫段以連接之．如是卽得

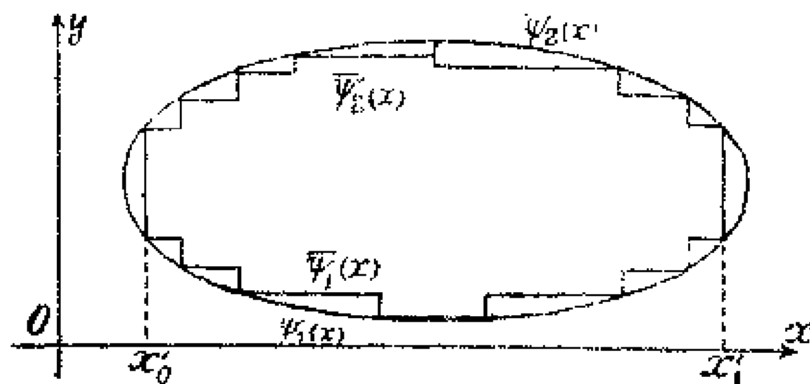


圖 4.8

一新變區 $\overline{R}$，完全處於R之內而由有盡個長方形所合成．就$\overline{R}$之邊線觀之，其上下段分別爲兩按段連續之函數 $y=\overline{\psi}_2(x)$ 及 $y=\overline{\psi}_1(x)$，而此兩函數，不論 x 如何變化，當 δ 趨零者，必分別歛於 $\psi_2(x)$ 及 $\psi_1(x)$，卽 δ 甚小時，足致

$$|\overline{\psi}_1(x)-\psi_1(x)|<\epsilon,\quad |\overline{\psi}_2(x)-\psi_2(x)|<\epsilon$$

成立，其中 ϵ 為僅隨 δ 趨小、不因 x 而變之數，是謂之均斂於 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$，惟 $\overline{R}$ 既為有盡個長方形所合成，前證之理，在此必依然有效．故得

$$\iint_{\overline{R}} f(x,y)\,dS=\int_{x_0'}^{x_1'}dx\int_{\overline{\psi}_1(x)}^{\overline{\psi}_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

因 $\overline{\psi}_1(x)$ 及 $\overline{\psi}_2(x)$ 在 $\delta\to 0$ 時分別均斂於 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$，可知

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\overline{\psi}_1(x)}^{\overline{\psi}_2(x)}f(x,y)\,dy=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

由是得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{x_0'}^{x_1'}dx\int_{\overline{\psi}_1(x)}^{\overline{\psi}_2(x)}f(x,y)\,dy=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

復因 $\overline{R}$ 在 $\delta\to 0$ 時趨於 R 之故，得知

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{\overline{R}} f(x,y)\,dS=\iint_R f(x,y)\,dS$$

於是遂得

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

據同理，可以證

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\,dx.$$

至是前證之理，已擴充於此種較普遍之變區矣．

又若變區 R 在某處偶失凸性，而平行於縱橫軸之直線與其邊際至多在有盡個點上相交者（見圖 4.9），可分段求積，證明上述之理依然有效．其證視前無大差別，故不贅．



圖 4.9

［例一］ 如變區 R 為一圓如 $x^2+y^2\leqq 1$，則

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$$
$$=\int_{-1}^{+1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx.$$

［例二］ 若變區 R 爲一圓環，介於 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=4$ 兩圓之間者，圖 4.10，則

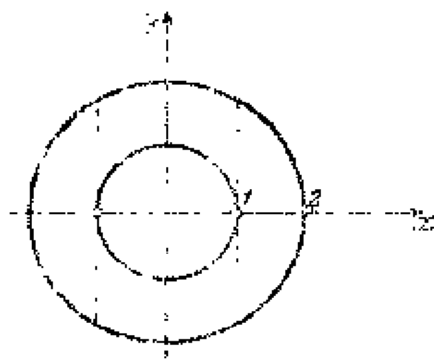


圖 4.10

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{+1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{+1}dx\int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

［例三］ 若變區 R 爲一三角形，由 $x=y$，$y=0$ 及 $x=a(a>0)$ 三直線所圍成，如圖4.11，則先對 x 求積

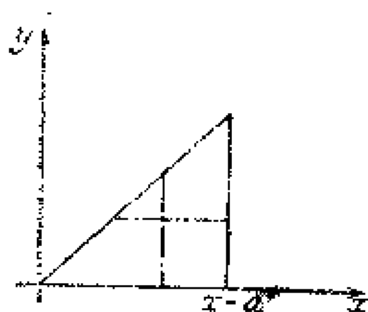


圖 4.11

$$\iint_R f(x,y)dS=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx,$$

或先對 y 求積

$$\iint_R f(x,y)dS=\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy,$$

遂有

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx.$$

若 $f(x,y)$ 與 x 無關，僅隨 y 而變，則由是可知

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a f(y)(a-y)dy$$

故任何函數 $f(x)$ 之不定積分

$$\int_0^x f(t)dt$$

若再度求積,其結果爲一簡積分(參閱本書(I), 9.學之例).

4.3.4. 所得結果更擴充於多維變區

繼此邁往前進,擴充其理於任何多維變區,亦無何種困難. 茲就三個自變數 x, y, z, 限於 $x_0\leqq x\leqq x_1$, $y_0\leqq y\leqq y_1$, $z_0\leqq z\leqq z_1$ 者言之,苟有一連續函數 $f(x,y,z)$, 則下列三重積分

$$\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

可化簡爲簡積分或二重積分,如

$$\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_{z_0}^{z_1}dz\iint_B f(x,y,z)dx\,dy.$$

在此

$$\iint_B f(x,y,z)dx\,dy$$

爲一兩重積分,其變區爲 $x_0\leqq x\leqq x_1$, $y_0\leqq y\leqq y_1$ 而 z 視爲固定,故此變重積分爲 z 之函數.

復次,吾人可視上列三重積分爲三次簡單積分先後實施之結果,如令

$$\int_{z_0}^{z_1}f(x,y,z)dz$$

中 x 及 y 兩者暫時固定而求積之後,進而求

$$\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{z_0}^{z_1}f(x,y,z)dz,$$

其中僅 x 固定.然後更求

$$\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{z_0}^{z_1}f(x,y,z)dz.$$

至求積程序之先後,與結果絕無影響,亦不難見之.

更進而論其他較爲普遍之變區,其理亦同.例如 x,y,z 之變區若限於 $x^2+y^2+z^2\leqq1$, 則

$$\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz.$$

問　題

試求下列積分由1—8.

1. $\iint x^2y^2\,dx\,dy$,　$x^2+y^2\leqq 1$.

2. $\iint \frac{x^3+y^3-3xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx\,dy$,　$x^2+y^2\leqq 1$.

3. $\iiint (x^2+y^2+z^2)xyz\,dx\,dy\,dz$,　$x^2+y^2+z^2\leqq a^2$.

4. $\iiint z\,dx\,dy\,dz$,　其變域 V 爲 $x^2+y^2\leqq z^2$, $x^2+y^2+z^2\leqq 1$.

5. $\iiint (x+y+z)x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$,　$x+y+z\leqq 1$,　$x\geqq 0$,　$y\geqq 0$,　$z\geqq 0$.

6. $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$,　$x^2+y^2+z^2\leqq 1$.

7. $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2}$,　$x^2+y^2+z^2\leqq 1$.

8. $\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,　$|x|\leqq 1$,　$|y|\leqq 1$.

9. 若 $f(x)$ 爲一連續函數,試證

$$\lim_{h\to+0}\int_{-1}^{+1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0)$$

第四節　重積分之轉換

前在本書上卷第四章中,知有所謂交替式者,爲從事積分時基本要法之一,其主旨在乎輸入一新變數以替代固有變數,從而化簡欲求之積分,使其事易於成功.如何發揮此種思想以處理重積分之問題,自爲吾人今日所最願望之事.蓋重積分雖可逐步歸於簡積分,惟其問題之繁複困難,遠甚於前,自無待論.因此之故,藉新舊變數之交替以求化簡重積分之計算,要不失爲一積分良法,矧交替法就其自然發展而論,必求擴充於此,而重積分概念復可由是而得一探本窮源之闡明,故擬於本節中

詳論之.

4.4.1. 應用極坐標

欲計算重積分，可捨直角坐標而改用極坐標，此意在本章 4.2.2 及 4.2.3 討論概念時已見及之．試設想有一極坐標網，爲 $I_1=h$、$I_2=2h$、……，$I_n=nh=2\pi$ 諸直線及 $r_1=k, r_2=2k, \ldots, r_m=mk$ 諸同心圓所組成，從而有種種分區產生．分區之介於 I_ν、$I_{\nu+1}$ 兩線及 r_μ、$r_{\mu+1}$ 兩圓之間者，其面積爲

$$\frac{r_{\mu+1}^2-r_\mu^2}{2}(I_{\nu+1}-I_\nu)=\frac{1}{2}(r_{\mu+1}+r_\mu)kh.$$

於是據積分之義在每分區中取一點 (ρ_μ, I_ν)，假定其中 ρ_μ 爲 $\rho_\mu=\frac{r_\mu+r_{\mu+1}}{2}$，求其 f 之值與面積相乘後，就其分區之處於規定變區 R 之內者一一相加，得

$$\sum_\mu\sum_\nu f(\rho_\mu\cos I_\nu,\ \rho_\mu\sin I_\nu)\rho_\mu\,kh,$$

然後考其 $h\to 0, k\to 0$ 時所趨之極限．此極限在 f 連續時必能存在而常以

$$\iint f(\rho\cos I,\rho\sin I)\rho\,d\rho\,dI$$

表出之．吾人試細尋其意，無異捨直角坐標而改用極坐標，其間關係自爲

$$x=\rho\cos I,$$
$$y=\rho\sin I,$$

原有變區 R，初劃分爲長方形者，因之轉爲極坐標系網所組成之變區 R'，故

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy=\iint_{R'} f(\rho\cos I,\rho\sin I)\rho\,d\rho\,dI$$

之成立，至爲顯然．是即由直角坐標轉換爲極坐標之積分公式．特舉一例於下，藉明其用．

如 x 及 y 之變，於限 $x^2+y^2\leqq M$，其變區爲一圓，以 O 爲中心，以 M 爲半徑者．欲計算下列積分

$$I=\iint_R e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

其事甚難.若據上式換爲極坐標,則

$$I=\iint_R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{M}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho.$$

其中對 θ 及對 ρ 積分可分別施之. 試以 $\rho^2=u$ 替換之,其對 ρ 之積分即可成功,而對 θ 之積分,因欲求積分之函數與 θ 無關,故可作常數觀,因之遂有

$$I=\pi\int_0^{M^2}e^{-u}du=-\pi e^{-u}\Big|_0^{M^2}=\pi(1-e^{-M^2}).$$

4.4.2. 兩重積分之轉換式

觀上所述,可以推想變數之轉換,對於積分之計算,可發生極大之便利.故繼此所欲討論者,爲此種思想之如何發揮與推廣.假定 R 爲 xy 平面中之變區,就下列積分

$$\iint_R f(x,y)dS=\iint f(x,y)dx\,dy$$

如何轉換之問題而探討之. 試採用兩變數 u 及 v, 與原有變數 x 及 y 一一相應,其關係由

$$x=\phi(u,v),$$

$$y=\psi(u,v)$$

規定之. 還是 R 將與 uv 平面中之變區 R' 相對. 吾人假設在 R' 中, ϕ 及 ψ 之初重偏導數處處連續,又其 Jacobian

$$D=\begin{vmatrix}\phi_u & \phi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}=\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v$$

從不等於零，不妨假定處處爲正. 在此假定之下， $x=\phi(u,v)$ 及 $y=\psi(u,v)$ 自必有單値逆函數 $u=g(x,y)$, $v=h(x,y)$. 據是以觀，試令 $u=c$,及 $v=c$, 即取如是兩族直線，則必有 R 中之一線網與之對應.

吾人如欲將

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy$$

中 x 及 y 兩變數易以 u 及 v,其意即欲捨棄 x 及 y 而改用 u 及 v 作變數. 是乃放棄 R 劃分爲長方形之意，別求與 $u=c$ 及 $v=c$ (c 爲常數)

相應之線網為分區之法.惟如是,當取 $u=\nu h$、$v=\mu k$ 諸線,其中 $h=\Delta u$, $k=\Delta v$, 而 ν 及 μ 為任何整數,然後考此兩族直線在 R' 之相交網,必有 xy 平面中之線網與之對應.就此線網之處於 R 之中者觀之,其每一網眼即為 R 之一分區 R_i (見圖 4.12 及 4.13). 分區 R_i 如是組

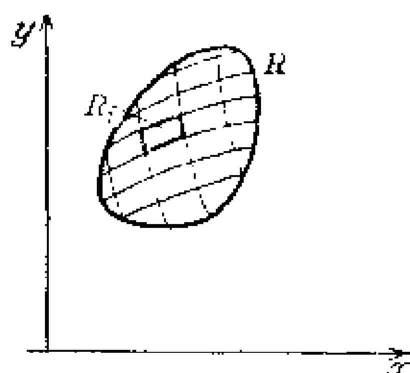


圖 4.12

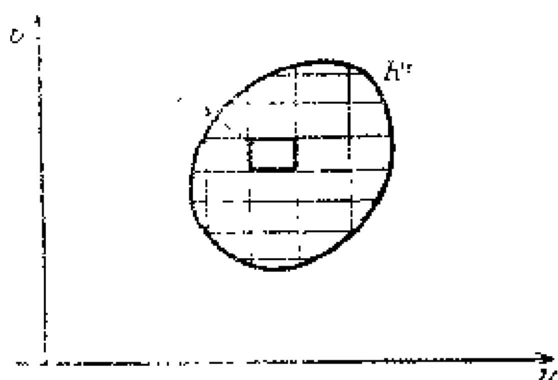


圖 4.13

成之後,可一考其面積為何如. 若假定每一網眼為一平行四邊形,則其面積據 1.2.1 所論為

$$\begin{vmatrix} \phi(u_\nu+h,v_\mu)-\phi(u_\nu,v_\mu) & \phi(u_\nu,v_\mu+k)-\phi(u_\nu,v_\mu) \\ \psi(u_\nu+h,v_\mu)-\psi(u_\nu,v_\mu) & \psi(u_\nu,v_\mu+k)-\psi(u_\nu,v_\mu) \end{vmatrix},$$

此值實接近於

$$\begin{vmatrix} \phi_u(u_\nu,v_\mu) & \phi_v(u_\nu,v_\mu) \\ \psi_u(u_\nu,v_\mu) & \psi_v(u_\nu,v_\mu) \end{vmatrix} hk = hkD.$$

於是據積分之義,將 f 在每一網眼中任何一點之值乘以 hkD, 復就所有網眼之處於 R 之中一一加之,然後求其 $h\to 0$, $k\to 0$ 時所趨之極限,從而可知

$$\iint_{R'} f(\phi(u,v),\psi(u,v))D\,du\,dv.$$

惟在此假定每一網眼為一平行長方形,殊不真確.其間誤差可能甚大,故欲求此轉換式成立,必證此誤差在 $h\to 0$, $k\to 0$ 時趨零而後可.於是當從估計誤差入手.惟此事擬不加詳論. 吾人當為此轉換式另立一證,庶將來擴充於多維空間時不致有何困難.

吾人擬從本卷第三章第[illegible]節之說將 x,y 之轉換於 u,v 分作兩步實現之. 試先作下列原始轉換

$$x = x$$

$$y = \Phi(v, x)$$

其中 Φ_v 假定處處為正. 如是則 xy 平面中之一變區 R 將隨之轉換為 xv 平面中之一變區 B, 兩者間有一一對應. 然後將 B 歸影於 uv 平面中之一變區 R', 由下列原始轉換

$$x = \Psi(u, v)$$

$$v = v$$

實現之, 又假定 Ψ_u 在 B 處處為正. 於是積分

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

亦分作兩步. 先將 B 劃成長方形分區, 其邊之長為 $\Delta x = h$, $\Delta v = k$, 由 $x = x_\nu$ 及 $v = v_\mu$ 諸直線相交而成. 此每一分區 B_i 將有 R 之一分區 R_i 與之對峙, 每一 R_i 將為兩平行直線 $x = x_\nu$, $x = x_\nu + h$ 及兩線段 $y = \Phi(v_\mu, x)$, $y = \Phi(v_\mu + k, x)$ 所圍成, 見圖 4.14 及 4.15. 如是根據積

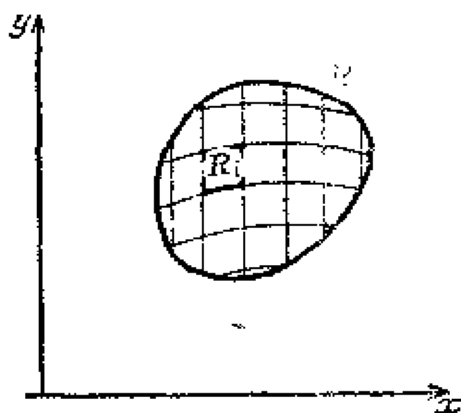


圖 4.14

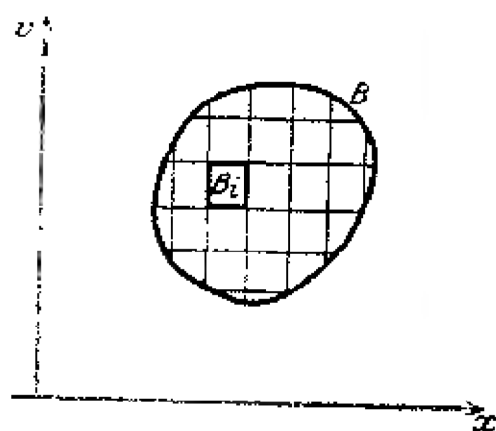


圖 4.15

分之義, 可知每一 R_i 之面積(見圖 4.16)為

$$\Delta R_i = \int_{x_\nu}^{x_\nu + h} [\Phi(v_\mu + k, x) - \Phi(v_\mu, x)]\,dx,$$

此可據積分之中值定理化為

$$\Delta R_i = h[\Phi(v_\mu + k, \bar{x}_\nu) - \Phi(v_\mu, \bar{x}_\nu)],$$

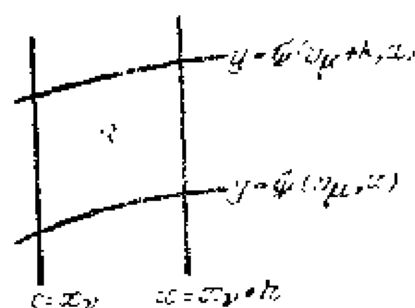


圖 116

其中 $\bar{x}_\nu$ 爲 x_ν 及 $x_\nu+h$ 間之一數. 又據微分學之中值定理寫此如

$$\Delta R_i = hk\Phi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu),$$

其中 $\bar{v}_\mu$ 爲 v_μ 及 $v_\mu+k$ 間之一數. 故 $(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu)$ 爲 B 中之一點. 由是以論,吾人欲求之積分爲

$$\Sigma f_i \Delta R_i = \Sigma hk f(\bar{x}_\nu, \Phi(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu))\Phi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu)hk,$$

當 $h\to 0$, $k\to 0$ 時所趨之極限,從而得知

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \iint_B f(x,y)\Phi_v dx\,dv, \quad (y=\Phi(v,x)).$$

所謂第一步轉換,至是卽告完成. 據同理,復將 B 由 $x=\Psi(u,v)$, $v=v$ 攝影於 R', 令上列積分再度轉換,則

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \iint_{R'} f(x,y)\Phi_v\Psi_u\,du\,dv,$$

其中 x 及 y 自必據 $x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ 由 u 及 v 表而出之. 於是知 x,y 若由 $x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ 直接轉於 u,v, 則此轉換式將有如前之形式,因

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,v)}=\Phi_v \quad 及 \quad \frac{\partial(x,v)}{\partial(u,v)}=\Psi_u$$

之故,其 Jacobian 爲(參閱本卷第三章第三節)

$$D=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\Phi_v\Psi_u.$$

循是以論,對於一切可析爲兩原始轉換之轉換,所欲證之積分轉換式已得證矣①.

一種轉換在何種條件下可視爲兩原始轉換之總合, 前在第三章第

三節中已論及之．吾人可將一閉區 R 分爲若干區，使每一分區中，除必要時以 v 替代 u，復以 $-u$ 替代 v，其意即作一坐標軸轉動無關積分原値外，其事必可成功．因此遂得如下結果[2]：

若以 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$ 連繫 x,y 及 u,v，連續而又一一相應，將 xy 平面中一閉區 R 轉換於 uv 平面中之變區 R'，又 φ 及 ψ 各有連續初重導數，其 Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\varphi_u\psi_v-\psi_u\varphi_v$ **處處爲正**[1]，則

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{R'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

是即普遍之積分轉換式．所欲在此聲明者，即所假定始終爲正之 Jacobian 如在有盡個點上爲零，此轉換式依然成立．蓋吾人可作半徑爲 ρ 之圓，將此有盡個點除外，上述證明自必有效，然後令 ρ 趨零，因有關函數皆爲連續之故，其理必仍眞確無疑．如由直角坐標轉換極坐標，其 Jacobian 在原點爲零，而理之眞確依然如故，即其一例．

至轉換之 Jacobian 爲負時，情形如何，當於下章中論之．所可斷言者，如 Jacobian 無處爲零，則處處爲正之假定不能視爲有何限制，蓋將 u 與 v 對調，可使其由正變負也．又此理在下章第三節將更有一新證明，可參閱之．

4.4.8. 多維空間中之轉換式

據上所得結果推之，可知自變數多於兩個時，將有如下定理：

苟 $xyz\cdots\cdots$ 空間中一閉區 R 攝影於 $uvw\cdots\cdots$ 空間中之一變區 R'，連續而一一相應，其 Jacobian

$$\frac{\partial(x,y,z,\cdots\cdots)}{\partial(u,v,w,\cdots\cdots)}$$

---

①在此雖曾作 φ_v 及 ψ_u 處處爲正之假定，其實殊非過分之限制．蓋由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$，可推此兩者必同正或同負．苟爲同負，則可以 $-x$ 易 x，以 $-y$ 易 y，而積分不因之而變．故原始轉換之 Jacobian 亦爲正數．

②又上述之理似僅就一變區 R_1 完全處於 R 之內者證明之．雖吾人可令閉區 R_1 任意接近於 R，故對 R 亦爲有效．

又處處為正，則下列積分轉換式

$$\iint\cdots\cdots\int_R f(x,y,z,\cdots\cdots)dx\,dy\,dz\cdots$$
$$=\iint\cdots\cdots\int_{R'} f(x,y,z,\cdots\cdots)\frac{\partial(x,y,z,\cdots)}{\partial(u,v,w,\cdots)}du\,dv\,dw\cdots\cdots$$

必能成立. 此 Jacobian 在 n 維空間中自為 n 行之行列式，其組織與前之二行行列式極相似.

茲應用上式以說明一積分如何由直角坐標變為極坐標. 設以 r,θ 表極坐標，則因 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 可知 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$, 而[illegible]. 又若以 r,ϕ,θ 表球面坐標，則其與直角坐標 x,y,z 之關係為

$$x=r\cos\phi\sin\theta,\qquad 0\leqq\phi\leqq 2\pi,$$
$$y=r\sin\phi\sin\theta,\qquad 0\leqq\theta\leqq\pi,$$
$$z=r\cos\theta,\qquad 0\leqq r<\infty.$$

於是其 Jacobian 為

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\psi,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

因之遂得

$$\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\iiint_{R'} f(x,y,z)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

此結果亦可由積分概念直接推知之. 依平面之例，作 $r=c$ (c 為常數) 諸球面, $\theta=c$ 諸圓錐體, 及 $\phi=c$ 諸平面，將三維變區劃成分區，求其體積而後應用積分定義可矣. 至上列 Jacobian 雖在 $r=0$ 或 $\theta=0$ 時為零，不致影響其理之通確，亦無待贅述.

例　題

*1. 求

$$\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}dx\,dy,$$

其變區為一三角形，以(0,0),(0,1),(1,0)為頂者.

2. 求

$$\iint\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

假定其變區為(a)雙紐線$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$之一環; (b)為三角形，以(0,0),(2,0),

$(1,\sqrt{3})$為頂者.

3. 求
$$\iiint x\,[illegible]$$
其中 x,y,z 限於 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1$.

4. 試用 $x^2+y^2=u^2+a^2$, [illegible] 證
$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=[illegible]\int [illegible]$$
假定 R 為 $x\geqq a>0$.

5. 證 $\iint(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$ 對於保角變換有不變性.

6. 用球面坐標轉換，求第三節例題4中積分.

7. 求
$$I=\iiint\cos(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$
變區為 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqq 1$.

8. 證
$$\iint\cos(\alpha\xi+\beta\eta)\,d\xi\,d\eta=2\pi\frac{J_1(\rho)}{\rho},\qquad(\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}),$$
其變區為一圓 $\xi^2+\eta^2\leqq 1$ 而 J_1 為 Bessel 函數(第一節例題5).

第五節　積分概念之旁推

前論一個自變數之函數時，知函數在其變程中如有間斷點或其變程伸展至於無窮者，其定積分在相當條件下未始不可存在，是為旁義積分，在上卷第四章第七節已詳述之. 其事在兩個變數之函數亦復相似，於是有所謂旁義之重積分，茲略論之.

4.5.1.　函數作有盡次跳躍者

若函數 $f(x,y)$ 在其變區 R 中作有盡次跳躍，則積分概念之旁推於此，事殊不難. 試用光滑之線段①將 R 劃分為有盡個分區 $R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots,R_n$，使 $f(x,y)$ 在每一分區之內皆為連續，意即每一分區之邊界由內趨近時，f 必趨於確定連續之邊值，惟當其由兩不同分區趨近於邊界時，f 所趨之值未必相等. 於是吾人可為每一分區求積分，並將 f 之值擴展，使包括邊值其內，即 f 在每一分區包括邊界在內，處處連續.

①是乃曲線線段，其切線作連續性之轉動者.

如是求得之積分一一相加,即謂之 $f(x,y)$ 在 R 區之積分. 此定義自較普通積分定義所涵爲廣,可謂函數作有若干次跳躍者之旁義積分.

例如 $f(x,y)$ 當 x 及 y 之變限爲 $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ 時爲如下式所規定之函數:

$$f(x,y)=1, \qquad y<x,$$

$$f(x,y)=2, \qquad y\geqq x.$$

細考之,可知其沿 $y=x$ 作跳躍.若用上述之法求積分,得

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy=\frac{3}{2}.$$

讀者可自校驗之.

4.5.2. 函數在間斷點無極限可趨者

苟 $f(x,y)$ 在其積分變區 R 中之某一點 P 上無限制趨大,則其積分之能否存在,非詳加研討不可.試以間斷點 P 爲中心作一圓,謂 P 之鄰區 U_ν,將 P 點除於 R 之外,得一積分變區.以 $R_\nu=R-U_\nu$ 名之,於是 R_ν 不復含 P.此種鄰區 U_ν 可能甚多,如以 P 爲中心,而半徑爲 $\frac{1}{\nu}$ 之圓皆是,當 ν 趨大時,其直徑自趨於零.因 R_ν 中既無 $f(x,y)$ 之間斷點,吾人自可求

$$\iint_{R_\nu} f(x,y)\,dS,$$

然後令 ν 趨大,即 $U\to 0$, R_ν 隨之趨於 R,以考

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{R_\nu} f(x,y)\,dS$$

是否存在,苟此極限不論 R_ν 如何選擇,均能存在,即稱之爲 $f(x,y)$ 在 R 之旁義積分,而以

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{R_\nu} f(x,y)\,dS=I=\iint_R f(x,y)\,dS$$

表之.吾人亦常稱

$$\iint_R f(x,y)\,dS$$

當 I 存在時爲收斂,不存在時爲發散.所欲附述者,此定義不僅 $f(x,y)$ 在 P 點鄰近無限制趨大時可用,若 P 爲 $f(x,y)$ 之一不定點,即 (x,y)

趨 P 時，$f(x,y)$ 無確定極限可趨(不必無限制趨大)，如 $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ 當(x,y)趨$(0,0)$時之情形，亦以是作為旁義積分之定義.

定義既明之後，吾人以常情測之，以為 $f(x,y)$ 之絕對值如在 P 點鄰近始終小於一固定之數，則其積分之收斂，可以斷言.要之，吾人可用如下之法判定積分之收斂．不論 ϵ 為任何正數，必可求得一數 δ，隨 ϵ 而異者 $\delta(\epsilon)$，若 U 及 U' 為 R 中任何兩含有 P(P 為 $f(x,y)$ 在 R 之間斷點)之分區(可假定為開)，當其直徑小於 δ 時，其在 $R-U$ 及 $R-U'$ 兩區內積分相差之絕對值小於 ϵ，則收斂可必矣.特舉一例如下.

設有
$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}.$$
此函數在原點無限制趨大．故假定 R 為一圓如 $x^2+y^2\leqq 1$，必將其中原點$(0,0)$除外．試以$(0,0)$為中心，取一圓 U_δ，其直徑小於 δ 者(δ 可假定小於 1)．然後求其在 $R_\delta=R-U_\delta$ 之積分，復令 $\delta\to 0$ 以觀其是否收斂.此積分可轉換於極坐標:
$$\iint_{R_\delta}\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_{R_\delta'} r\log r\,dr\,d\theta,$$
其中 r 及 θ 之變，限於 $\delta\leqq r\leqq 1$ 及 $0\leqq\theta\leqq 2\pi$．故 R_δ' 為 $r\theta$ 平面中之一變區，不含 $r=0$ 而由 R_δ 攝影而得者．復考 $r\log r$，如規定其在 $r=0$ 之值為 0，則因 $\lim\limits_{r\to 0} r\log r=0$ 之故，在 $r=0$ 實有連續性.於是
$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{R_\delta'} r\log r\,dr\,d\theta=\iint_{R'} r\log r\,dr\,d\theta$$
之收斂，從可睹矣.觀此一例，可知一旁義積分得轉換為一普通積分，其事在一個自變數時亦已見之.由是知積分概念之旁推，實為必要，若置旁義積分而不談，其損失將不可勝計也.

試假定 x 及 y 之變仍限於R: $x^2+y^2\leqq h$，一考下列積分
$$\iint_R\frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$$
之收斂問題.其函數既在原點有一間斷點，當以此作中心並以 δ 作半徑繪一圓，將此除於 R 之外，從而得一變區，以 R_δ 表之.然後轉換於極坐標，得
$$\iint_{R_\delta}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\,dr\,d\theta,$$
此為
$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_\delta^R\frac{dr}{r^{\alpha-1}}=2\pi\int_\delta^R\frac{dr}{r^{\alpha-1}}.$$

惟據上卷所論，$\int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$ 收斂之必要與充分條件為 $\alpha<2$. 因此當 $\alpha<2$ 且亦惟有 $\alpha<2$ 時，不論原點之鄰區如何選擇，$\iint_B \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$ 始能收斂. 據此，吾人遂得一充分條件（非必要條件）以決定旁義積分之收斂，在應用時頗稱便利. 其言曰：

苟 $f(x,y)$ 在一閉區 R 之內，除在 P 一點，可假定為原點 $x=0,\ y=0$，其值無限制超大外，處處連續，惟有一固定數 M 及小於 2 之一正整數 $\alpha<2$，致

$$|f(x,y)|\leqq\frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$$

在 R 之內處處成立，則

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

必收斂. 此理之真確，可由

$$\left|\iint_B f(x,y)\,dx\,dy\right|\leqq\iint_B |f(x,y)|\,dx\,dy$$
$$\leqq M\iint_B \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$$

見之，其中 B 為一不含 P 而處於 P 之任何小鄰區內之變區.

據同理，可以討論下列三重積分

$$\iiint_R \frac{dx\,dy\,dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha},$$

苟其變區 R 含有原點，轉換於極坐標，得

$$\iiint_{R'} \frac{1}{r^{\alpha-2}}\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

由是可知其在 $\alpha<3$ 時必能收斂. 欲判定此種積分之收斂與否，遂有如下定理：**苟 $f(x,y,z)$ 除在原點 $(0,0,0)$ 無限制超大外，在含有原點之變區 R 內處處連續，又有一固定數 M 及小於 3 之一正數 $\alpha<3$，致 $f(x,y,z)$ 在 R 中處處滿足**

$$|f(x,y,z)|\leqq\frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}.$$

則
$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

必爲一歛積分.

據是以推,可知下列二重積分

$$\iint_R \frac{g(x,y)\,dx\,dy}{(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})^\alpha}, \qquad (\alpha<2)$$

及三重積分

$$\iiint_R \frac{g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2})^\alpha}, \qquad (\alpha<3)$$

亦必收歛,假定(a,b)或(a,b,c)爲其變區R中之一點,而$g(x,y)$或$g(x,y,z)$爲R中之連續函數,連同R之邊界在內,處處連續者.蓋將坐標軸移動,令(a,b)及(a,b,c)移於原點,然後應用前理即可以識之.

4.5.3. 函數之間斷點沿線皆是者

苟$f(x,y)$不僅在其變區R中孤立之點,而沿一線段之全程在在無限制趨大,則積分概念之旁推於此,亦無絲毫困難.吾人可將此一段曲線,其上盡爲$f(x,y)$之間斷點者,由其鄰區U_ϵ包圍之,劃出於R之外而U_ϵ之面積小於ϵ.不論U_ϵ如何選擇,但求$\epsilon\to 0$時其積分必趨一極限,即謂旁義積分存在,而此極限即爲此旁義積分之值.

例如$f(x,y)$若沿縱軸之某一段在在無限制趨大,惟有一固定之M及小於1之α,致

$$|f(x,y)|<\frac{M}{x^\alpha},$$

在R中處處成立,則其在R之積分必歛無疑.其證與前相似,可不贅.

4.5.4. 積分變區展至無窮遠者

苟積分變區R擴展至無窮遠,吾人可設想由$R_1,R_2,\cdots\cdots R_\nu,\cdots\cdots$諸區逐漸擴大而成.如$R$爲整個平面,則可設$R_\nu$爲圓形變區,以原點爲中心,以$\nu$爲半徑者.但取$n$相當大,$R_n$必能包圍任何$R$之有限分區於其中.於是下列極限

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{R_\nu} f(x,y)\,dS$$

不論R_ν如何選擇，皆能存在時，吾人卽以$f(x,y)$在R之積分稱之（或謂其積分收斂）.

例如以整個平面作爲積分變區，一考

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

之收斂性.取R_ν如$x^2+y^2\leqq\nu^2$，當先求

$$\iint_{R_\nu} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

然後令$\nu\to\infty$以觀極限之果否存在.依據本卷4.4.3，此積分爲$\pi(1-e^{-\nu^2})$.由是知

$$\lim_{\nu\to\infty}\pi(1-e^{-\nu^2})=\pi.$$

若捨圓形變區而取任何其他分區，接近於R者，其極限始終爲π，卽爲此積分收斂之證.試假定$R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots$爲任何分區，趨近於R者，如是則R中任意作一圓K_m，必可求得一ν，使K_m含於R_ν之中，復因R_ν爲有限之故，但令M相當大，必有一K_M，使R_ν含於K_M之中.惟如是，因$e^{-x^2-y^2}$處處爲正，遂可斷定

$$\iint_{K_m} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqq\iint_{R_\nu} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqq\iint_{K_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

惟分列左右兩積分據適所證之理，必因m及M之變大而同趨於π，由是知不論R_ν爲任何分區，必有

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{R_\nu} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi,$$

是卽欲證之理.

復次，若假定R_ν爲平方形如$|x|\leqq\nu$，$|y|\leqq\nu$，則據本卷4.2.3所論，可知

$$\iint_{R_\nu} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2}dx\int_{-\nu}^{\nu} e^{-y^2}dy$$

$$=\left(\int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2}dx\right)^2=\left(2\int_0^{\nu} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

由是令$\nu\to\infty$，得

$$\left(2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\pi,$$

或
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

4.5.5. 旁義積分總論

綜觀上述所謂旁義積分,其實皆可視為尋常積分當其變區 R_n 趨近 R 時所趨之極限. 吾人可假設變區 R 為不閉,將 f 所有之間斷點盡歸於邊界,而令邊界不屬於 R. 於是可令 R 由其他變區 $R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots$ 替代之,苟 $R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots$ 皆為 R 中之閉區,而任何分區,處於 R 之內者,但求 n 相當大,必同時為 R_n 之分區. 如是吾人即謂 $R_1R_2R_3\cdots\cdots$ 向 R 趨近. 如無限多分區 $R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots$ 前後相套,意即前區處於後區之內,後區包圍前區於其中,如是則其趨於 R,謂有獨行性. 就 R_n 諸分區言之,尋常積分概念自可應用,苟此種積分不論 R_n 如何選擇,但觀其趨近 R 時果有一極限,此極限即稱之為 f 在 R 之旁義積分,如此立說,可將積分概念之旁推,綜合而探討之.

觀前述諸例,吾人對於旁義積分之存在問題,約可概括得如下推論:

其一,苟 f 在 R 中無處為負,欲證其旁義積分之存在,但取一種獨行收斂之 R_n 證之已足. 若能證其對於一種獨行收斂之 R_n 為收斂,則對於任何 R'_n 必斂於同一極限. 何則,R_ν 既為 R 中之一閉區,則當 n 相當大,即自某一 $n(\nu)$ 之後,必含於一切 R'_n 之中. 惟據同理,R'_n 又必含於 R_m 之中. 於是由於 f 之無處為負,可以推斷

$$\iint_{R_\nu} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_{R'_n} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$\leqq \iint_{R_m} f(x,y)\,dx\,dy.$$

然後令 ν 趨大,既假定分別左右之兩積分同趨一極限,則

$$\iint_{R'_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

之趨同一極限,可以見矣. 復次,R_ν 之斂於 R 如有獨行性,又 f 無處為負,則但求其在 R_ν 之積分不超過一固定數 M,其收斂已可斷言,蓋獨

行及有涯變數之斂性，前已屢言之矣．又 f 在此曾假定無處為負，若無處為正，其理亦同，蓋以 $-f$ 代替 f，即可歸於適所討論之情形也．

其二，苟 f 在 R 中可正可負，則上述定理，仍可應用於 $|f|$．$|f|$ 之積分如收斂，即可從而推斷 f 之積分亦必收斂．何以言之？試令

$$f=f_1-f_2,$$

並規定其中 f_1 及 f_2 如次：f_1 當 $f\geqq 0$ 時為 f，即 $f_1=f$，否則為零，又 f_2 當 $f\leqq 0$ 時為 $-f_1$，即 $f_2=-f$，否則為零．如此規定之 f_1 及 f_2 自無處為負，又在 f 連續處亦必連續，復就其絕對值言之，必不能大於 $|f|$．由是以論，若 f 之積分在 R_n（R_n 為 R 之分區，獨行地斂於 R）為有涯，則 f_1 及 f_2 之積分，因之 f_1-f_2 之積分亦必收斂無疑

第六節　幾何學中之應用

4.6.1.　體積之計算

前論積分概念，說明其幾何意義，曾以體積作出發點．故用重積分以計算體積，其理至為顯然．略舉數例，可以概見．

設有一轉成橢圓面如：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

此方程式可寫為 $z=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

茲就其一半，處於 xy 平面之上者，計算其體積，則有

$$\frac{V}{2}=\frac{b}{a}\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

其積分變區自為 $x^2+y^2\leqq a^2$，如轉換於極坐標，則

$$\iint r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta,$$

由是得

$$\frac{V}{2}=\frac{b}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=2\pi\frac{b}{a}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr,$$

故其體積為 $V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

復就任何橢圓面觀之：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

欲知其體積，當用 ρ,θ 作坐標，如

$$x=a\rho\cos\theta,\qquad y=b\rho\sin\theta,$$

其 Jacobian 爲

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=ab\rho.$$

如是則其半個體積當爲

$$\frac{V}{2}=c\iint_R\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=abc\iint_{R'}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\,d\theta,$$

其中 ρ 及 θ 之變，限於 $0\leqq\rho\leqq1$，$0\leqq\theta\leqq2\pi$．由是得

$$\frac{V}{2}=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=\frac{2}{3}\pi abc,$$

故其體積爲 $$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

最後擬取一錐體，爲三坐標面及 $ax+by+cz=1$ 所圍成者．假定 a,b,c 爲正數，則其體積爲

$$V=\frac{1}{c}\iint_R(1-ax-by)\,dx\,dy.$$

其積分變區 R 當爲一三角形 $0\leqq x\leqq\frac{1}{a}$，$0\leqq y\leqq\frac{1}{b}(1-ax)$．由是得

$$V=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{a}}dx\int_0^{\frac{1}{b}(1-ax)}(1-ax-by)\,dy;$$

對 y 積分之結果爲

$$(1-ax)y-\frac{b}{2}y^2\Big|_0^{\frac{1}{b}(1-ax)}=\frac{(1-ax)^2}{2b};$$

復用 $1-ax=t$ 替代，再度積分，即得

$$V=\frac{1}{2bc}\int_0^{\frac{1}{a}}(1-ax)^2\,dx=-\frac{1}{6abc}(1-ax)^3\Big|_0^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{6abc}.$$

結果與用初等幾何方法所得者相符．

欲計算其他比較複雜之曲面所圍成之體積，當先切爲薄片，各以二重積分表達之．至於迴合曲面所圍成者，擬於下章中詳之．

4.6.2. 體積問題之普遍討論

平面中任何區域 R 之面積,可由二重積分

$$\iint_R dS = \iint_R dx\, dy$$

計算之,已詳述於前矣.據是以推,三維空間中之區域 R 當由

$$V = \iiint_R dx\, dy\, dz$$

表達之,其中 x, y, z 爲限於 R 中之變數.此說實與積分定義完全相符,蓋由幾何觀點言之,可設想此三維空間體切成平行六面體,平行於 xy 平面者,求其處於 R 中之總體積,然後令其直徑趨近於零之意.如是將 V 之計算,簡化爲

$$\int dz \iint dx\, dy,$$

卽初等幾何學中所謂 Cavalieri 原則,其意乃由每一平面截面之面積,垂直於一固定直線如 z 坐標軸者,可以決定三維空間體之體積.明乎是,吾人可據上列普遍公式,應用各種方法以簡化體積之計算,其法乃視實際情形採用各種新坐標以替代 x, y, z.其最普通常用者,爲球面及柱面坐標.

設有一平面曲線 $x = \phi(z)$,以 z 軸爲轉軸得一轉成面.假定此曲線與 z 軸不能相交,求其轉成面介於 $z = a$ 及 $z = b$ 兩平面間之體積爲何如.據是可知 x, y, z 之變,必限於 $a \leqq z \leqq b$ 及 $0 \leqq \sqrt{x^2 + y^2} \leqq \phi(z)$.試用柱面坐標 ρ, θ 及 z,以替代直角坐標,其間關係爲

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arccos \frac{x}{\rho} = \arcsin \frac{y}{\rho},$$

$$z = z$$

則據上式可知轉成面之體積爲

$$V = \iiint_R dx\, dy\, dz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi(z)} \rho\, d\rho.$$

由是得
$$V=\pi\int_a^b \phi(z)^2 dz,$$
與上卷 5.3.6 所論相符. 此結果可憑觀覺直接認識之. 試作垂直於 z 軸之平面,將轉成體切為薄片,其序如 $z_\nu \le z \le z_{\nu+1}$,復以 m_ν 表每片上 $\phi(z)$ 與 z 軸相去之最小距離,M_ν 表最大距離,則下列關係
$$\sum m_\nu^2 \pi \Delta z \le V \le \sum M_\nu^2 \pi \Delta z$$
之成立,顯而可見,式中 Δz 為 $z_{\nu+1}-z_\nu$ 之縮寫. 於是據積分定義,即得
$$V=\pi\int_a^b \phi(z)^2 dz$$

復次,假定體區 R 含有原點,應用球面坐標,有一曲面之方程式如
$$r=f(\theta,\phi),$$
$f(\theta,\phi)$ 為一單值函數,如是則計算體積時,以應用球面坐標為最便. 因 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$ 之故,據轉換式可知
$$V=\iiint_R r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{f(\theta,\phi)}r^2dr,$$
對 r 積分後,其結果為
$$V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}f^3(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta.$$

若為一球面,則 $f(\theta,\phi)=R$, 由是得其體積為 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,自無待論.

4.6.3. 曲面之面積

三維空間中曲面之面積問題,與平面中曲線之弧長問題極相似. 前在上卷 5.3.3, 知欲量曲線之弧長,起自 a 點,訖於 b 點者,可任取 n 個點於其間,以一多邊形內接之,然後求其內接多邊形之周在其邊愈趨愈多時所趨之極限,因之為一求積分之問題. 據同理以論曲面之面積,當作一內接多邊體,為三角形所組成者,求其面積,然後考其邊趨零時果有無極限之可趨. 苟其果有一極限,此極限即可謂之曲面之面積. 所難者,此極限未必存在. 推原其故,可以發見兩問題間性質之差異. 就連續曲線之內接多邊形言之,其邊之方向必隨分段之趨細而趨近於曲線之方向,其事由中值定理之成立可以識之. 反觀曲面之內接多邊體,其情

形未必與此相似. 蓋其邊面之位置雖任意趨近，但與曲面之切面仍可相差甚遠. 故此內接多邊體之面積不可視為趨近於曲面之面積，吾人將於本章附錄中更舉一例以說明之.

惟據曲線弧長之定義，一曲線可視為其內接多邊形之極限，同時亦可視為其外接多邊形之極限. 如作一曲線之一外接形，其邊與曲線相切，則其周之長在其邊趨多時必趨同一極限. 設定 $y=f(x)$ 處處有連續導數 $f'(x)$，吾人就其自 a 至 b 之一段將其分作 n 段，名其分點為 $x_0,x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$，在每分段中任擇一點 ξ_ν，作 $f(x)$ 之切線. 如是則此切線之長，限於 $x_\nu \leqq x \leqq x_{\nu+1}$ 之間者，必為

$$l_\nu=\sqrt{1+f'(\xi_\nu)^2}\,(x_{\nu+1}-x_\nu).$$

故曲線起 a 訖 b 之弧長為下列極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

此用外接多邊形以定弧長之義可推廣之以論曲面之面積.

設有一曲面 $z=f(x,y)$，懸立於 xy 平面之上，即 $f(x,y)>0$，又其偏導數在變區 R 中處處連續. 將 R 剖成 n 個分區 $R_1,R_2,\cdots\cdots,R_n$，其面積分別為 ΔR_1，ΔR_2，$\cdots$，ΔR_n，復在每一分區中任意擇定 $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots\cdots,(\xi_n,\eta_n)$ 諸點，作 $f(x,y)$ 之切面，其方程式自為

$$z-\zeta_\nu=f_x(\xi_\nu,\eta_\nu)(x-\xi_\nu)+f_y(\xi_\nu,\eta_\nu)(y-\eta_\nu),$$

然後在此切面上，觀其一部分 τ_ν，限於 R_ν 之上者，求其面積 $\Delta\tau_\nu$. 若以 α_ν 表此切面與 xy 平面所成之角，則 R_ν 實為 τ_ν 投於 xy 平面之影，就兩者之面積而論，必有如下關係

$$\Delta R_\nu=\Delta\tau_\nu\cos\alpha_\nu$$

成立. 復據本卷 3.2.3 所論，知

$$\cos\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_\nu,\eta_\nu)+f_y^2(\xi_\nu,\eta_\nu)}},$$

故切面上每一部分 τ_ν，懸於 R_ν 之上者，其面積 $\Delta\tau_\nu$ 為

$$\Delta\tau_\nu=\sqrt{1+f_x^2(\xi_\nu,\eta_\nu)+f_y^2(\xi_\nu,\eta_\nu)}\,\Delta R_\nu;$$

於是此種面積之總和

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta\tau_{\nu}.$$

當其中 n 無限制趨大，即分區之最大直徑(同時其面積)趨零時，不論分區 R_ν 如何選擇，所趨之極限，其積分定義爲

$$A=\iint_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dS.$$

此積分吾人即奉爲曲面之面積定義．若其曲面爲一平面，即 $z=f(x,y)=0$，則其面積據此當爲

$$A=\iint_R dS,$$

與前所已得之結果完全相符．又吾人常採用 $d\sigma$ 符號，並以 $z=f(x,y)$ 之面素[1]簡稱之，其定義爲

$$d\sigma=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy,$$

如是則面積積分可簡寫如

$$\iint_R d\sigma.$$

復次，苟曲面之方程式具有隱函數形式如 $\varphi(x,y,z)=0$，則假定 $\varphi_z \neq 0$，或 $\varphi_z>0$，必有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}.$$

於是面積積分將有如下形式

$$\iint_R \sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}\, \frac{1}{\varphi_z}\, dx\, dy,$$

其中 R 爲曲面投於 xy 平面上之影．

茲特試求球面之面積以明上式之用．設 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ **爲一半球，處於** xy **平面之上，以原點爲中心，**R **爲半徑者．因**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

---

(1) element of area of the surface, Oberflächenelement der Fläche.

其面積爲

$$[illegible]$$

其中 R' 表 xy 平面中之[illegible],得

$$\frac{1}{2}A = R\int [illegible]$$

此積分可用 $R^2 - r^2 = u$ 替換,算出爲

$$\frac{1}{2}A = 2\pi R\sqrt{\ } [illegible]$$

與初等幾何學中所得結果自相符合

綜觀前論,以 x 及 y 作自變數,視 z 爲 x 及 y 之函數,與有偏重 z 之意. 今設曲面之方程式爲 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(x,z)$. 吾人可據同理推斷其面積爲

$$\iint\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}\,dy\,dz \quad 或 \quad \iint\sqrt{1+y_z{}^2+y_x{}^2}\,dz\,dx,$$

或假定其方程式寫成隱函數形式,則其面積將由

$$\iint\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2}\,\frac{1}{|\varphi_y|}\,dz\,dx$$

或

$$\iint\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2}\,\frac{1}{|\varphi_x|}\,dy\,dz$$

規定之. 各式在形式上雖有不同,惟其表達同一面積,則不難徵驗之. 蓋應用

$$x=x(y,z),$$

$$y=y,$$

以轉換

$$\iint\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2}\,\frac{1}{|\varphi_z|}\,dx\,dy.$$

因 $x=x(y,z)$ 由 $\varphi(x,y,z)=0$ 向 x 解開而得,其 Jacobian 爲

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)} = \frac{\varphi_z}{\varphi_x},$$

故

$$\iint_R \frac{\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2}}{|\varphi_z|}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{R'} \frac{\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2}}{|\varphi_x|}\,dy\,dz$$

之真確，顯而可見．至積分中之積分變區爲何如，不可不特加注意，如上列積分中之 y,z 當限於 R'，爲曲面投影於 [illegible] 之區．

苟吾人對曲面在坐標系中之地位，不參何等假設，則當應用輔變數方程式：

$$x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v).$$

其中 u,v 在某區 R' 變化時，曲面之一部分即賴以規定．假定 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=D$ 在相當範圍內處處爲正，則上式可對 u,v 解開，從而得其偏導數如

$$u_x=\frac{\psi_v}{D},\qquad v_x=-\frac{\psi_u}{D},$$

$$u_y=-\frac{\phi_v}{D},\qquad v_y=\frac{\phi_u}{D}.$$

復因

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}u_x+\frac{\partial z}{\partial v}v_x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}u_y+\frac{\partial z}{\partial v}v_y$$

之故，遂有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{D}\sqrt{(\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v)^2+(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2+(\chi_u\phi_v-\phi_u\chi_v)^2}.$$

故據積分之轉換式，知曲面之面積應由

$$A=\iint_{R'}\left[(\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v)^2+(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2\right.$$

$$\left.+(\chi_u\phi_v-\phi_u\chi_v)^2\right]^{\frac{1}{2}}du\,dv$$

規定之，其中對 x,y,z 三坐標不復有偏重偏輕之嫌．在推論此式時，曾假定有一特殊 Jacobian 不等於零，其實三個 Jacobian 中之任何一個不等於零，如上推理依然有效．故但求三個 Jacobian 不全爲零足矣．

如上結果尚可化成極簡潔之形式．據本 [illegible] 所論，知有所謂綫素 ds 者，其定義爲

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

其中 E,F,G 爲

$$E=\varphi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2,$$

$$F=\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v,$$

$$G=\varphi_v^2+\psi_v^2+\chi_v^2.$$

由是可知

$$EG-F^2=(\varphi_u\psi_v-\psi_u\varphi_v)^2+(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2$$
$$+(\chi_u\varphi_v-\varphi_u\chi_v)^2.$$

於是面積積分得簡化爲

$$\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

而面素將爲 $$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

茲仍舉球面爲例.球面之中心爲原點,半徑爲 R 者,有下列參變數方程式:

$$x=R\cos u\sin v,$$

$$y=R\sin u\sin v,$$

$$z=R\cos v,$$

其中 u 及 v 之變,限於 $0\leqq u\leqq 2\pi$ 及 $0\leqq v\leqq\pi$,依據前式得其面積爲

$$R^2\int_0^{2\pi}du\int_0^{\pi}\sin v\,dv=4\pi R^2.$$

最後吾人擬應用所得結果以論轉成面之面積.如有一轉成面,由 $z=\varphi(x)$ 以 z 軸爲轉軸而成者,試以極坐標作輔變數,則其方程式爲

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})=\varphi(u).$$

由是得 $$E=1+\varphi'^2(u),\quad F=0,\quad G=u^2;$$

故其面積爲

$$\int_0^{2\pi}dv\int_{u_0}^{u_1}u\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\,du=2\pi\int_{u_0}^{u_1}u\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\,du.$$

若捨 u 而改用 $z=\varphi(u)$之弧長 s 作輔變數,則此式可簡化爲

$$2\pi\int_{s_0}^{s_1}u\,ds,$$

與上卷 5.3.6 結果相符.

茲以 Torus 爲例,一算其面積.是乃以 z 軸爲轉軸將 $(y-a)^2+z^2=r^2$ 轉動而成者.如以圓之弧長 s 作輔變數，則有 $y=a+r\cos\frac{s}{r}$，由此得其面積爲

$$2\pi\int_0^{2\pi r} y\,ds=2\pi\int_0^{2\pi r}\left(a+r\cos\frac{s}{r}\right)ds=2\pi a\cdot 2\pi r.$$

例　題

1.計算如下體積:

$$\frac{\left[\sqrt{x^2+y^2}-1\right]^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leqq 1 \qquad (a<1).$$

2.計算拋物體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

被平面 $z=h$ 所割去之體積.

3.計算橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

被平面 $lx+my+nz=p$ 所割去之體積.

4.(a)設在曲面

$$r^2=a^2\cos 2\theta$$

(r,θ,ϕ 爲球面坐標) 上作一週合曲線 $\theta=f(\phi)$，試證其所圍面積等於其投於一球面 $r=a$ 之影所圍之面積,其影假定由坐標原點投下者

(b)用一簡積分表達(a)中所論面積.

(c)求(a)中整個曲面之面積.

5.設有一橢圓體,將一橢圓以其正軸爲轉軸旋轉而成者.試求其面積.

6.將一三角形 ABC 以其邊 AB 爲轉軸旋轉而成一曲面.求此曲面之體積與面積.

*7.球體之半徑爲 1，中心在一週合之平面曲綫 L 之上者,成一管形曲面.試證此管面之面積 A 爲 2π 倍於 L 之長.

*8.(a)求下列區域之體積:

$$x^2+y^2+z^2\leqq r^2$$

$$x^2+y^2-rx\geqq 0$$

$$x^2+y^2+rx\geqq 0.$$

(b)注視此區域之球形一部分邊界而求其面積，卽求下列曲面之面積：

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

9.設有一螺面如

$$[illegible]$$

計算其如下一部之面積：

$$[illegible]$$

10.求下列曲面之面積：

$$[illegible]$$

第七節 物理學中之應用

物理學中之基本概念，如質量及密度，可用微積分學之概念描寫盡致，前在本卷 4.2.7 已可略見．茲再例舉力學中之概念數種，藉明數學與物理學關係之密切．

4.7.1. 矩與質量中心

設有一質點(x,y,z)，其質量爲 m，則 mz 爲其對 xy 平面之矩．據同理，其對 yz 平面之矩爲 mx，對 zx 平面之矩爲 my．是爲矩之定義．今設有 n 個質點，則其對三坐標面之矩，爲各點之矩一一疊加之總和，名其質量爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$，其坐標分別爲 $(x_1, y_1, z_1), \cdots\cdots, (x_n, y_n, z_n)$，則

$$T_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \quad T_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad T_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu.$$

更進而觀三維空間中之曲線或曲面，爲質點所滿佈者，欲論其矩，自必應用極限定義，由積分表而出之．例如質點以連續性，並以某種密度 $\mu=\mu(x,y,z)$ 散佈於一變區R，吾人嘗想像 R 劃爲 n 個分區，每分區之質量集中在其中之一點，從而可求 n 個質點之矩，然後令 $n\to\infty$，

即每一分區之最大直徑趨零時其積分之極限

$$T_x = \iiint_R \mu x \, dx\, dy\, dz, \quad T_y = \iiint_R \mu y \, dx\, dy\, dz,$$

$$T_z = \iiint_R \mu z \, dx\, dy\, dz,$$

謂之 R 對三坐標面之矩.

據同理,若有一曲面,其方程式爲

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

而質點以連續性,並以某種密度 $\mu(u, v)$ 分佈於其上,則其對三坐標面之矩爲

$$T_x = \iint_S \mu x \, d\sigma = \iint_B \mu x \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

$$T_y = \iint_S \mu y \, d\sigma = \iint_B \mu y \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

$$T_z = \iint_S \mu z \, d\sigma = \iint_B \mu z \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

最後若有質點以 $\mu(s)$ 密度滿佈於一曲線 $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ 之上,則其矩爲

$$T_x = \int_{s_0}^{s_1} \mu x \, ds, \quad T_y = \int_{s_0}^{s_1} \mu y \, ds, \quad T_z = \int_{s_0}^{s_1} \mu z \, ds;$$

其中 s 爲曲線之弧長.

既明矩之定義,所謂質量中心者,可賴以確定. 若以 M 表散佈於 R 之總質量,所謂質點中心,爲一點之具有下列坐標者:

$$\xi = \frac{T_x}{M}, \quad \eta = \frac{T_y}{M}, \quad \zeta = \frac{T_z}{M}.$$

故就 R 爲一三維空間體時言之,其質量中心爲

$$\xi = \frac{1}{M}\iiint_R \mu x \, dx\, dy\, dz, \quad \eta = \frac{1}{M}\iiint_R \mu y \, dx\, dy\, dz,$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\iiint_R \mu z \, dx\, dy\, dz,$$

其中 M 爲

$$M = \iiint_R \mu \, dx\, dy\, dz.$$

例如一半球體 H：

$$x^2+y^2+z^2\leqq 1,$$

$$z\geqq 0.$$

其中質點散佈之密度爲1，則 T_x 及 T_y 皆爲0，以對 x 及 y 積分之結果皆爲0故．試考

$$T_z=\iiint_H z\,dx\,dy\,dz.$$

應用柱面坐標

$$z=z,$$

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\sin\theta,$$

則
$$T_z=\int_0^1 z\,dz\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi\int_0^1\frac{1-z^2}{2}z\,dz$$

$$=\pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4};$$

復因其總質量爲 $\frac{2\pi}{3}$，故其質量中心爲 $x=0,\ y=0,\ z=\frac{3}{8}$.

若假定質點以密度1散佈於此半球面上而欲求其質量中心，則應用極坐標作輔變數，其方程式爲

$$x=\cos u\sin v,$$

$$y=\sin u\sin v,$$

$$z=\cos v,$$

由是知
$$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sin v\,du\,dv,$$

因之遂得
$$T_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 v\,dv\int_0^{2\pi}\cos u\,du=0,$$

$$T_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 v\,dv\int_0^{2\pi}\sin u\,du=0,$$

$$T_z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\cos v\,dv\int_0^{2\pi}du=2\pi\,\frac{\sin^2 v}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

考其總質量，顯爲 2π，因此其質量中心必在 $x=0,\ y=0,\ z=\frac{1}{2}$.

4.7.2. 轉動慣量

前在上卷5.3.7已知有所謂轉動慣量，爲力學中重要概念之一．今

求其擴張於三維空間中之普遍情形，事甚易易：設有一質點，其坐標為 (x,y,z)，其質量為 m，則其對 x 軸之轉動慣量，為 m 乘 $\rho^2=y^2+z^2$（ρ 為其與 x 軸相去之距離）。據同理，設質點以 $\mu(x,y,z)$ 密度散佈於三維空間中之區域 R，則其對於 x 軸之轉動慣量為

$$\iiint_R \mu(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

對於其他坐標軸之轉動慣量亦相似

此外復有對一固定點（如假定為原點）之轉動慣量：

$$\iiint_R \mu(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

及對一固定平面（如假定為 yz 平面）之轉動慣量

$$\iiint_R \mu x^2\,dx\,dy\,dz.$$

其理亦同．至於質點如以某種密度 $\mu(u,v)$ 散佈於一曲面之上，假定 $\mu(u,v)$ 為一連續函數，則其對 x 軸之轉動慣量當為

$$\iint_S \mu(y^2+z^2)\,d\sigma$$

復次，吾人可假定有一軸平行於 x 軸，而求其對此一軸之轉動慣量．如通過一點 (ξ,η,ζ) 作一軸，與 x 軸平行，則質點以 $\mu(x,y,z)$ 密度散佈於 R，其對此軸之轉動慣量為

$$\iiint_R \mu[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\,dx\,dy\,dz.$$

若令 (ξ,η,ζ) 為質量中心，則有

$$\iiint_R \mu(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint_R \mu[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\,dx\,dy\,dz$$
$$+(\eta^2+\zeta^2)\iiint_R \mu\,dx\,dy\,dz.$$

吾人既可將任何轉動軸作為 x 軸，則細尋此公式之意義，無異謂剛體對於任何轉動軸之轉動慣量為兩種數量相加而成．其一，對另一軸之轉動慣量，通過質量中心而又平行於原軸者．其二，總質量乘以質量中心與

原軸相去距離之平方. 此定理世常以 Steiner 定理稱之.

剛體轉動時，其動能量為轉動慣量乘其角速度平方之半，因此之故，轉動慣量在力學中之地位殊為重要，前在上卷 5.3.7 已論及之.

茲再舉例明之. 如有一球面 V, 其中心在原點, 半徑為 1, 其物質點之散佈密度為 1, 則由於對稱之故, 其對於經過原點任何轉動軸之轉動慣量為

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint_V (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

三者相加，得

$$3I=\iiint_V 2(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

應用極坐標，得

$$I=\frac{2}{3}\int_0^1 r^4\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi=\frac{8\pi}{15}.$$

又棱梁之邊為 a,b,c, 分別平行於 x, y, 及 z 軸, 質點散佈密度為 1, 質量中心在原點者, 其對 xy 平面之轉動慣量為

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}z^2\,dz=ab\frac{c^3}{12}.$$

4.7.3. 複擺

吾人擬應用上述概念以討論複擺. 所謂複擺, 乃一剛體在地心吸力之控制下繞一固定轉動軸擺動之謂.

試設想有一平面經過剛體之質量中心 G, 垂直於轉動軸, 與之相割於 O 點, 見圖 4.17. 以 ϕ 表 OG 與經過 O 點指向地心之垂線所成之角, 則吾人欲明擺動之情形, 但考 $\phi(t)$ 果為何種函數已足. 欲求索 $\phi(t)$, 當引用物理學中之定理, 據能力不滅原理, 動能量與位能量之和為一常數. 若以 M 表總質量, g 表地心吸力常數, s 表 OG 之長, 則複擺之位能量為 $V=M\cdot g\cdot s(1-\cos\phi)$. 至其動能量, 據前所論, 為 $T=\frac{1}{2}I\dot\phi^2$, 其中 I 為其轉動慣量. 因此之故, 遂有

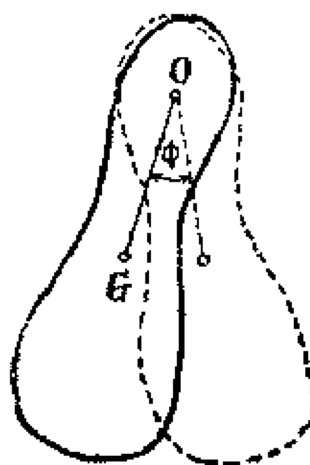


圖 4.17

$$\frac{1}{2}I\dot\phi^2-Mgs\cos\phi=\text{常數}.$$

於此若採用一常數 $l=\frac{I}{Ms}$, 可見此方程式與上卷 5.4.2 例六所論之簡單擺完全相同, 從而知其擺動週期 T 為

$$T = 2\sqrt{\frac{I}{Mgs}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2\phi}},$$

式中 ϕ_0 為質量中心之最大移動. 在擺動甚小時，此公式可簡化為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgs}}.$$

此式自包括普通擺為其特殊情形，蓋其時當假想其總質量集中於其質量中心，於是 $I = Ms^2$，故 $l = s$.

更作進一步之探討，若以 I_0 表複擺對於通過質量中心之轉軸之轉動慣量，則其對於任何轉動軸之轉動慣量 I 必與之發生如下關係：

$$I = I_0 + Ms^2,$$

前在 4.7.2 已論及之. 因此遂得

$$l = s + \frac{I_0}{Ms}.$$

如將 $\frac{I_0}{M}$ 簡寫為 a，則

$$l = s + \frac{a}{s}.$$

由是知 l 必大於 s，故複擺之擺動週期必大於普通擺、假定普通擺之質量集中於質量中心者. 復次，對於任何平行之轉動軸，但求其與質量中心之距離同為 s 者，其週期必相同，由上式不難見之.

復觀 $l = s + \frac{a}{s}$，若將其中 s 易以 $\frac{a}{s}$，亦即將轉動軸之距離質量中心為 s 者移至距離為 $\frac{a}{s}$ 之處，則 l 不因之而變. 由是以論，對於任何平行轉動軸，若其距離質點中心為 s 或為 $\frac{a}{s}$ 者，複擺之擺動週期完全相同.

更就週期公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s + \frac{a}{s}}{g}}$$

而細考之，可見 T 當 s 趨零或趨無窮大時，將無限制趨大. 因此 T 必在 s 取得某值如 s_0 時有一最小值. 令 T 之導數為 0，從而求得其最小值所在為

$$s_0 = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{I_0}{M}}.$$

由是知複擺之轉動軸與質量中心相去之距離為 $s_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$ 者，對於轉動軸之移動感覺最不靈敏. 蓋在 $\frac{dT}{ds} = 0$ 時，s 如發生初次數量級之變化，其能在 T 所引起之影響，僅為二次數量

級之變．此結果自可大加利用．德國有名光學公司[illegible]氏曾據之以製造異常精確之鐘錶．

4.7.4. 吸引質量之勢函數

設有一質點Q，假定其質量為m，固定於(ξ,η,ζ)，依Newton引力定理，吸引另一質點P，其坐標為(x,y,z)，質量為1．則P所受之力，除有一引力常數不加採論外，為

$$m\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

其中$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$為兩點間之距離，前在本卷2.7.3已詳論之．此引力之方向為連接兩點之直線方向，而其量則與兩點間距離之平方成反比．故推廣其意，假設有n個固定點$Q_1,Q_2,\cdots\cdots,Q_n$，其質量分別為$m_1,m_2,\cdots,m_n$，則其加於P之引力將為

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{m_n}{r_n}$$

之陡度，其中r_ν即用以表達Q_ν與P相去之距離．據前所論，凡力之可由一函數之陡度表而出之者，此函數即謂力之勢函數．因此之故，n個質點$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$對於P點所加引力之勢函數為

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{\sqrt{(x-\xi_\nu)^2+(y-\eta_\nu)^2+(z-\zeta_\nu)^2}}.$$

更進而考質點之以某種連續性密度μ散佈於一曲線、曲面、或三維區域之上者，則加於其外一點$P(x,y,z)$之勢函數當為

$$\int_{s_0}^{s_1}\frac{\mu}{r}\,ds,$$

$$\iint_S\frac{\mu}{r}\,d\sigma$$

或

$$\iiint_R\frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

其中s為曲線之弧長，$d\sigma$為面素，ξ,η,ζ為R中之積分變數，而r則為$P(x,y,z)$與積分區域相去之距離．例如加於$P(x,y,z)$點之勢函數，由於質點以密度1散佈於一球面K：$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$之上者，據上所述，必為

$$\iiint_K\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

$$=\int_{-1}^{+1}d\xi\int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}}d\eta\int_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}\frac{1}{r}\,d\zeta,$$

在此各式中，P之坐標(x,y,z)均視作輔變數，故加於P上之勢函數為此種輔變數之函數．

既明此，如欲由勢函數求得引力諸分[illegible]，則[illegible]變數求導即可。在積分符號下對輔變數求導之法可應用於重積分，但[illegible]之內，即 r 不等於 0 時，其事即可實施。例如有一質點，假定其為單位[illegible]引力諸分力由於質點以密度 1 散佈於三維區域 R 者，必為

$$F_1 = -\iiint_R \frac{x-\xi}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad F_2 = -\iiint_R \frac{y-\eta}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$F_3 = -\iiint_R \frac{z-\zeta}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

所當注意者，若 P 點處於積分變區之內，[illegible]重導數未始無意義可言，惟其積分當作旁義積分觀而一考其收斂問題。例如有一球面 S，[illegible]為 a，其上質[illegible]佈之密度為 1，則其加於一外點及一內點之勢函數可設法[illegible]算之。[illegible]點為此球面 S 之中心，又假定 P（不論在 S 之外或在 S 之內）居 x 軸之上，即其坐標為 $(x, 0, 0)$，則欲求之勢函數當為

$$U = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

如應用極坐標

$$\xi = a\cos\theta,$$

$$\eta = a\sin\theta\cos\phi,$$

$$\zeta = a\sin\theta\sin\phi,$$

則

$$U = \int_0^{\pi} \frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{(x - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}}\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{x^2 + a^2 - 2ax\cos\theta}}\, d\theta.$$

復令 $x^2 + a^2 - 2ax\cos\theta = r^2$，則 $ax\sin\theta\, d\theta = r\, dr$，於是在 $x \neq 0$ 時必有

$$U = \frac{2\pi a}{x}\int_{|x-a|}^{|x+a|} \frac{r\,dr}{r} = \frac{2\pi a}{x}(|x+a| - |x-a|).$$

故在 $|x| > a$，時得 $$U = \frac{4\pi a^2}{x},$$

在 $|x| < a$，則 $$U = 4\pi a.$$

循是以論，就對於任何外點之勢函數而論，其總質量 $4\pi a^2$ 似集中於球面之中心。在球面之內，此勢函數為一常數。在球面之上，為一連續函數，蓋 U 在此為一收斂之旁義積分，其值為 $4\pi a$ 者。惟一考其引力之 x 部分，在此將作[illegible]當 $|x| > a$ 時，

$$F_x=-\frac{4\pi a^2}{x^2}.$$

當 $|x|<a$ 時,則 $F_x=0$ 故也.

例 題

1. 設有一直角錐體,求其曲面之質量中心所在.

2. 求拋物體 $x^2+y^2=2z$ 被平面 $z=z_0$ 所割去一部之質量中心.

*3. 有一管形曲面,爲一族球面之半徑爲1中心在 xy 平面者所造成. 試以 S 表此曲面在 xy 平面上之部,並以 Π 表 S 在 xy 平面中投影之面積,證 S 之質量中心之 z 坐標等於 $\frac{\Pi}{S}$.

4. 有兩柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+y^2=R'^2$ $(R>R')$,及兩平面 $z=h$, $z=-h$ 所圍而成之一體,求其(a)對 z 軸之轉動慣量,(b)對 x 軸之轉動慣量.

5. 若以 A,B,C 表一剛體對 x,y,z 各軸之轉動慣量,證下列不等式:

$$A+B>C,\quad A+C>B,\quad B+C>A.$$

6. 求橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

對(a) z 軸之轉動慣量;(b)對一經過原點如 $x:y:z=\alpha:\beta:\gamma$ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$ 軸之轉動慣量.

*7. 設有一橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

試求所有一切平面,此橢圓體對之有同一轉動慣量 h 者,復求此種平面之包面.

8. 設 O 爲任何一點, S 爲任何剛體,在經過 O 之射線上,取一點,其距離 O 點爲 $\frac{1}{\sqrt{I}}$, I 爲 S 對於射線之轉動慣量.試證此種點成一橢圓體(亦稱慣量橢圓體).

9. 求一橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在 (ξ,η,ζ) 之慣量橢圓體.

10. 設一球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之密度爲

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},$$

求其質量中心之坐標.

11. 求橢圓體如下一部

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

之質量中心.

12. 設有一剛體 S，係 S_1 及 S_2 兩部所合成，以 I，I_1，I_2 分別表其對於任何平行於經過質量中心之軸之轉動慣量，試證

$$I=I_1+I_2+\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}d^2$$

其中 m_1 及 m_2 分別爲 S_1 及 S_2 之質量，而 d 爲經過 S_1 及 S_2 質量中心之軸彼此相去之距離.

13. 求轉成橢圓體

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

在其中心($b>a$)之勢函數.

14. 求轉成體 $\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\leqq f(z),\quad a\leqq z\leqq b$,

在原點之勢函數.

第四章　附錄

第一節　重積分之存在定理

A4.1.1.　變區之內涵及多維變區

函數 $f(x,y)$ 如在某變區中處處連續，則其重積分必能存在，前已屢言之矣. 今欲爲此事立一嚴密之證明，須先講明一重要概念，即所謂變區之內涵[1].

前在上卷第五章中，知平面中之面積可由積分表而達之. 憑吾人之觀覺，信面積之存在，爲無可懷疑之事. 然吾人在本節中擬爲面積之內涵求一普遍定義，並探討其概念在何種條件下始有意義之可言.

試以一長方形爲始，其邊平行於 x 及 y 坐標軸者，則其面積爲其底與其高相乘之積. 苟作直線與坐標軸平行，將此一長方形劃分爲較小之

(1) content, Inhalt

長方形,則原有長方形之面積自為諸較小長方形面積之和. 循是以論,苟一變區為有盡個長方形所組合而成①,則其面積為此有盡個長方形面積之和.以是作為定義,用以規定此類變區之面積.據此定義,面積之為物,與其如何劃分絕無絲毫關聯:不論分為 n 個長方形,或 m 個長方形,或竟為 nm 或 n^2m^2 長方形,要之為此有盡個長方形面積之和.

此理既明,可進而論任何變區之面積. 設有一任何變區 B,吾人可作變區 B_i 及 B_e,各為長方形所合成者,將 B 包含於 B_e 之內,而 B_i 復完全處於 B 之中. B_e 謂 B 之外區,B_i 謂 B 之內區. 任意作一長方形,將 B 包圍於其內,復作平行於坐標軸之直線,從而獲得種種長方形,含 B 於其中,即可謂 B 之外區 B_e. 又取其中長方形之處於 B 之內者,可從而合成 B 之內區 B_i. 所謂 B 之面積,乃介於其內區及外區兩者面積之間,即不論 B_i 與 B_e 如何產生,必有

$$C(B_i) \leqq C(B) \leqq C(B_e).$$

式中 $C(B)$ 用以表示 B 之面積,而 $C(B_i)$ 及 $C(B_e)$ 分別為內區及外區之面積.若令分區愈分愈細,即長方形之直徑趨向於零時,則 $C(B_i)$ 為一獨升數序,而 $C(B_e)$ 為一獨降數序.故 $C(B_i)$ 及 $C(B_e)$ 各有一極限. **苟此兩極限相等,則其共同極限即謂之 B 之面積.**

論至此,當一考 $C(B_i)$ 及 $C(B_e)$ 在何種條件下能趨同一極限之問題. 兩者趨同一極限,無異謂 $C(B_e)-C(B_i)$ 在分區趨細時收斂於零. 惟考 $C(B_e)-C(B_i)$ 之意義,為狹小之長方形所合成,鄰近於 B 之邊界者. 循是以論,若 $C(B_e)-C(B_i)$ 果能趨零,則 B 之邊界可由一狹小長方形所合成之區域所包圍,而此區域之面積必為任意小. 倒言之,B 之邊界若可由一區域 S 包圍之,而此區域為狹小長方形所組成,其總面積隨分區之趨細而趨零者,則 B_e-B_i 必居 S 之內,必隨 S 而趨於零. 於是乃有如下結果:$C(B_e)$ 與 $C(B_i)$ **所趨極限相等之必要與充分條件無他,B 之邊界可被圍於一區域之內,而此區域為長方形所組**

①在此所謂長方形,乃指長方形之邊平行於坐標軸者而言.

成，其面積爲任意小者．果如是，吾人遂謂 L 有一內涵①.

繼此所欲證明者，爲任何按段光滑之曲線(卽一連續曲線，將有盡個點除外，處處有連續切線者)必有此種特性，換言之，必可由一區域包圍之，而此區域爲長方形所組成，且面積可任意小者．此事在觀覺上固甚顯然，吾人當於下段中詳證之．故 B 若爲有盡個分區所合成，每分區之邊界各爲按段光滑之曲線者，此條件自必滿足．因之此種區域必有確定唯一面積可言，其實在應用上所遇見者，亦不外此種區域而已.

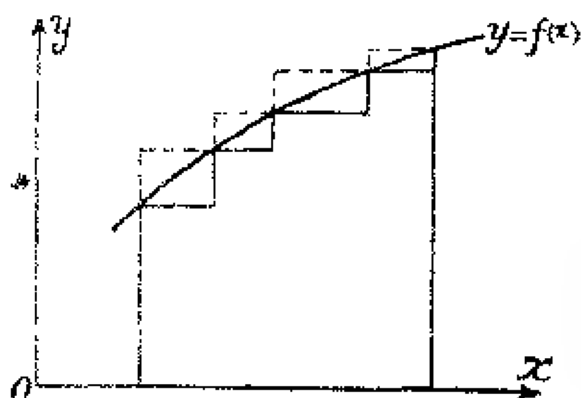


圖 4.18

如是規定面積之義與前論之積分法初無二致，自不難見之．設 B 爲一區域，上下爲 $y=f(x)$，及横軸，左右爲 $x=a$，$x=b$ 兩直線所圍成者，其內外區 B_i 及 B_e 可假定如圖 4.18 所示．據上卷所論積分定義，可知其面積卽分別爲 $\int_a^b y\,dx$ 之上和 $\overline{F}_n$ 及下和 $\underline{F}_n$．復因

$$C(B_i)\leqq C(B)\leqq C(B_e)$$

之故，乃知必有

$$C(B_i)\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq C(B_e).$$

惟 $\lim C(B_i)=\lim C(B_e)$，從而可以推斷

$$C(B)=\int_a^b f(x)dx.$$

至於 B 由平行於坐標軸之直線劃成分區，從而規定之內涵必與

$$\iint_B dx\,dy$$

相符，自更顯而可見.

①規定內涵時，曾假定有一特殊坐標系，其事似覺不甚滿意．其實此定義與坐標系之選擇，絕無關係，不獨在平面中爲然，將來推廣於 n 維空間時亦未嘗不然．此事不必加以詳論．但求面積可由重積分求出之，而重積分之值不因坐標之變換而變化，此其與坐標系無關，已可見矣.

吾人為面積另立新說，創所謂內涵之義，其意欲力求普遍，使推廣於 n 維空間時大體上不必有何更動．如就三維空間言之，所謂平行六面體之內涵，假定其邊平行於坐標軸者，即為其三邊相乘之積．於是三維區域如為有盡個此種平行體所合成，則其內涵即可決定．至於其他三維區域 B，未為有盡個平行體所合成者，當創造其內區 B_i 及外區 B_a，兩者皆為平行體所組成，前者完全為 B 所包圍，而後者又包圍 B 於其中．兩者如有一共同極限，其存在之必要與充分條件為 B 之邊界可被內涵趨零之平行體所包圍，則此極限即稱之為 B 之內涵．若 B 為一連續曲面，其切面按段連續者，則此極限必能存在．故此種區域，必有確定及唯一之內涵．本書中所欲討論者，以此種區域為限．至於如是規定區域之內涵與前論之積分法，用意初無二致，自無待論．

A4.1.2.　關於光滑線段之一定理

一光滑線段可作其一鄰區以包圍之，而此鄰區為長方形所組成，其邊平行於坐標軸，其內涵為任意小者．此理前論區域之內涵時曾引用之，雖淺顯易曉，似非證明不可．欲證之，但取其中任何一段之有連續切線者證之已足．假定如是一段之方程式為

$$x = \phi(s), \quad y = \psi(s), \qquad a \leqq s \leqq b,$$

式中 s 表曲線之弧長，而 $\phi(s)$ 及 $\psi(s)$ 之導數亦為連續函數．因之可假定

$$|\phi'(s)| \leqq 1,$$
$$|\psi'(s)| \leqq 1.$$

於是據微分學之中值定理，可知對於區程 $a \leqq s \leqq b$ 中任何兩值 s 及 s_1 必有

$$|x - x_1| = |\phi(s) - \phi(s_1)| \leqq |s - s_1|,$$
$$|y - y_1| = |\psi(s) - \psi(s_1)| \leqq |s - s_1|.$$

然後將線段均分為 n 段，長為 $\epsilon = \dfrac{b-a}{n}$，並表其 ν 段之始點為 (x_ν, y_ν)，其中任何一點為 (x, y)，則

$$|x-x_\nu|\leqq\epsilon \quad 或 \quad x_\nu-\epsilon\leqq x\leqq x_\nu+\epsilon,$$

$$|y-y_\nu|\leqq\epsilon \quad 或 \quad y_\nu-\epsilon\leqq y\leqq y_\nu+\epsilon.$$

循是以論，其 ν 段線段必完全被閉於一正方形之中，其邊爲 2ϵ 而面積爲 $4\epsilon^2$ 者．故此整段曲線將被閉於 n 個此種正方形，其總面積至多爲

$$4\epsilon^2 n=4\epsilon(b-a).$$

此在 ϵ 趨小時爲任意小，故欲證之理，卽已於是．

更進而論三維空間中之曲面如

$$x=\phi(u,v),$$

$$y=\psi(u,v),$$

$$z=\chi(u,v)$$

假定 ϕ,ψ,χ 具有按段連續之導數者，其理亦復相似．據類似之推理，不難證明此種曲面之邊界可被閉於小立體所組成而內涵趨零之區域，因之此種曲面必有確定及唯一之內涵．

根據上述結果，復可推得一關於區域之重要定理．若一區域 R 之邊界爲一按段光滑之曲線，復用按段光滑之線段劃爲兩分區 R' 及 R''，則 R 之面積必等於 R' 及 R'' 兩面積之和．其理可證之如下．試作平行於坐標軸之直線，得一長方形網，並求其網眼相當細密，使長方形之鄰近於 R 之邊界者及鄰近於劃分 R' 及 R'' 之線段者有任意小之面積．然後規定 R_e 及 R_i 爲長方形組成之區域．假定 R_e 包含 R，而 R 又包含 R_i，他如 R_e'，R_i'，R_e''，R_i'' 之義亦相似．於是 R_e' 及 R_e'' 必將 R_e 完全掩蔽，其中長方形且有重疊者，因之

$$C(R_e')+C(R_e'')\geqq C(R_e)\geqq C(R).$$

復考 R_i' 及 R_i'' 均處於 R_i 之中，彼此完全隔離，故有

$$C(R)\geqq C(R_i)\geqq C(R_i')+C(R_i'').$$

惟分區愈細時，$C(R_e')$及 $C(R_e'')$將分別任意趨近於 $C(R')$及 $C(R'')$，故由上列不等式可以推知

$$C(R')+C(R'')\geqq C(R)$$

及
$$C(R')+C(R'')\leq C(R),$$
是即欲證之理.

此理在 R 割為有盡個分區 $R^{(1)}$、$R^{(2)}$、…、$R^{(n)}$ 時亦必有效. 其推廣於多維空間中之區域，亦無何種困難；讀者可自思得之，不必贅述.

A4.1.3. 重積分之存在證明

設 $f(x,y)$ 在 R 中，包括其邊界在內，處處連續. 吾人茲欲證明者，本卷 4.2.1 所論之下和 $\Sigma m_\nu \Delta R_\nu$ 及上和 $\Sigma M_\nu \Delta R_\nu$，不論 R 如何劃成分區 R_ν，但求分區之直徑趨零，必趨一共同極限. 其證與上卷第二章附錄中所述大體相似，故僅擇要簡述於此.

吾人不妨假定 R 用直線劃成分區 R_ν，分區之最大直徑不超過 δ. 於是可選擇 δ 如是小，使分區中任何兩點，彼此相離小於 δ 者，其函數值之差均小於 ϵ. 故在每一此種分區中必有
$$M_\nu - m_\nu < \epsilon,$$
從而知
$$\Sigma M_\nu \Delta R_\nu - \Sigma m_\nu \Delta R_\nu < \Sigma \epsilon \Delta R_\nu = \epsilon C(R).$$
若更有一種分區之法，如將 R 劃成 R_μ'，其直徑不超過 δ 者，據同理必有
$$\Sigma M_\mu' \Delta R_\mu' - \Sigma m_\mu' \Delta R_\mu' < \epsilon C(R).$$
然後合併兩種分區之分點而得第三種分區，則細密將更勝於前. 惟就第三種分區所得之下和言之，必不小於原有兩種分區之下和，其相差必各小於 $\epsilon C(R)$. 因此，$\Sigma m_\nu \Delta R_\nu$ 及 $\Sigma m_\mu' \Delta R_\mu'$ 之相差必小於 $2\epsilon C(R)$. 由是根據 Cauchy 審斂法，可以斷定此下和在 ϵ 趨零時，不論分區情形如何，必趨一極限. 復因上和與下和相差任意小之故，可知其上和亦必趨同一極限. 重積分 $\iint_R f(x,y)dS$ 之存在，於是得證.

觀上述證明，曾假定 R 之分區為直線多邊形. 作此假定之用意，乃欲使第三種分區、即合併前兩種而得 $R_{\nu\mu}''$ 之事確能實現. 如有一分區，其邊之一部為 $x=0$，復有一他分區，其邊之一部為 $x^2\sin\frac{1}{x}=y$，則合併而成之第三種分區將在 $x=0$ 鄰近有無窮多之孤塊矣. 雖然，此假定不

難設法避去之. 據前段所論, 凡曲線所圍成之分區得以直線圍成之分區替代之, 而令其間面積之差爲任意小, 因之其下和(或上和)之差亦爲任意小. 故分區之邊界即爲任何光滑曲線, 其理亦得證矣.

此理自可推廣於兩個以上自變數之重積分, 讀者可自求之.

第二節 多維空間中之體積與面積

A4.2.1. 重積分之分解

在 xy 平面中如有一變區 R, 爲一族曲線 $\phi(x,y)=c$ (c 爲一常數)所掩蔽, 其掩蔽情形, 假定 R 中每一點有族中一曲線且僅有一曲線通過, 如是則吾人可將 $\phi(x,y)=\xi$ 作爲新變數, 意即將 $\phi(x,y)=c$ 一族曲線作爲坐標曲線而應用之. 至其他一變數, 可仍用 $\eta=y$. 吾人之討論, 自當限於如是之變區 R, 其中之點由 $\phi(x,y)=c$ 及 $y=c$ 所唯一規定者.

試應用此兩新變數, 則據轉換式必有

$$\iint f(x,y)dx\,dy=\iint\frac{f(x,y)}{\phi_x}d\xi\,d\eta.$$

欲計算此轉換後之積分, 可先令 ξ 固定, 其對 η 之積分可寫如

$$\int\frac{f(x,y)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}{\phi_x}d\eta.$$

惟既令 ξ 固定, 其意即沿一曲線 $\phi(x,y)=\xi$ 求積, 若以 s 表此曲線之弧長, 則由於

$$\frac{ds}{d\eta}=\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}{\phi_x}$$

之故, 此積分轉換遂得如下形式

$$\iint f(x,y)dx\,dy=\int d\xi\int\frac{f(x,y)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}ds.$$

於是此重積分遂分解爲如是兩步. 此結果可由幾何觀點闡明之. 吾人可設想有一族曲線, 垂直於 $\phi(x,y)=c$ 中之每一線, 其方向爲矢量grad ϕ

所示者．若以 $x(\sigma)$ 及 $y(\sigma)$ 表此垂直曲線之坐標，σ 爲其弧長，則

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}},\qquad \frac{dy}{d\sigma}=\frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}};$$

復因

$$\frac{d\xi}{d\sigma}=\phi_x\frac{dx}{d\sigma}+\phi_y\frac{dy}{d\sigma}$$

故

$$\frac{d\xi}{d\sigma}=\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}=\sqrt{(\operatorname{grad}\phi)^2}.$$

考 $\phi(x,y)=\xi$ 及垂直於此之一族曲線劃成一線網，其中任何網眼之面積可近似規定之．試觀一四邊形之網眼，其二邊爲 $\phi(x,y)=\xi$, $\phi(x,y)=\xi+\Delta\xi$，其他兩邊爲垂直於此之曲線，在 $\phi(x,y)=\xi$ 上相隔爲 Δs 者，則此網眼之面積近於 $\Delta s\Delta\sigma$，即近似於

$$\frac{\Delta s\Delta\xi}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}.$$

於是上列積分轉換將爲

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy=\iint f(x,y)\frac{ds\,d\xi}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}.$$

細考此式之意義，若應用平方於分區之法以計算重積分，其結果與應用 $\phi(x,y)=c$ 及其垂直曲線族作爲分區網完全相同．

更進而論三重積分，亦有類似於此之分解．設有一三維區域 R，其中每一點必有 $\phi(x,y,z)=c$ 一族中之一曲面且僅有一曲面通過，如是吾人可將 $\phi(x,y,z)=\xi$ 作爲新變數，從而得下列轉換：

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\int d\xi\iint\frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}\cdot\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{\phi_x}\,dy\,dz;$$

然後令 ξ 固定，先對曲面 $\phi=\xi$ 求積

$$\iint\frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}\,d\sigma$$

而後更對 ξ：

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int [illegible] \, dc$$

A4.2.2 多維空間中曲面之面積

上述結果，可推廣於多維空間。在 n 維空間中，如下方程式

$$\phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = c$$

為 n 維空間中之一曲面。當 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ 在一規定區域 B 變化，此方程式向 x_n 解開時，即得曲面之一部 σ。此一部分曲面之面積由下列積分之絕對值規定之

$$A = \iint\cdots\int_B \frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}}{\phi_{x_n}}\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1}.$$

此定義為普通面積定義之一推廣。坐標 x_n 之選擇，不致影響 A 之值，可用本卷 4.6.3 之法證明之

曲面面積之普通定義已如上述，今設有一函數 $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$，以此曲面為其積分變區者，則其積分之定義為

$$\iint\cdots\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, d\sigma$$

$$= \iint\cdots\cdots\int_B f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}}{\phi_{x_n}}\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1},$$

其中 x_n 當據 $\phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = c$ 由 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ 表而出之。此公式之真確，與 x_n 之選擇無關，自不難見之

復次，n 維變區 R 中之重積分如

$$\iint\cdots\cdots\int_R f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n,$$

可應用上述概念，依前段之法分解之。如 R 為一族曲面

$$\phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = c$$

所掩蔽，即 R 中每一點有族中一曲面且僅有一曲面通過，則吾人以

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1},\ \xi = \phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

為新變數，可得下列轉換：

$$\int d\xi\int\cdots\int\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\sqrt{\varphi_{x_1}^2+\cdots+\varphi_{x_n}^2}}\frac{\sqrt{\varphi_{x_1}^2+\cdots+\varphi_{x_n}^2}}{|\varphi_{x_n}|}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\int d\xi\int\cdots\int\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\sqrt{\varphi_{x_1}^2+\cdots+\varphi_{x_n}^2}}d\sigma.$$

A4.2.3.　n 維空間中球面之面積與體積

茲特討論一簡單之例以明上述方法之用，設有

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=r^2,$$

是爲 n 維空間中之一球面，其面積如何，試設法計算之，又其體積，即滿足

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2\leqq r^2$$

之體積，亦擬詳加研討．

設 $f(r)$，$r=\sqrt{x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2}$ 在球面之內處處連續，試先求下列重積分

$$\int\cdots\cdots\int\int f(r)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n,$$

假定其積分變區限於 $x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2\leqq R^2$　應用新變數

$$r^2=\varphi(x_1,\cdots\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2,$$

則由於　$$\sqrt{\varphi_{x_1}^2+\cdots\cdots+\varphi_{x_n}^2}=2r$$

及　$$d(r^2)=2r\,dr$$

之故，此重積分可分解爲

$$\int\int\cdots\cdots\int f(r)dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n=\int_0^R f(r)\,dr\int\cdots\int d\sigma=\int_0^R f(r)H_n(r)dr,$$

式中 $H_n(r)$ 爲球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=r^2$ 之面積．

據面積之普通定義，一半球面之半徑爲 r 者，其面積當由

$$\frac{1}{2}H_n(r)=r\int\cdots\cdots\int\frac{dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_{n-1}}{x_n}$$

規定之，其積分變區自限於 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{n-1}^2\leqq r^2$．爲求簡之故，可捨 x_ν 而改用

$$\xi_\nu=\frac{x_\nu}{r},\quad \sum_1^n\xi_\nu^2=1$$

作積分變數，於是得

$$H_n(r)=2r^{n-1}\int\cdots\int\frac{d\xi_1\cdots d\xi_{n-1}}{\xi_n}=r^{n-1}\omega_n,$$

其中 $\xi_1^2+\cdots\cdots+\xi_n^2=1$ 之面積以

$$\omega_n=\iint\cdots\int [illegible]$$

表之．惟如是，遂得

$$\iint\cdots\int [illegible] dr.$$

據此可以求得 ω_n [illegible]

[illegible]

則此公式得如下形式

$$[illegible]$$

復因 $[illegible]$

及 $[illegible]$

之故，遂得 $[illegible]$

式中 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ 當 n 為偶數時為 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!$，當 n 為奇數時為 $[illegible]$．至 Γ 函數之普遍定義，當參閱上卷 4.7.3 及本卷附錄第五節．

復次，若令 $f(r)=1$，則可據前式而求得 n 維空間中單位球面之體積如

$$v_n=\iint\cdots\cdots\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\omega_n\int_0^1 r^{n-1}\,dr=\frac{\omega_n}{n},$$

因之

$$v_n=\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

4.2.4. 所得結果之推廣

設 n 維空間中有一 r 維($r\leqq n$)曲面，則其體積或面積可根據前述之理推演而討論之．為研討之便，可應用輔變數方程式以表達一 r 維曲面：

$$x_1=\phi_1(u_1,u_2,\cdots\cdots,u_r),$$

$$x_2=\phi_2(u_1,u_2,\cdots\cdots,u_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\phi_n(u_1,u_2,\cdots\cdots,u_r),$$

假定 ϕ_ν 在 $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_r$ 之變域 R 中處處有連續導數，$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_r$ 在 R 中變化時，$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ 即隨之而描寫 r 維曲面．

吾人可由

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

組織各種 r 行之行列式　　D_i　　$\left(i=1,2,\ldots\ldots,\binom{n}{r}\right)$

例如

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

即為其中之一．於是 r 維曲面之內涵當由下列積分

$$\int\cdots\cdots\int\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots\cdots+D_{\binom{n}{r}}^2}\,du_1\,du_2\cdots du_r$$

規定之．此公式當 $r=1$ 時即為弧長，又當 $r=2$ 時即為三維空間中曲面之面積．吾人應用積分轉換式及行列式之普通性質，不難證明此式對於輔變數之更易具有不變性，即捨 $u_1, \ldots\ldots, u_r$ 另取 r 個輔變數，此表達內涵之公式依然不變．

吾人擬將此公式在 $r=n-1$ 之情形下證明之．若 $\phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0$ 為 $(n-1)$ 維曲面之一部分，處於 n 維空間之中者，其方程式為

$$x_i=\psi_i(u_1, \ldots\ldots, u_{n-1}), \qquad (i=1,2,3,\ldots\ldots,n),$$

則其面積為

$$A=\int\cdots\cdots\int\sqrt{D_1^2+\cdots\cdots+D_n^2}\,du_1\,du_2\cdots\cdots du_{n-1},$$

其中 D_i 為 $n-1$ 行之 Jacobian．

$$D_i=\frac{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_{n-1})}。$$

至於在此出現之各導數，自必[illegible]設定 $\varphi_{x_n}\neq 0$(不影響定理之普遍性)，於是據 … 其面積為

$$A=\int\cdots\int\frac{|\operatorname{grad}\varphi|}{\varphi_{x_n}}dx_1\cdots\cdots dx_{n-1}.$$

因此之故，但能證明

$$\frac{1}{\varphi_{x_n}}|\operatorname{grad}\varphi|dx_1\cdots\cdots dx_{n-1}=\sqrt{\sum_i D_i^2}\,du_1\cdots\cdots du_{n-1},$$

或
$$|\operatorname{grad}\varphi|^2=\varphi_{x_n}^2\left(\ [illegible]\ \right)^2=\frac{\varphi_{x_n}^2}{D_n^2}\sum_i D_i^2$$

於事已足。惟據 Jacobian 之性質，可知

$$\frac{D_\nu}{D_n}=\frac{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_{\nu-1},x_{\nu+1},\cdots\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_{n-1})}:\frac{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_{n-1})}$$

$$=\frac{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_{\nu-1},x_{\nu+1},\cdots\cdots,x_n)}{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})}.$$

此最後之 Jacobian 即欲以 $(x_1,\cdots\cdots,x_{\nu-1},x_{\nu+1},\cdots\cdots,x_n)$ 代替 $(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})$ 作為變數，但 $\frac{\partial x_n}{\partial x_\nu}$ 當由下列諸式求得之：

$$\varphi_{x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}+\varphi_{x_i}=0,\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n-1),$$

由是知
$$\frac{D_\nu}{D_n}=\pm\frac{\varphi_{x_\nu}}{\varphi_{x_n}},$$

故
$$\frac{D_\nu^2}{D_n^2}=\frac{\varphi_{x_\nu}^2}{\varphi_{x_n}^2},$$

而欲證之 A，即在於是。

所欲補述者，$\sum_i D_i^2$ 可由一 $n-1$ 行之行列式表而出之，

$$\sum_1^n D_i^2=|x_{u_i}x_{u_k}|=\begin{vmatrix}x_{u_1}^2 & x_{u_1}x_{u_2} & \cdots & x_{u_1}x_{u_{n-1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{u_{n-1}}x_{u_1} & \cdots & \cdots & x_{u_{n-1}}^2\end{vmatrix}=G,$$

於是
$$A=\int\cdots\cdots\int\sqrt{G}\,du_1\cdots\cdots du_{n-1}.$$

此行列式內之各元素可視為下列諸矢量

$$x_{u_k}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_k},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial x_n}{\partial u_k}\right),$$

$$x_{u_l}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_l},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial x_n}{\partial u_l}\right)$$

之餘積也.

例　　題

1. 求 n 維空間中橢圓體 $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots\cdots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\le 1$ 之容積.

2. 設有一函數 $f(x_1)$, 僅爲 x_1 之函數, 求 [illegible] 之單位球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=1$, 並表述之爲一單積分.

第三節　旁義積分之含輔變數者

A4.3.1.　匀歛之旁義積分

旁義積分之含輔變數者,淺隨處可見.如

$$\int_0^1 y^x\,dy=\frac{1}{x+1},$$

在 $-1<x<0$ 變程中爲最淺顯之一例.

前在本卷 4.1.2, 知積分變程如爲有限, $f(x,y)$ 又爲連續,則

$$\int_a^b f(x,y)dy$$

爲其中輔變數 x 之連續函數. 惟變程伸展至於無窮時, 其事即未必如是,觀於下例,即可概見.如

$$F(x)=\int_0^\infty\frac{\sin xy}{y}dy.$$

在 $x>0$ 或 $x<0$ 情形下將由 $xy=z$ 分別轉換於

$$\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz\qquad 或\qquad \int_0^{-\infty}\frac{\sin z}{z}dz=-\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz.$$

考 $\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz$ 據上卷 4.7.4 所述固爲收歛,且其值爲 $\frac{\pi}{2}$. 故 $\frac{\sin xy}{y}$ 雖處處連續,其積分不論 x 如何變化皆爲收歛,惟其所收歛之極限 $F(x)$ 未能爲一連續函數,蓋 $F(x)$ 當 $x>0$ 時爲 $\frac{\pi}{2}$、$x<0$ 時爲 $-\frac{\pi}{2}$,當 $x=0$ 時

爲 0 故也.

此事如細加思索,亦殊不足爲奇. 蓋其情形與無窮級數頗相類似. 前在上卷 8.3.1, 知連續函數所組成之無窮級數雖收斂而未必斂於連續函數,其勻斂者始能斂於連續函數. 旁義積分本始不可作無窮級數觀,前在上卷中亦論及之. 循是以論,旁義積分之收斂,亦有勻與不勻之別,立勻斂之定義如次

一收斂之旁義積分

$$F(x) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

苟其積分"餘項", 不論 x **在其規定變程中** $\alpha \leqq x \leqq \beta$ **所處地位爲何如, 必爲任意小,則其收斂謂之勻斂. 精確言之,設** ϵ **爲任意指定之一正數, 必可求得一正數** $A = A(\epsilon)$, **僅隨** ϵ **而異,與** x **無關者,使一切** B **之大於** A **者皆足致**

$$\left| \int_B^{\infty} f(x, y)\, dy \right| < \epsilon$$

成立,如是則此旁義積分謂之勻斂.

勻斂之義既明, 可進而討論一旁義積分果在何種條件下方能勻斂之問題. 吾人所能證明者,有如下審定勻斂之法. 以 M 表一常數,其值爲正,又假定 $a > 1$, 苟自一點 $y = y_0$ 以上, $f(x, y)$ 必滿足

$$|f(x, y)| < \frac{M}{y^a},$$

則 $$\left| \int_B^{\infty} f(x, y)\, dy \right| < M \int_B^{\infty} \frac{dy}{y^a} = M \frac{1}{(a-1)B^{a-1}} \leqq M \frac{1}{(a-1)A^{a-1}},$$

不論 x 如何變化,但令 A 相當大,必可使之任意小. 而其勻斂可以斷定矣. 此法與上卷 8.3.3 審定級數勻斂之法完全相似,讀者可參閱之.

論至此,吾人不難證明,**一函數** $f(x, y)$ **如爲連續,其旁義積分又勻斂者,則必斂於一連續函數.** 蓋據勻斂之假定,必有一 A, 與 x 無關,僅隨 ϵ 而異者足致

$$\left|\int_{A}^{\infty} f(x,y)dy\right| < \epsilon.$$

復因 $f(x,y)$ 連續之故,若令

$$\left|F(x+h)-F(x)\right| < \left|\int_{a}^{A}\{f(x+h,y)-f(x,y)\}dy\right| + 2\epsilon,$$

其中 h 相當小,必足致右端積分之值任意小. $F(x)$ 之連續性於是得證.

上述結果應用於他種旁義積分亦仍有效. 例如假定積分變程為有限,而 $f(x,y)$ 在 $y\to a$ 時無限制趨大,如是則

$$F(x)=\int_{a}^{b} f(x,y)dy$$

自當作旁義積分論. 設 ϵ 為任意指定之一正數,必可求得一與 x 無關,僅隨 ϵ 而異之數 k,凡 h 之不大於 $0<h\leqq k$ 者皆足致

$$\left|\int_{a}^{a+h} f(x,y)dy\right| < \epsilon$$

成立,則此旁義積分謂之勻斂. 苟 $f(x,y)$ 在 $y=a$ 鄰近滿足

$$|f(x,y)| < \frac{M}{(y-a)^{\nu}},$$

式中 M 為一正常數而 $\nu<1$,則其勻斂可無疑義. 連續函數之旁義積分如能勻斂,則必斂於一連續函數,其證同前,讀者可自思得之.

據上所述,旁義積分之勻斂者必為連續函數. 如其在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 變程中處處連續,又可求其積分,從而得下列兩種旁義積分

$$\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{0}^{\infty} f(x,y)dy$$

及

$$\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{a}^{b} f(x,y)dy.$$

其中 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 變程是否可以伸展至於無窮,亦可加以討論.

A4.8.2. 旁義積分對所含輔變數求積與求導

旁義積分是否可以對其所含輔變數求積與求導,為求索極限次序之先後問題,不可不細加研討. 欲決定此問題,可採用如下審定法,或依此法所示途徑,加以特殊之探討.

苟一旁義積分

$$F(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy$$

在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 變程中有勻歛性，則

$$\int_\alpha^\beta dx\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty dy\int_\alpha^\beta f(x,y)dx,$$

其證如次. 據勻歛之義，可知

$$\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^A f(x,y)dy+R_A(x)$$

中之餘項 $|R_A(x)|<\epsilon(A)$, $\epsilon(A)$ 爲一與 x 無關，僅隨 A 而異，且因 $A\to\infty$ 而趨零之數. 惟如是，遂有

$$\int_\alpha^\beta dx\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_\alpha^\beta dx\int_0^A f(x,y)dy+\int_\alpha^\beta R_A(x)dx$$

$$=\int_0^A dy\int_\alpha^\beta f(x,y)dx+\int_\alpha^\beta R_A(x)dx,$$

復據積分學中之中值定理，得

$$\left|\int_\alpha^\beta dx\int_0^\infty f(x,y)dy-\int_0^A dy\int_\alpha^\beta f(x,y)dx\right|\leqq\epsilon(A)\left|\beta-\alpha\right|.$$

然後令 A 趨大，ϵ 隨之而任意小，即得欲證之理.

所當注意者，若輔變數之積分變區伸展至於無窮，則求積次序先後之顛倒，雖在勻歛之條件下未必許可. 惟有旁義之重積分 $\iint f(x,y)dx\,dy$ 存在時(其中 x 及 y 均各由 0 伸至∞)，其事始爲可能:

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)dx.$$

推原其故，要爲旁義重積分如果存在，必與其變區如何伸展絕無關聯，故先令 x 趨大或先令 y 趨大，均無不可也.

上述結果應用於他種旁義積分亦仍有效. 如假定積分變程爲有限，而 $f(x,y)$ 沿有盡條直線如 $y=c$ 或曲線呈間斷之勢，如是則有下列定理: **若 x 之變程爲 $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $f(x,y)$ 僅沿有盡條直線如 $y=a_1, y=a_2, \cdots\cdots, y=a_r$ 有間斷點，此外處處連續，又**

$$\int_c^\infty f(x,y)dy$$

爲一勻歛積分,則此必爲 x 之連續函數,復有下列關係成立:

$$\int_\alpha^\beta dx\int_c^\infty f(x,y)dy=\int_c^\infty dy\int_\alpha^\beta f(x,y)dx$$

蓋在此假定下,積分次序可以互易先後.其證同前,不復贅.

以上論求積問題.至旁義積分可否與其所含輔變數求導之問題,亦不難解答.請證如下定理:**苟** $f(x,y)$ **對** x **在** $\alpha\leqq x\leqq\xi$ **變程中有按段連續導數,復假定**

$$F(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy \qquad 及 \qquad \int_0^\infty f_x(x,y)dy$$

之勻歛,則 $$F'(x)=\int_0^\infty f_x(x,y)dy$$

意謂在此假定下,對 y 求積與對 x 求導可以互易次序.欲證之,但令

$$G(x)=\int_0^\infty f_x(x,y)dy,$$

然後根據其勻歛性而知

$$\int_\alpha^\xi G(x)dx=\int_\alpha^\xi dx\int_0^\infty f_x(x,y)dy=\int_0^\infty dy\int_\alpha^\xi f_x(x,y)dx.$$

復因 $$\int_\alpha^\xi f_x(x,y)dx=f(\xi,y)-f(\alpha,y)$$

之故,遂得 $$\int_\alpha^\xi G(x)dx=F(\xi)-F(\alpha).$$

於是對 ξ 求導,復以 x 代 ξ,得

$$\frac{dF(x)}{dx}=G(x)=\int_0^\infty f_x(x,y)dy,$$

是卽欲證之理.至於旁義積分之上下界亦含輔變數者,此理仍可應用.

蓋因 $$\int_{\varphi(x)}^\infty f(x,y)dy=\int_{\varphi(x)}^a f(x,y)dy+\int_a^\infty f(x,y)dy$$

之故,應用前法右端兩項卽可明其理之眞確.又對於他種旁義積分,其積分變程爲有限者,其理依然有效,自無待言.

A4.3.3. 舉例

〔例一〕 試觀

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dy=\frac{1}{x}\qquad (x>0).$$

此積分在 $x\geqq 1$ 時顯有勻斂性.蓋如以 A 表一正數,則

$$\int_A^\infty e^{-xy}\,dy\leqq\int_A^\infty e^{-y}\,dy=e^{-A},$$

不論 x 如何變化,但令 A 相當大,必爲任意小.由是對 x 求導而得之積分,即

$$\int_0^\infty ye^{-xy}\,dy=\frac{1}{x^2},\quad \int_0^\infty y^2e^{-xy}\,dy=\frac{2}{x^3},\quad\cdots,\quad \int_0^\infty y^ne^{-xy}\,dy=\frac{n!}{x^{n+1}}$$

亦同爲勻斂.因此,若令 $x=1$,則有

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty y^ne^{-y}\,dy=n!.$$

此公式前在上卷 4.7.3 曾以他種方法獲得之.

〔例二〕 試考下列積分

$$\int_0^\infty\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}.$$

若假定 x 大於一正數 a, $x\geqq a$, 則積分符號下對 x 求導之條件皆能滿足,因之屢次求導之結果爲

$$\int_0^\infty\frac{dy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3},\quad \int_0^\infty\frac{dy}{(x^2+y^2)^3}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{x^5},\cdots\cdots$$

$$\int_0^\infty\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

由此諸式,可得 Wallis 乘積(參閱上卷 4.3.4)之又一證明.試令 $x=\sqrt{n}$,則

$$\int_0^\infty\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n-2)}\sqrt{n}.$$

茲欲證明者,列於此式左端之積分在 n 趨大時趨於 $\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.欲證此,當一考

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy-\int_0^\infty\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}$$

實滿足下列不等式:

$$\left|\int_0^\infty e^{-y^2}dy-\int_0^\infty\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right|\leq\int_0^T\left|e^{-y^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right|dy$$

$$+\int_T^\infty e^{-y^2}dy+\int_T^\infty\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}.$$

但 $\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n>y^2$，由是遂得

$$\left|\int_0^\infty e^{-y^2}dy-\int_0^\infty\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right|\leq\int_0^T\left|e^{-y^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right|dy$$

$$+\int_T^\infty e^{-y^2}dy+\frac{1}{T}.$$

然後選擇 T 如是大，使 $\int_T^\infty e^{-y^2}dy+\frac{1}{T}<\frac{\epsilon}{2}$，復令 n 如是大，使

$$\int_0^T\left|e^{-y^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right|dy<\frac{\epsilon}{2},$$

其中 ϵ 爲任意指定之正數，其事由於

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n}=e^{-y^2}$$

之勻歛自必可能．如是必足致

$$\left|\int_0^\infty\left(e^{-y^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\right)dy\right|<\epsilon.$$

從而得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots\cdots(2n-2)}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

是即 Wallis 對於 π 之乘積，本書上卷中已論及之．

〔例三〕 如假定 $x\geqq0$，則

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy$$

之勻歛，亦不難證明之．設 A 爲任何正數，$k\pi$ 爲 π 之最小倍數，大於 A 者，則此積分之"餘項"可寫如

$$\int_A^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy=\int_A^{k\pi}e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy+\sum_{\nu=k}^{\infty}\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy.$$

觀列於右端之級數爲一交錯級數，惟其各項之絕對值則歛於零．依據 Leibnitz 審斂法(上卷

8.1.2)知其必能收斂，且其極限必小於級首一項，因之[illegible]不等式

$$\left|\int_A^{\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy\right| < \int_A^{[illegible]} [illegible] \frac{\sin y}{y} [illegible] \frac{1}{y}dy < \frac{2\pi}{A}$$

成立，從而知其"餘項"，不論 x 爲何值，但求 A 充分大，必可任意小，是即此積分勻斂之謂．由其勻斂性，可以推斷其所斂函數必爲連續

［例四］　觀例三，知

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy$$

在 $x \geqq 0$ 時爲一連續函數．由是求導數，得

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,dy.$$

此積分在 $x \geqq \delta > 0$ 時亦必勻斂，蓋由

$$\int_A^{\infty}\left|e^{-xy}\sin y\right|dy \leqq \int_A^{\infty} e^{-xy}dy = \frac{e^{-Ax}}{x} \leqq \frac{e^{-A\delta}}{\delta},$$

令 $a \to \infty$ 而可以識之．因此之故，當 $x \geqq \delta > 0$ 必有

$$F'(x) = -\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,dy.$$

此積分用部分積分法可知其爲

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

由是得
$$F(x) = \operatorname{arc}\cot x + C,$$

其中 C 自爲一積分常數．惟因

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy\right| \leqq \int_0^{\infty} e^{-xy}dy = \left.\frac{e^{-xy}}{x}\right|_{\infty}^{0} = \frac{1}{x},$$

在 $x \geqq \delta$ 時之成立，可以斷定 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$．於是由 $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc}\cot x = 0$ 可以知 C 必爲零．故

$$F(x) = \operatorname{arc}\cot x.$$

然後據 $F(x)$ 在 $x \geqq 0$ 時之連續性，得知

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy.$$

因 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc}\cot x = \dfrac{\pi}{2}$，遂得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

［例五］ 據上述，廣義積分之均勻收斂性為顛倒積分次序之充分條件。若其斂不均，則其事未必可行，觀於下例，即可概見。如令 $f(x,y)=(2-xy)xye^{-xy}$。則因

$$f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy})$$

之故，可知

$$\int_0^\infty f(x,y)dy$$

對於 $0\leqq x\leqq 1$ 中任何 x 皆能存在，其實不論任何 x，其值皆為零。故

$$\int_0^1 dx\int_0^\infty f(x,y)dy=0.$$

復因

$$f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy}),$$

在 $y\geqq 0$ 時乃有

$$\int_0^1 f(x,y)dx=ye^{-y},$$

故

$$\int_0^\infty dy\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^\infty ye^{-y}dy=\int_0^\infty e^{-y}dy=1,$$

於是可見

$$\int_0^1 dx\int_0^\infty f(x,y)dy\neq\int_0^\infty dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$

A4.3.4. Fresnel 之積分

研究光學現象時，常見有下列兩積分：

$$F_1=\int_{-\infty}^\infty \sin(\tau^2)d\tau,\quad F_2=\int_{-\infty}^\infty \cos(\tau^2)d\tau,$$

世常以 Fresnel 積分稱之。如應用 $\tau^2=t$，此積分可轉換為

$$F_1=\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\qquad F_2=\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

然後用下列關係

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2t}dx$$

（此關係之真確，由 $x=\frac{\tau}{\sqrt{t}}$ 替代而可以證之）並互易積分次序，得

$$F_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2t}\sin t\,dt,\qquad F_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2t}\cos t\,dt$$

其中對 t 之積分可用部分積分法求得之. 於是 F_1 及 F_2 即歸於初等有理函數之積分,如

$$F_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx,\qquad F_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

而 F_2 又可用 $x'=\frac{1}{x}$ 歸於 F_1, 皆得由初等函數表達之,從而得其值爲

$$F_1=F_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

讀者可自徵實之.

例 題

1.試求
$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx.$$

2.試規定 a,b,c, 使

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dx\,dy=1.$$

3.求(a)
$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}(Ax^2+2Bxy+Cy^2)dx\,dy.$$

(b)
$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}(ax^2+2bxy+cy^2)dx\,dy.$$

$$(a>0,\qquad ac-b^2>0).$$

4.求下列各積分:

(a)
$$K(a)=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos x\,dx.$$

(b)
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos x\,dx.$$

(c)
$$I(a)=\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx.$$

(d)
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)J_0(bx)}{x}dx, \text{ 其中 } J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

即所謂 Bessel 函數.

*5.試證
$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 ax}{x}dx$$

當 n 趨大時之數量級爲 $\log n$, 並證

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax-\sin^2 bx}{x}dx=\frac{1}{2}\log\frac{a}{b}.$$

6.試將"$\int_0^\infty f(x,y)dy$ 不能均斂"一語代以其他詞句,不含"均斂"兩字者.

第四節 論 Fourier 積分

A4.4.1. 以旁義積分表達函數

本節擬舉 Fourier 積分定理爲例,以見上述理論之應用. 前在上卷第九章中,知任何週期函數若按段光滑,必可展開爲一三角函數所組成之斂級數. 茲廣其意,將一任意函數 $f(x)$ 之變程伸展至無窮遠: $-\infty<x<\infty$,於是無復週期性可言,然後求其由三角函數之旁義積分表而達之.就其事之企圖而論,頗覺自然近理,惟如何可能,爲一極費研討之問題.

請先對於 $f(x)$ 之假設詳細說明如次:

(1) $f(x)$爲一按段光滑之函數,換言之,$f(x)$ 及其初重導數除可能作有盡次跳躍外,在任何有限變程中皆爲連續.

(2)下列積分
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=C$$
爲收斂.

(3) $f(x)$ 在其間斷點 x 之值設爲
$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

於是 $f(x)$ 之滿足上述條件者可由下列積分
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\tau(t-x)dt$$
表而出之.是卽所謂 Fourier 之積分定理. 如應用複數,此積分可寫如
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\tau(t-x)}dt.$$

細玩此定理之內容,復可有如下之說明.苟有
$$g(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\tau}dt,$$
則
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{ix\tau}d\tau$$

隨之而立.此兩式富有對稱之美,其中任何一式爲其他一式所以成立之條件.若更採用一新變數 $\rho=\frac{\tau}{2\pi}$,然後復以 τ 代 ρ,則此兩式可寫成極簡潔美觀之形式,如

$$h(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi i\tau t}dt,\quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{2\pi itx}dt,$$

其中

$$h(\tau)=\sqrt{2\pi}\,g(2\pi\tau).$$

在尚未證明此定理之前,擬先舉例以明之.

[例一] 若 $f(x)$ 爲一偶函數,即滿足 $f(x)=f(-x)$ 者,則因

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\tau(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\tau x\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\tau t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\tau x\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\tau t\,dt$$

之故,將由

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\tau x\,d\tau\int_0^{\infty}f(t)\cos\tau t\,dt$$

表達之.若 $f(x)$ 爲一奇函數(即滿足 $f(x)=-f(-x)$)者,則有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\tau x\,d\tau\int_0^{\infty}f(t)\sin\tau t\,dt.$$

[例二] 設

$$f(x)=1\qquad 當\qquad 0\leqq x<1;$$

$$f(x)=\frac{1}{2},\qquad 當\qquad x=1;$$

$$f(x)=0,\qquad 當\qquad x>1;$$

是必爲一偶函數.於是

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\tau x\,d\tau\int_0^{\infty}\cos\tau t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\tau\cos\tau x}{\tau}d\tau.$$

此積分常稱之爲 Dirichlet 之間斷因子,在應用上頗見重要.

[例三] 假定 k 爲一正數,設 $x>0$ 時有一函數如 $f(x)=e^{-kx}$,當 $x<0$ 時據 $f(x)=f(-x)$ 而展拓之,則

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\tau x\,d\tau\int_0^{\infty}e^{-kt}\cos\tau t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k\cos\tau x}{k^2+\tau^2}d\tau.$$

若依奇函數之條件而展拓於 $x<0$,(即 $f(x)=-f(-x)$),則

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\tau x\,d\tau\int_0^\infty e^{-kt}\sin\tau t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tau\sin\tau x}{k^2+\tau^2}d\tau.$$

因之遂有下列兩積分公式：

$$\int_0^\infty\frac{\cos\tau x}{k^2+\tau^2}d\tau=\frac{\pi}{2}\frac{e^{-kx}}{k},\qquad \int_0^\infty\frac{\tau\sin\tau x}{k^2+\tau^2}d\tau=\frac{\pi}{2}e^{-kx},\ (k>0).$$

（例四）　設 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，則因

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\tau t\,dt=e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

之故，$g(\tau)$與 $f(x)$ 兩式將完全相同，讀者可自證之.

A4.4.2.　Fourier 積分定理之證明

欲證 Fourier 之積分定理，以引用下列關係爲最便：

$$\pi f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt,$$

是謂 Dirichlet 之極限式，不論 a 爲任何正數皆有效．此極限式爲上卷 9.4.1 所論一輔定理之必然結果．其言曰，苟 $s(t)$ 在 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ 中爲任何按段連續之函數，則

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\alpha^\beta\sin(\lambda t)s(t)\,dt=0$$

試先觀由 0 至 a 一段變程 $0\leqq x\leqq a$，以下列函數作爲 $s(t)$，代入此式：

$$s(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t},$$

此函數既按段連續，且在 $t\to 0$ 時趨於 $f'(x+0)$，自滿足輔定理中對於 $s(t)$ 所假設之條件，因之

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a f(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a f(x+0)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}f(x+0)\int_0^{a\lambda}\frac{\sin\sigma}{\sigma}d\sigma=f(x+0)\int_0^\infty\frac{\sin\sigma}{\sigma}d\sigma=\frac{\pi}{2}f(x+0).$$

然後據同理以觀 $-a\leqq x\leqq 0$ 一段變程，將結果合併之，卽得欲證之 Dirichlet 極限式如下：

$$\pi f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt.$$

細考此式之意義,若將其中$\frac{\sin(\lambda t)}{t}$代以

$$\frac{\sin(\lambda t)}{t}=\int_0^{\lambda}\cos(t\tau)d\tau,$$

復應用下列縮寫

$$\int_{-a}^{a} f(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt=\int_{-a}^{a} f(x+t)dt\int_0^{\lambda}\cos(t\tau)d\tau$$

$$=\int_0^{\lambda}d\tau\int_{-a}^{a} f(x+t)\cos(t\tau)dt=F(\lambda,a),$$

無異謂　$$\pi f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda,a).$$

又因此極限之存在與 a 無關,故 Dirichlet 之極限式可寫成

$$\pi f(x)=\lim_{a\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda,a)$$

此式中求索極限之次序如可顚倒,即先令 $a\to\infty$,然後令 $\lambda\to\infty$,則其結果將為

$$\pi f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\cos(t\tau)dt$$

$$=\int_0^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\cos(t\tau)dt.$$

此即為 Fourier 之積分定理,蓋令 $x+t=t'$,復以 t 代 t',即得

$$\pi f(x)=\int_0^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\tau(t-x)dt,$$

是即欲證之理.因此之故,但證

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda,a)=\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{a\to\infty}F(\lambda,a),$$

或證　$$\lim_{a\to\infty}F(\lambda,a)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt,$$

不論 λ 為何如,必有勻歛性即可.欲證此,當假定 ϵ 為任意指定之正數,從而求得一 A,與 λ 無關者,但求 a,b 皆大於 A,皆足致

$$|F(\lambda,a)-F(\lambda,b)|<\epsilon.$$

惟考
$$\left|F(\lambda,a)-F(\lambda,b)\right| \leqq \int_a^b |f(x+t)|\frac{|\sin(\lambda t)|}{t}dt + \int_{-b}^{-a} |f(x+t)|\frac{|\sin(\lambda t)|}{t}dt,$$

因之
$$\left|F(\lambda,a)-F(\lambda,b)\right| \leqq \frac{2}{A}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt.$$

復據假設(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = C,$$

故
$$\left|F(\lambda,a)-F(\lambda,b)\right| < \frac{2C}{A}.$$

於是取 $A=\frac{2C}{\epsilon}$,則欲證之勻歛性,隨之而 Fourier 之積分定理均得證矣.

第五節　論 Γ 函數

A4.5.1.　Γ 函數定義及其方程式

如何用旁義積分以表達函數,觀於上述已可略見端倪．要之,新函數之創造,於此又得一新蹊徑,其最著者有所謂 Γ 函數．$\Gamma(x)$ 函數之定義爲

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

其中 x 之變程假定爲 $x>0$．前在上卷 4.7.3,曾就 x 爲正整數之情形下研討其特性．根據前所應用之審歛法,自可斷定此積分在 $x>0$ 時之收歛,且其歛在正横軸上任何不含 $x=0$ 之閉程中均有勻性．因此之故,$\Gamma(x)$ 在 $x>0$ 時爲一連續函數．

所當注意者,此規定$\Gamma(x)$之積分得以他種形式出之．如改用 $t=u^2$,此積分可轉換於

$$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du.$$

故時常遇見之
$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{\alpha} du, \quad (\alpha>-1)$$

得由 $\Gamma(x)$ 轉達

$$\int_0^\infty e^{-u^2}u^\alpha\,du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right),$$

前在 A4.2.3 已見及之矣

據上卷 4.7.3 所述，應用部分積分法，可知 Γ 函數必滿足

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

其中 $x>0$. 是爲一函數方程式，常稱之爲 $\Gamma(x)$ 之函數方程式. 惟不可不注意者，$\Gamma(x)$不能由此方程式完全規定. 蓋設有一週期函數 $p(x)$，其週期爲 1 者，則 $\Gamma(x)$ 乘 $p(x)$ 之結果亦必滿足此方程式無疑. 倒言之，凡函數之有此種形式者，卽

$$u(x)=\Gamma(x)p(x),$$

其中 $$p(x+1)=p(x)$$

必包羅此函數方程式所有一切解. 何則，如 $u(x)$ 果爲其解，則因 $\Gamma(x)\neq 0$ 之故，可知

$$f(x)=\frac{u(x)}{\Gamma(x)},$$

必滿足 $$f(x+1)=f(x),$$

是卽欲證之理.

欲研討 $\Gamma(x)$，不如研討其對數，卽 $u(x)=\log\Gamma(x)$ 爲便；因 $\Gamma(x)$ 在 $x>0$ 時爲正，$\Gamma(x)>0$，故 $u(x)=\log\Gamma(x)$ 自必確定且必滿足

$$u(x+1)-u(x)=\log x,$$

是爲一差分方程式. 此方程式旣爲 $\log\Gamma(x)$ 所滿足，故 $\log\Gamma(x)$ 爲其一特解，至其普解則爲 $\log\Gamma(x)$ 加一任意週期函數，週期爲 1 者. 因此之故，如欲以此差分方程式規定 $\log\Gamma(x)$，必附有條件而後可. 茲擬就一種極淺顯之附加條件而討論之. 吾人將從事證明如下定理，世常稱之爲 Bohr 定理.

任何凸函數之滿足下列差分方程式者

$$u(x+1)-u(x)=\log x,$$

在 $0<x<\infty$ 變程中，除可能須加一常數，不必深論外，必為 $\log\Gamma(x)$.

A4.5.2. 凸函數之特性及 Bohr 定理之證明

設 α 及 β 為任何兩正數，其和為 1 者：$\alpha+\beta=1$，又 x_1 及 x_2 為 $a\leqq x\leqq b$ 變程中任何兩點，若

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)$$

始終為正或始終為負者，則 $f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中為一凸函數．由其幾何意義言之，連接曲線 $y=f(x)$ 上任何兩點之弦苟始終在其弧之上或始終在其弧之下，則 $y=f(x)$ 謂有凸性(見圖 4.19)．

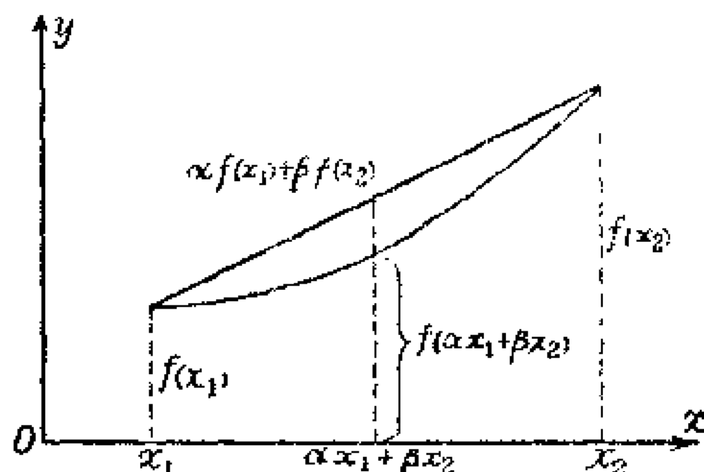


圖 4.19

據此定義，可以推凸函數之特性．吾人之討論，不妨限於"向下凸"之函數卽

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\geqq 0,$$

其"向上凸"者可由是乘 -1 而得之，故可置而不論．

如假定凸函數 $f(x)$ 之二重導數均為連續，則其定義中之不等式

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)$$

可寫成一重積分，如

$$\beta(x_2-x_1)^2\int_0^1 dt\int_{\beta t}^{t} f''[x_1+(x_2-x_1)\tau]d\tau,$$

讀者可自微驗之．惟如是，此不等式在

$$f''(x)\geqq 0$$

條件下必能成立之不等式.惟若,如假定不等式之成立,然後令 $x_2 \to x_1$,可見 $f''(x) \geqq 0$ 亦為其成立之必要條件.故就凸函數之二重連續可導者言之,此實為其特性之一.

雖然,吾人不欲假定凸函數之連續,更不欲假定其可導.其最堪注意之事,為凸函數之連續性可由其凸性推論而得之.欲明此,擬先將定義中之不等式代以如下較寬之條件.設 x 及 h 為任何兩數,但求 $x \pm h$ 處於規定變程之內,凡有涯函數 $f(x)$ 之滿足

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqq 0$$

者,謂之凸函數;由其幾何意義言之,試任意作 $y=f(x)$ 之一弦,苟弦之中心在曲線之上或在曲線之下者,其曲線謂有凸性.然後據此以證下列定理:$f(x)$ 之值如有涯而又滿足

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqq 0$$

者必為連續函數.欲證此,可先將此條件寫如

$$f(x)-f(x-h) \leqq f(x+h)-f(x),$$

由是可以推得下列諸不等式

$$f(x-\nu h)-f(x-(\nu+1)h) \leqq f(x+h)-f(x)$$

$$\leqq f(x+(\nu+1)h)-f(x+\nu h),$$

在 $\nu \geqq 0$ 時均有效.令其中 $\nu=1, 2, \cdots, n-1$,將各式一一相加,得

$$\frac{f(x)-f(x-nh)}{n} \leqq f(x+h)-f(x) \leqq \frac{f(x+nh)-f(x)}{n}.$$

因此之故,在 $|f(x)| \leqq C$ 假定之下,必有

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \frac{2C}{n}.$$

式中 n 為任何正整數,惟 $x \pm nh$ 必皆規定變程之內而已.於是令 h 趨零,即可能最大之 n 無限制趨大,則 $|f(x+h)-f(x)|$ 必隨之而趨零,是即所謂 $f(x)$ 之連續性.

據 $f(x)$ 之連續性可以推知

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2) \geqq 0$$

之成立，是卽前之所謂凸性.[illegible]

$$f(x)-f(x-nh)\leqq n[f(x+h)-f(x)].$$

應用 $\xi=x-nh$ 轉換，得

$$\frac{f(\xi+nh)-f(\xi)}{n}\leqq\frac{f(\xi+(n+1)h)-f(\xi)}{n+1};$$

試推廣其意，則

$$\frac{f(\xi+mh)-f(\xi)}{m}\leqq\frac{f(\xi+nh)-f(\xi)}{n},\quad 0<m\leqq n.$$

復令 $\xi+nh=\xi_1$，得由是而知

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)f(\xi)+\frac{m}{n}f(\xi_1)\geqq f\left(\left(1-\frac{m}{n}\right)\xi+\frac{m}{n}\xi_1\right).$$

是卽 α 及 β 爲有理數時表達凸性之條件. 於是其在 α 及 β 爲任何數時之眞確，可由 $f(x)$ 之連續性①而推知之.

最後所欲附述者，凸函數定義中之不等式亦可寫如

$$f(x+h)+f(x-h)-[f(x+\delta)+f(x-\delta)]\geqq 0,$$

式中 δ 及 h 爲兩正數，而 δ 又不大於 h 者，$\delta\leqq h$. 此式之幾何意義，至爲顯然. 欲證之，但將下列兩關係

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta}{h}\right)f(x-h)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\delta}{h}\right)f(x+h)-f(x-\delta)\geqq 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\delta}{h}\right)f(x-h)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta}{h}\right)f(x+h)-f(x+\delta)\geqq 0$$

相加卽可.

說明何謂凸函數. 吾人不難證明 [illegible] 爲一凸函數，更進而推

---

①設 a,b,c 爲任何三數，[illegible]

$$\frac{f(x+c)-f(x)}{c}\leqq[illegible]$$

爲凸函數定義之必然結論，由此知

[illegible]

爲有界而又單調，故[illegible]爲連續數，凸函數在任何一點之左右兩導數皆存在.

論上述之 Bohr 定理。考 $\Gamma(x)$ 可寫如

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x+h}{2}-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-h}{2}-\frac{1}{2}}dt,$$

其中 h 爲任何正數，而 x 大於 h 者。據是應用 Schwarz 不等式，可知

$$\Gamma^2(x)\leqq\Gamma(x+h)\cdot\Gamma(x-h),$$

從而得知①

$$\log\Gamma(x+h)+\log\Gamma(x-h)-2\log\Gamma(x)\geqq0,$$

故 $\log\Gamma(x)$ 之凸性，可以見矣。

論至此，可以證明 Bohr 定理。設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 爲兩連續之凸函數，滿足

$$u(x+1)-u(x)=\log x$$

者，則其差

$$\varphi(x)=f(x)-g(x)$$

爲一連續之週期函數，其週期爲 1。因 $f(x)$ 爲上列函數方程式之解，故

$$f(x+1)-f(x)=\log x$$

及

$$f(x)-f(x-1)=\log(x-1)$$

之成立，自無疑義。由是可知 $f(x)$ 必滿足

$$f(x+1)+f(x-1)-2f(x)=\log\frac{x}{x-1}.$$

復因 $f(x)$ 爲凸函數之故，據上列不等式知有

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\leqq\log\frac{x}{x-1},$$

式中 h 假定限於 $0<h\leqq1$。據同理，可知

---

①於此尙有一普遍定理。若 $f_\nu(x),\nu=1,2,3,\cdots\cdots,n$ 滿足

$$f_\nu(x)\geqq0 \quad 及 \quad [f_\nu(x)]^2\leqq f_\nu(x-h)f_\nu(x+h),$$

隨之而 $\log f_\nu(x)$ 爲凸函數，則 $\sum_1^n f_\nu(x)$ 亦必滿足上列條件。試將 $\sum f_\nu(x)$ 寫如

$$\sum_1^n f_\nu(x)=\sum_1^n\frac{f_\nu(x)}{\sqrt{f_\nu(x-h)}\sqrt{f_\nu(x+h)}}\sqrt{f_\nu(x-h)}\sqrt{f_\nu(x+h)},$$

復應用 $\frac{f_\nu(x)}{\sqrt{f_\nu(x-h)}\sqrt{f_\nu(x+h)}}\leqq1$，必有 $\left(\sum_1^n f_\nu(x)\right)^2\leqq\left(\sum_1^n\sqrt{f_\nu(x-h)}\sqrt{f_\nu(x+h)}\right)^2$，然後根據 Schwarz 不等式以知 $\left(\sum_1^n f_\nu(x)\right)^2\leqq\sum_1^n f_\nu(x-h)\sum_1^n f_\nu(x+h)$。Γ 函數卽有此種特性。

$$g(x+h)+g(x-h)-2g(x)\leqq \log\frac{x}{x-1};$$

於是　　$$|\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)|\leqq 2\log\frac{x}{x-1}.$$

然後令 x 無限制趨大，則 $\log\frac{x}{x-1}\to 0$，隨之而

$$\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)$$

將趨於零. 復因此函數有週期性，故在 $x>0$ 時必有

$$\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)=0$$

成立. 一連續之週期函數若不論 h 爲任何正數，x 爲任何大於 h 之數時皆滿足此關係者必爲一常數. 於是 Bohr 定理已得證矣.

A4.5.3.　Γ 函數之無盡乘積

昔 Gauss 及 Weierstrass 研討 $\Gamma(x)$ 函數，曾將此展開爲無盡乘積. 此與上述結果之關係，不可不詳考之. 吾人擬先證下列關係:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x),$$

其中 $G_n(x)$ 爲

$$G_n(x)=\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x.$$

此事細考之殊覺近眞，蓋令 $x=\nu$，則 $G_n(\nu)$ 將爲

$$G_n(\nu)=(\nu-1)!\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n}{n+\nu-1},$$

在 n 趨大時將趨於 $(\nu-1)!$，是爲 $\Gamma(x)$ 固有特性之一. 惟吾人在此必須證明 $G_n(x)$，將 $x=0,-1,-2,-3,\cdots$ 諸點除外後，必勻斂於一函數 $G(x)$，且證明此函數在 $x>0$ 時與 $\Gamma(x)$ 完全相同. 欲證此，但證 $\log G(x)$ 爲下列差分方程式

$$u(x+1)-u(x)=\log x$$

之解，然後據 Bohr 定理證 $\log G(x)$ 爲一凸函數可矣.

欲證 $G_n(x)$ 之勻斂，假定 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$，可應用下列表達任何 n 之方式

$$n=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

將 $G_n(x)$ 寫如

$$G_n(x)=\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}}.$$

據上卷第八章附錄第四節所述，欲證此無盡乘積為勻斂及絕對收斂，但證下列級數之勻斂

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}}-1\right|$$

已足．將此級數依 Taylor 式展開為 $\frac{1}{\nu}$ 之冪級數，其普遍項可寫如

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x-\left(1+\frac{x}{\nu}\right)}{1+\frac{x}{\nu}}=\frac{1}{2\nu^2}\,\frac{x(x-1)\left(1+\frac{\theta}{\nu}\right)^{x-2}}{1+\frac{x}{\nu}},$$

其中 θ 為介於 0 及 1 之間之一數．由是遂得

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x-\left(1+\frac{x}{\nu}\right)}{1+\frac{x}{\nu}}\right|<\frac{C}{\nu^2},$$

其中 C 為一與 ν 無關之常數．在任何不含 $x=-1,-2,\cdots\cdots$ 之閉程中，可將 C 代以一數，與 x 亦無關者．故在此種閉程中，此級數必勻斂，因之上列之無盡乘積亦必勻斂．勻斂既證之後，其所斂極限

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n-1)}n^x$$

當 x 為任何不等於 $x\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots\cdots$ 時必為一連續函數，其必滿足

$$G(x+1)=xG(x),$$

自顯而易見．

繼此所欲證者，為 $G(x)$ 在 $x>1$ 時與 $\Gamma(x)$ 完全相同．試就 $x>1$

時觀 $\log G(x)$，此爲下列數序之極限

$$\log G_n(x) = \log(n-1)! + x\log n - \sum_{\nu=0}^{n-1}\log(x+\nu).$$

由是即可證 $\log G_n(x)$ 對於任何 n 及任何大於 0 之 x，必爲凸函數，蓋由

$$\log G_n(x+h) + \log G_n(x-h) - 2\log G_n(x)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}[2\log(x+\nu) - \log(x+h+\nu) - \log(x-h+\nu)] \geqq 0$$

而可以識之．至 $\log G(x)$ 自亦必滿足此條件．復因

$$\log G(1) = 0 = \log\Gamma(1)$$

之故，可知 $G(x)$ 卽爲 $\Gamma(x)$ 無疑．於是 Gauss 定理，謂 $\Gamma(x)$ 可展開爲無盡乘積

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x = \frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}},$$

已得證矣．

Gauss 之展開式所以特別重要者，其故乃由於此無盡乘積可作爲 $\Gamma(x)$ 之定義，如是則 x 之變程，不必限於 $x>0$．卽 x 爲負而非整數時，其值亦得以確定．復次，$\Gamma(x)$ 之無盡乘積得以他種形式出之．如令

$$n^x = e^{x\log n}$$

中之 $\log n$ 代以

$$\log n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma + \epsilon_n,$$

其中 γ 爲 Euler 常數(參閱上卷 284 頁)，又 ϵ_n 隨 $n\to\infty$ 而趨零者，則吾人可爲 $\frac{1}{\Gamma(x)}$ 求得一展開式．如

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\lim(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots$$
$$\left(1+\frac{x}{n-1}\right)e^{-x-\frac{x}{2}-\cdots-\frac{x}{n}+\gamma x-\epsilon_n x}$$

$$= xe^{\gamma x}\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}$$

因 $e^{-\epsilon_n x - \frac{x}{n}}$ 當 $x\to\infty$ 趨於零，故此無盡乘積亦必收歛，從而得

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}.$$

是為$\frac{1}{(\Gamma)x}$之展開式，世常以 Weierstrass 之無盡乘積稱之．由此可以見$\frac{1}{\Gamma(x)}$在 $x=0,-1,-2,\cdots\cdots$ 各有初重零點(參閱上卷 247 頁).

A4.5.4. 論 $\log\Gamma(x)$ 及其導數

既證 Weierstrass 之無盡乘積:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}},$$

從而求其 $\log\Gamma(x)$，則得

$$\log\Gamma(x) = -\log x - \gamma x - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)-\frac{x}{\nu}\right].$$

惟因
$$\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)-\frac{x}{\nu} = -\frac{1}{\nu}\int_0^x\frac{t\,dt}{\nu+t},$$

可知
$$\left|\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)-\frac{x}{\nu}\right| \leqq \frac{1}{\nu^2}\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2\nu^2},$$

故 $\log\Gamma(x)$ 之級數中，以$\frac{x^2}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$為最主要部分．因此之故，在正橫軸上任何閉程中，其必絕對而勻收斂，可以識矣．

更進而求 $\log\Gamma(x)$ 之導數，其事亦不難．將 $\log\Gamma(x)$ 逐項求導，因

$$\frac{1}{x+\nu}-\frac{1}{\nu} = -\frac{x}{\nu(x+\nu)},$$

在正橫軸上任何閉程中皆絕對而又勻收斂，遂得

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = -\frac{1}{x}-\gamma-\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+\nu}-\frac{1}{\nu}\right).$$

若再逐項求導，則有

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2},$$

由是可求其高重導數如

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{d^m}{dx^m}\log\Gamma(x)\quad(m\geqq 2).$$

故 $\log\Gamma(x)$ 之導數與級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^m}$ 有如是密切之關係，彼此乃可互相表達也.

A4.5.5. $\Gamma(x)$ 之延拓

$\Gamma(x)$ 當 x 為負數時之值，可由其 x 為正數時之值推知之. 試求 $\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x)$，是乃

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)}n^{-x},$$

將兩者合併，則

$$\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\frac{1}{x^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

惟據上卷 338 頁既有

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right),$$

故

$$\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\frac{\pi}{x\sin\pi x}.$$

因此之故，遂得

$$\Gamma(-x)=-\frac{\pi}{x\sin\pi x}\cdot\frac{1}{\Gamma(x)},$$

於是 $\Gamma(-x)$ 得由 $\Gamma(x)$ 以知之.

由是試求 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ 之值，可將此關係化簡. 因

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x),$$

遂得

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=-x\Gamma(x)\Gamma(-x);$$

於是

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

是即所謂 $\Gamma(x)$ 之延拓定理.

若令其中 $x=\frac{1}{2}$，則 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. 惟 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}du$，故

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

於此又得一新證. 復次,若令 $x=n+\frac{1}{2}$, n 爲任何正整數,則有

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

A4.5.6. 論 Beta 函數

以旁義積分之含輔變數者創造新函數,除上述 $\Gamma(x)$ 外,又有所謂 Euler 之 Beta 函數,其定義爲

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

此在 x 或 y 小於 1 時自爲旁義積分.惟據前述之審斂法,若將 x 及 y 兩輔變數之變限於 $x\geqq\epsilon$ 及 $y\geqq\eta$, ϵ 及 η 爲兩任意正數, 其勻斂可無疑義.因此之故,在 x 及 y 爲正數之變區中,此函數實爲連續.

Beta 函數之定義,得以他種形式出之.如改用 $t=\tau+\frac{1}{2}$, 此勻斂積分可轉換於

$$B(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\tau\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^{y-1}d\tau,$$

復令 $\tau=\frac{t}{2s}$,假定 $s>0$, 此可歸於

$$(2s)^{x+y-1}B(x,y)=\int_{-s}^{s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}dt.$$

或於最初定義中,令 $t=\sin^2\phi$, 則所謂 Beta 函數,可謂

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\phi\cos^{2y-1}\phi\,d\phi.$$

定義既明, 吾人擬從事研討 Beta 函數與 Gamma 函數間之關係, 使前者由後者轉達之.若將

$$(2s)^{x+y-1}B(x,y)=\int_{-s}^{s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}dt$$

之兩方乘以 e^{-2s}，對 s 求積，自 0 至 A，則

$$B(x,y)\int_0^A e^{-2s}(2s)^{x+y-1}ds$$

$$=\int_0^A e^{-2s}\,ds\int_{-s}^{s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}\,dt.$$

列於右方之重積分可視為 $e^{-2s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}$ 之積分，其積分變區為一二等邊三角形，其邊為

$$s\pm t=0\quad 及\quad s=A,$$

應用 σ 及 τ 作新變數：

$$\sigma=s+t,$$

$$\tau=s-t,$$

此重積將轉換於

$$\frac{1}{2}\iint_R e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}d\sigma\,d\tau.$$

其積分變區為 $\sigma\tau$ 平面中之三角形，由 $\sigma=0$，$\tau=0$ 及 $\sigma+\tau=2A$ 所圍而成者．明乎是，若令 A 無限制趨大，則前式之左方將趨於

$$\frac{1}{2}B(x,y)\Gamma(x+y).$$

而式之右方亦必收斂，其積分變區為 $\sigma\tau$ 平面中之整個第一象限，由二等邊三角形所逐漸接近者．因被積之函數在此變區中為正，而其積分對於獨行趨大之變區皆為收斂，故不論其變區形狀如何及如何趨大，其極限必存在，前在本卷 4.5.5 已詳論之矣．因此之故，吾人可取平方形作變區，其邊為 A 者，然後令 $A\to\infty$，於是

$$B(x,y)\Gamma(x+y)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\int_0^A e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}d\sigma\,d\tau$$

$$=\int_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{x-1}d\sigma\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{y-1}d\tau.$$

由是遂得一重要關係

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\text{①}$$

是卽吾人所欲求者.由此關係,可見 Beta 函數之與兩項係數 $\binom{n+m}{n}=\frac{(n+m)!}{n!m!}$,與 $\Gamma(x)$ 之與 $n!$,其關係相似,蓋令 $x=n$, $y=m$,

則
$$\frac{1}{(x+y+1)B(x+1,y+1)}$$

之値將爲 $\binom{n+m}{n}$.

最後所欲附述者,下列兩積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\ dt \qquad 及 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha t\ dt,$$

卽
$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

可由 Γ 函數如下表達之

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha t\ dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

讀者可自驗之,不必贅述.

例 題

1.若有一多面體,爲平面 $x=0$, $y=0$, $z=h$, 及

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=\frac{z}{c}\quad(m>0)$$

所圍而成者.証其體積爲

---

①此關係亦可據 Bohr 定理以推知之.吾人可先證 $B(x,y)$ 滿足

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y).$$

如是則 $u(x,y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$, 若視作 x 之函數, 必滿足 $u(x+1)=x\,u(x)$. 於是據前述之理, $\log u(x,y)$ 爲 x 之凸函數,因之

$$\Gamma(x+y)B(x,y)=\Gamma(x)a(y),$$

然後令 $x=1$, 則 $a(y)=\Gamma(y)$, 是卽欲證之理.

$$ab\left(\frac{a}{b}\right)^{[illegible]}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

2.設 $\iiint f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+[illegible]\right)$ [illegible] $dx\,dy\,dz$,

其中 x,y,z 之變，限於 $\frac{x^2}{a^2}+$ [illegible] 之第一卦分，則

$$\frac{a^{[illegible]}b^{[illegible]}c^{[illegible]}}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{[illegible]}{2}\right)\Gamma\left(\frac{[illegible]}{2}\right)\Gamma\left(\frac{[illegible]}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{[illegible]}{2}\right)}\int [illegible]\, d\xi$$

(提示:應用新變數 ξ,η,ζ 如

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{[illegible]}{b^2}+[illegible]=\xi,\quad [illegible]$$

$$[illegible]\quad [illegible]$$

$$[illegible]$$

然後對 η 及 ξ 求積分.)

3.設有 $\left(\frac{x}{a}\right)^{[illegible]}+\left(\frac{y}{b}\right)^{[illegible]}+\left(\frac{z}{c}\right)^{[illegible]}\leqq 1$, [illegible] $\geqq$ [illegible] $\geqq 0$,

求其質量中心之 x 坐標.

4.考下列曲線 [illegible]

所圍之面積,求其對 x 軸之轉動慣量.

5.試證 $2^{2x}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x)}=2\sqrt{\pi}$.

第六節 Abel之積分方程式

既明 Γ 函數之義,則下列積分

$$F(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

之研討,又得一新蹊徑.此積分爲輔變數 x 之函數,在本卷4.1.2已論及之.因 $F(x)$ 及其導數直至 $n-1$ 重皆在 $x=0$ 等於零,而其 n 重導數爲

$f(x)$，故以 D 表求導，D^n 表 n 重求導，則

$$D^n F(x) = f(x)$$

之眞確，自顯而易明．今以 D^{-1} 表 D 之相逆法，卽 $\int_0^x \cdots\cdots dx$，則此理亦可表之如下：

$$F(x) = D^{-n} f(x)$$

茲欲爲 $D^{-\lambda}$ 立一普遍定義，卽 λ 不爲正整數時亦可應用．所謂 $D^{-\lambda}$ 施行於 $f(x)$，其義爲

$$D^{-\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} f(t) dt.$$

此定義旣立，則 n 重求導可推廣於 μ 重求導．假定 μ 爲任何正數(不必爲整數，但不可爲負數)均無不可．試以 m 表最小整數大於 μ 者，卽 $\mu = m - \rho$，$0 < \rho < 1$，則其定義爲

$$D^\mu f(x) = D^m D^{-\rho} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt;$$

將其中求積與求導互易先後，則所謂 $D^\mu f(x)$，其義爲

$$D^\mu f(x) = D^{-\rho} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f^m(t) dt.$$

如 α 及 β 爲任何實數時，

$$D^\alpha D^\beta f(x) = D^\beta D^\alpha f(x)$$

之證明，讀者可自求之．此種廣義之求導，在 $f(x)$ 相當高重之導數存在時自有其意義可言．要之，若 $f(x)$ 之導數直至並包括 m 重均連續者，則 $D^\mu f(x)$ 必能存在．

明乎上述之理，吾人可一論 Abel 之積分方程式．因 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$，可知 $D^{-\frac{1}{2}}$ 施行於 $f(x)$，必有

$$D^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \psi(x).$$

若假定式中 $\psi(x)$ 爲已知，欲求 $f(t)$ 以滿足此關係，是卽爲 Abel 之積分方程式．苟假定 $\psi(x)$ 連續可導，又在 $x=0$ 時等於零，則此積分方程式之解爲

$$f(x) = D^{\frac{1}{2}} \psi(x).$$

或
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\psi(t)}{\sqrt{x-t}}dt.$$

第七節 論曲面之面積定義

前論曲面之面積與論弧長之法殊有不同.論弧長時,以曲線之內切多邊形為出發點,求其極限以定之.惟為曲面立面積之定義時,吾人捨多面體而改用曲面之切面.欲窮其理,可先舉例以觀之.

試在 xyz 空間中觀一柱面,其方程式為 $x^2+y^2=1$, 豎立於兩平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之間.此柱面之面積自為 2π.試依如下之法作一多面體以內切之,其面為相等三角形:將圓周等分為 n 分,復在柱面上取 m 個等距之點如 $z=0,z=h,z=2h,\cdots\cdots,z=(m-1)h$,假定 $h=\frac{1}{m}$.當等分圓周時,假定其每一圓之分點適居於前一圓弧之中心之上.如是即得一多面體,其邊為圓之弦及直線之連接鄰圓之鄰近分點所成者.至此多面體之面則均為二等邊三角形,當 n 及 m 相當大時,此多面體自接近於柱面.惟令 n 固定,選擇 m 如是大,使每一三角形幾與 xy 平面平行,則欲望此種三角形相加之面積接近於柱面之面積,自不可得.考此每三角形之底自為 $2\sin\frac{\pi}{n}$,至其高據 Pythagoras 定理為

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

復因三角形之個數為 $2mn$,故此多面體之面積為

$$F_{n,m}=2mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$
$$=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

細考此 $F_{n,m}$, 當 n 固定, $m\to\infty$ 時, 將無限制趨大;若令 $n=m$ 而趨大,則歛於 2π.若更令 $m=n^2$,則 $F_{n,m}$ 將隨 n,m 之趨大而趨於 $2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}}$.故 $F_{n,m}$ 所趨之極限與 n,m 之趨大情形,不能獨立.惟 $F_{n,m}$ 有一最小聚點,且此最小聚點為 2π,則可由

$$F_{n,m} \geqq 2n \sin\frac{\pi}{n}$$

及

$$\lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n} = 2\pi$$

而識之.

據是以觀,設有一任何曲面及其各種內切多面體,則後者雖接近於前者,而後者之面積未必歛於前者之面積.所可證明者,內切多面體面積之極限(如有一極限)或其聚點,必大於或至少等於其所切曲面之面積.惟其證不得不從略.因此之故,吾人得以內切多面體面積之最小聚點作爲其所切曲面之面積而立一定義,此面積之特性常稱之爲半連續性[1],或向下半連續性[2].

(1) semi-continuity. (2) lower semi-continuity

第五章 線積分與面積分

欲研討積分,必先詳考其變數之變域爲何如.此在上章論重積分時固已見及之矣.惟變數之變化可能,不但一端.就兩個變數之情形言之,如在平面中作一光滑之迴合曲線,令 x, y 在其所圍區域中各自獨立變化,此爲一種可能;或於此區域中任意指定一光滑曲線,令 x 及 y 變化於其上,又爲一種可能.由前之說,即有上述重積分之義;由後之說,則有所謂曲線積分者.更就三個變數言之,可指定一曲線或一曲面,令 x, y, 及 z 變化於其上,於是有所謂線積分及面積分之說.本章中擬就各種可能積分建立精確之定義,從而探討其特性,並發見其間之關係.

第一節 線積分

吾人最初由面積問題引入積分概念,然後推廣於多維空間而得重積分之義.其實由物理學中之功量概念出發,亦可引用積分,如上卷 5.4.3 所論.更進而討論多維空間中之力場,則積分之說,將有其自然之發展,所謂線積分者[1],即隨之而起.

5.1.1. 定義

設在三維 xyz 空間中有一按段光滑之曲線 C, 其輔變數方程式爲

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

在此自必假定 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 爲連續函數,其初重導數爲按段連續.復假定 t 在 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ 變程中變化時,即得 C 之一線段,起於 P_0 點,訖於 P 點,P_0 與 P 之坐標分別以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及 $P(x,y,z)$ 表之.在任何包圍 C 之變區中,有一函數 $f(x,y,z)$ 處處連續,於是此函數沿 C 之值 $f(x(t),\, y(t),\, z(t))$ 自僅隨 t 而變.今欲爲此函數沿 C 之積分立一定義,自必將 C 起 P_0 訖 P 之一段分爲若干小段,其分點以 $P_0,P_1,P_2,\ldots\ldots,P_n(P_n=P)$ 表之,每兩分點 P_i 及 P_{i+1} 間橫坐標之

(1) line integral, curvilinear integral, Kurvenintegral

差為 Δx_i，從而組織

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\Delta x_i,$$

其中 t_i 為輔變數之一值，與分段之起 P_i 迄 P_{i+1} 中之一點相應者. 然後令分點無限制趨多，分段之最長者趨於零以觀其有無極限. 如果有一極限，**此極限即謂之 $f(x,y,z)$ 沿曲線 C 起 P_1 訖 P 之線積分而以**

$$\int_C f(x,y,z)dx$$

表之. 此極限之存在，且其存在與分點之選擇無關. 在 $f(x,y,z)$ 為連續函數之假定下，自不難證明之. 其證與前證普通簡積分之存在同. 若寫成如下形式：

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t_i,$$

其中 Δt_i 之意，乃自任何分點進至其次一分點時在 t 所引起之變量，則其極限之存在證明，更覺易易. 據普通積分概念，可知此實歛於

$$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt}dt;$$

從而得知

$$\int_C f(x,y,z)dx=\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\frac{dx}{dt}dt,$$

於是線積分竟由一普通積分(以輔變數 t 作積分變數)表而達之矣. 明乎是，可知普通積分實為線積分之一種特殊情形，其所沿而積之曲線即為橫軸之一段而已.

據同理，吾人可以立線積分之定義如下：

$$\int_C f(x,y,z)dy=\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\frac{dy}{dt}dt$$

及

$$\int_C f(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\frac{dz}{dt}dt.$$

循是以觀，**所謂線積分，必與其所沿而積之曲線 C 有不可離之關係**，C 定，而後沿 C 之線積分始定. 至於其表達形式為何如，輔變數之選擇為

何如,則殊非重要.如吾人可將 t,而以一連續可導之函數 $\phi(t)$ 引入一新輔變數 $\tau=\phi(t)$,但求在規定變程中有 $\frac{d\phi(t)}{dt}>0$ 關係成立,則原有變程 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ 將一一相應、轉換於 $\alpha_1\leqq\tau\leqq\beta_1$,隨之即有

$$\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\frac{dx}{dt}dt=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}f(x,y,z)\frac{dx}{d\tau}d\tau.$$

惟如是,吾人常設法應用一如是之輔變數,使線積分之形式異常簡明,藉便計算.

既明上述定義,吾人可將線積分出之以一比較普遍之形式.設 C 為一曲線,如上所假定.在任何包含 C 之域區中,有三個函數 $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ 處處連續.如是則下列三個線積分之和:

$$\int_C a(x,y,z)dx+\int_C b(x,y,z)dy+\int_C c(x,y,z)dz$$

亦為一線積分,沿 C 而積,可簡寫如

$$\int_C[a\,dx+b\,dy+c\,dz]=\int_\alpha^\beta\left[a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}\right]dt.$$

若以 a, b, c 視作一矢量 $\boldsymbol{A}$ 之 x,y 及 z 之矢量部分、$\boldsymbol{x}$ 為規定曲線上任何一點之矢量,如是 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ $\left(\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt},\ \dot{z}=\frac{dz}{dt}\right)$ 可視為 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 之矢量部分,而上列欲積之函數實為 $\boldsymbol{A}$ 及 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 兩矢量之標積,因之上列線積分可寫成

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}}\,dt=\int_C \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{x}.$$

以上論三維空間之線積分.至平面中之線積分,其理亦同.如

$$\int_C f(x,y)dx,\ \int_C f(x,y)dy,\ \int_C a\,dx+b\,dy$$

之意義,自可瞭然.進至 n 維空間,所謂線積分,亦有可論.設有 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 各為一輔變數 t 之函數,t 之變程為 $\alpha\leqq t\leqq\beta$,如是則此 n 個函數即為 n 維空間之一曲線 C.於是所謂 **n 維空間中之線積分**

$$\int_C f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)dx_1$$

即
$$\int_\alpha^\beta f(x_1(t),x_2(t),\cdots\cdots,x_n(t))\frac{dx_1}{dt}\,dt$$

之意．據同理，如有 n 個函數 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 隨 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 而變，則線積分可寫成下列普遍形式

$$\int_C a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots\cdots+a_ndx_n.$$

或寫成矢量形式如

$$\int_\alpha^\beta A\dot{x}\,dt=\int_C A\,dx.$$

式中 A 爲一矢量，其矢量部分爲 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$，而 x 則爲規定 $(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$之矢量．

前在上卷 5.3.2，曾論及一計算面積之法，可謂線積分之最初發見．設 xy 平面中有一按段光滑之閉合曲線 C，其方程式爲 $x=x(t)$，$y=y(t)$，則其所圍區域之面積 A 爲

$$A=-\int_\alpha^\beta y\dot{x}\,dt=\int_\alpha^\beta x\dot{y}\,dt=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt.$$

由今觀之，此實爲一線積分

$$A=-\int_C y\,dx=\int_C x\,dy=\frac{1}{2}\int_C(x\,dy-y\,dx),$$

隨輔變數 t 之增長作 C 之向旨而沿之以求積者．

沿一曲線 C 以求線積分，C 之向旨自與線積分之值有關．若一反 C 之向旨，即起訖點互易，改由 P 以達 P_0，則線積分之原值將因之而乘以 -1．其理甚顯，無待贅述．爲推理之便，吾人此後當假定C 爲一有向旨之曲線，並以 $-C$ 符號表一曲線，其向旨與 C 適相反者．復次，設 C 爲兩曲線 C_1 及 C_2 先後連接而成（以 $C=C_1+C_2$ 表達之），則

$$\int_C\cdots\cdots=\int_{C_1}\cdots\cdots+\int_{C_2}\cdots\cdots$$

之眞確，亦顯而易明．

研討線積分時，有一事最足注意．茲特就兩變數問題述其梗概．試觀

$$\int_C a\,dx+b\,dy$$

其中 a 及 b 為兩函數，在 R 中處處連續，R 為一變區，為一迴合曲線所圍而成．若將 R 任意分為若干分區 R_1, R_2, R_3, ……, R_n，每分區之邊界亦為光滑曲線，分別以 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ 表之，如是則沿 C 而積，其結果等於沿每分區之邊界而積（循同一方向），然後一一相加（圖 5.1）：

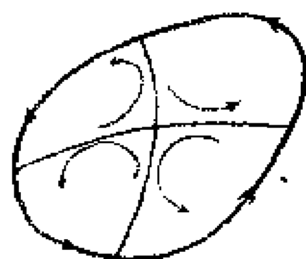


圖 5.1

$$\int_C a\,dx+b\,dy=\int_{C_1} a\,dx+b\,dy+\int_{C_2} a\,dx+b\,dy+\cdots+\int_{C_n} a\,dx+b\,dy.$$

蓋分區之邊界若在 R 之中，必為兩鄰區之共同邊界．故沿之而積，往復間即互相抵消，至其他部分相合，適為 C．故此理之真確，可以見矣．其理對於三維（或多維）空間中之線積分亦有效，讀者可自思得之．

最後所欲附述者，為線積分之估值．若以 L 表曲線 C 之弧長，M 表 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 在 C 上所不能超過之上確界，則

$$\int_C a\,dx+b\,dy+c\,dz\leqq ML;$$

其事可根據 Schwarz 不等式，由

$$\left|a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}\right|$$
$$\leqq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

而識之．

5.1.2. 由力學觀點論線積分

線積分與力學中功量概念有密切關係，前已提及之．設有一質點，在某種力之影響下，沿一曲線而運動，假定其所受之力由一矢量 $\mathbf{A}$（其矢量部分為 a, b, c）規定之，則此力場對於質點所作之功為一線積分．何以言之？如質點所受之力為一恆量，其運動又沿直線進行，則據定義，所謂功量，為力與移動兩矢量之數積．今其所受之力既隨點而異，其運動又沿一曲線 C 進行，

欲應用功量概念於此，自必將 C 代以一多邊形，其頂為 $P_0, P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n = P$，復將實際所受之力代以一理想力，等於在 $P_i P_{i+1}$ 一段中保持不變者．如是則此理想力在 P_i，P_{i+1} 一段所作之功當為

$$a(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + b(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + c(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i,$$

其中 Δx_i，Δy_i，Δz_i 為自 P_i 至 P_{i+1} 之矢量之成分．於是就整個多邊形而論，必令 $i=1,2,\cdots\cdots,n$，而後一一相加，然後令 $n\to\infty$ 以求其極限，遂得一線積分以表達其力在運動時所作之功．至線積分在物理學中之他種應用，留於下節中討論．

5.1.8. 全微分之求積

據上述定義，可知線積分之值必與其所沿曲線之全程有密切關係，不僅為其兩端之函數而已．惟在一特殊條件下，不論其所沿曲線之形狀為何如，其值僅隨 C 之兩端而變．

設 $\boldsymbol{A}$ 為一矢量，其矢量部分為 a, b, c．**苟 $\boldsymbol{A}$ 爲一勢函數之陡度，換言之，苟有一函數 $F(x, y, z)$ 如**

$$\boldsymbol{A} = \text{grad}\, F,$$

即
$$a = F_x,\quad b = F_y,\quad c = F_z,$$

則其線積分可由勢函數在兩端之值表出之，於是兩端間 C 之全程與線積分之值無關． 循是以論，在勢函數 F 存在之任何變區中，任意作各種曲線以連結兩固定點，沿之而求線積分，所得之值必始終不變．

欲證此理，但注意對 $\boldsymbol{A}$ 所假設之條件，可知

$$\int_C a\,dx + b\,dy + c\,dz = \int_\alpha^\beta [F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}]\,dt;$$

惟因
$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} = \frac{dF}{dt},$$

遂得
$$\int_C a\,dx + b\,dy + c\,dz = F(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - F(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)),$$

是即欲證之理．復考 $a\,dx + b\,dy + c\,dz$ 實為 F 之全微分，

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = dF,$$

故上式亦可寫如

$$\int_C dF = F(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - F(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)),$$

並以全微分之求積稱之.例如本卷 2.7.2 所論之引力場即爲一勢函數之陡度,其勢函數爲 $\frac{1}{r}$.故引力加於一質點使其由始點移於終點所作之功與其所取途徑無關.

吾人於此發見一重要問題,即線積分與其所取途徑是否獨立之問題.苟其與途徑無關,則作一迴合曲線如圖 5.2,以 P_0 及 P_1 兩點分爲兩段 C 及 C_1,於是所謂



圖 5.2

$$\int_{P_0 \atop (C)}^{P_1} \cdots\cdots = \int_{P_0 \atop (C_1)}^{P_1} \cdots\cdots$$

意即

$$\int_{P_0 \atop (C)}^{P_1} \cdots\cdots - \int_{P_0 \atop (C_1)}^{P_1} \cdots\cdots = \int_{P_0 \atop (C)}^{P_1} \cdots\cdots + \int_{P_1 \atop (C_1)}^{P_0} \cdots\cdots = \int_{P_0 \atop (C+C_1)}^{P_0} \cdots\cdots = 0;$$

從而可見線積分繞迴合曲線一週等於零.由是以論,所謂線積分與其所取途徑無關,即線積分繞迴合曲線一週等於零之謂也.

5.1.4. 線積分之基本定理

吾人對適所提出之問題,不可無透澈之認識.一線積分惟有在特殊條件下始與其所取途徑無關,換言之,繞行迴合曲線一週始等於零.其充分條件,上段中已論及之.茲欲證明者,此充分條件同時亦爲必要,然後將此必要與充分條件歸於一簡潔之形式,以便應用;並先就平面中問題,詳加論述.

設 $a(x,y)$ 及 $b(x,y)$(可設想爲一平面矢量場 A 之矢量部分)爲兩函數,與其偏導數 a_y 及 b_x 在平面中一區域 R 之內同爲連續.如是則有一定理成立,其言曰:沿 R 中一曲線 C 之線積分

$$\int_C a\,dx + b\,dy$$

如得由 C 之起訖點完全規定,與 C 本身之選擇無關,其必要與充分條件爲 $a\,dx + b\,dy$,爲一函數 $U(x,y)$ 之全微分,換言之,有一函數

$U(x,y)$ 存在於 R，使

$$U_x=a, \quad U_y=b.$$

或

$$A=\operatorname{grad} U$$

在 R 中處處成立. 此條件之為充分，前已證之. 至其為必要，可證之如次. 苟假定此線積分與其所取途徑 C 無關，則令 C 之起點 P_0 固定，並名終點 P 之坐標為 ξ,η，此線積分必為 P 之單値函數，以 $U(\xi,\eta)$ 表之. 於是 $U(\xi,\eta)$ 對 ξ 及 η 必可導，且對於 R 之任何內點必有

$$\begin{aligned}U_\xi(\xi,\eta)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[U(\xi+h,\eta)-U(\xi,\eta)\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{C+C_h}a\,dx+b\,dy-\int_C a\,dx+b\,dy\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{C_h}a\,dx+b\,dy,\end{aligned}$$

其中 C 表任何按段光滑之曲線，連結 P_0 及 R 中任何一點 P 者，而 C_h 則為 R 中按段光滑之曲線，連結 P 及其鄰點 $P_1(\xi+h,\eta)$ 者. 若 h 相當小，則連結 P 及 P_1 之直線線段自在 R 之內，因之即可作為 C_h，而 C_h 之輔變數方程式遂為 $x=t, y=\eta, \xi\leqq t\leqq\xi+h$. 惟如是，乃有

$$U_\xi(\xi,\eta)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}a(t,\eta)dt=a(\xi,\eta);$$

據同理，復有

$$U_\eta(\xi,\eta)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\eta^{\eta+h}b(\xi,t)dt=b(\xi,\eta),$$

故 $U_x(x,y)=a, U_y(x,y)=b$ 之成立，從可識矣. 觀上述證明，雖僅得應用於 R 之內點，惟由於對各函數所假定之連續性，其證對於 R 之邊點亦為有效.

此理既證之後，復有一重要問題繼之而起. 線積分 $\int_C a\,dx+b\,dy$ 與其所取途徑 C 無關之必要與充分條件，為有一勢函數 $U(x,y)$ 存在，而 $A(a(x,y),b(x,y))$ 為 U 之陡度，是誠然矣. 惟所謂勢函數者果在何種條

件下方能存在. 換言之, $a\,dx+b\,dy$ 須在何種條件下為一函數之全微分. 此理不明,則線積分是否與其途徑無關之問題仍未有徹底之解決.

此問題由下列定理解決之: 苟 R 為一單連變區(假定為開區), 則 $\int_C a\,dx+b\,dy$ 與 C 無關之必要與充分條件為

$$a_y = b_x$$

在 R 中處處成立. 此條件世常稱之為可積條件. 若令 C 之起點固定, 則 $\int_C a\,dx+b\,dy$ 為其終點 (ξ,η) 之一函數 $U(\xi,\eta)$, 而矢量場 A 即為 U 之陡度, U 常稱之為 A 之勢函數. 觀此條件乃僅對於已知之 $a(x,y)$ 及 $b(x,y)$ 有所要求, 其滿足與否可以判定勢函數之是否存在, 並決定線積分之是否與途徑獨立, 種種問題, 乃得一舉而決.

欲證此條件之為必要, 其事甚易. 蓋假定線積分與途徑無關, 則必為其途徑終點之一函數 $U(x,y)$ (假定始點為固定), 因之對於 R 中任何一點必有 $U_x=a$, $U_y=b$ 成立. 復因

$$U_{xy}=a_y \quad 及 \quad U_{yx}=b_x$$

之連續性, 遂得 $\qquad a_y(x,y)=b_x(x,y).$

至欲證此條件亦為充分, 當假定此條件 $a_y=b_x$ 之成立, 從而求索一函數 $U(x,y)$, 在 R 中處處滿足 $U_x=a(x,y)$, $U_y=b(x,y)$ 者. 試先假定 R 為一長方形, 其邊與縱橫軸平行, 又假定 $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$, 如圖 5.3 所示. 在 R 中取一固定點 $P_0(\xi_0,\eta_0)$, 由是作一折線與 $P(\xi,\eta)$ 相連, 折線為為兩直線線段 P_0P' 及 $P'P$ 所連成, 分別與縱橫軸相平行, 其交點 P' 之坐標自為 (ξ_0,η). 於是 P_0P' 一段之輔變數方程式為 $x=\xi_0$, $y=t$, t 之變程為 $\eta_0\leqq t\leqq\eta$; 又 $P'P$ 一段之方程式為 $x=t$, $y=\eta$, 其中 t 限於 $\xi_0\leqq t\leqq\xi$, 觀圖 5.3 自明. 然後由 P_0 沿此折線以達 P 之線積分

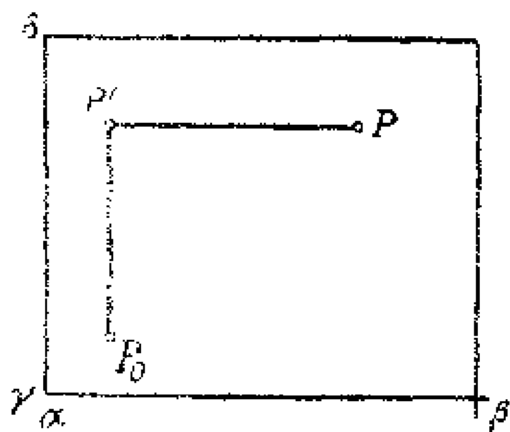


圖 5.3

$$\int_{P_0}^{P} a\,dx+b\,dy=\int_{\eta_0}^{\eta} b(\xi_0,t)\,dt+\int_{\xi_0}^{\xi} a(t,\eta)\,dt$$

必為(ξ,η)之一函數．若以$U(\xi,\eta)$名之，

$$U(\xi,\eta)=\int_{\eta_0}^{\eta} b(\xi_0,t)\,dt+\int_{\xi_0}^{\xi} a(t,\eta)\,dt,$$

則此函數必滿足　　$U_\xi(\xi,\eta)=a(\xi,\eta)$；

復考其對η之偏導數，則有

$$U_\eta(\xi,\eta)=b(\xi_0,\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}\int_{\xi_0}^{\xi} a(t,\eta)\,dt.$$

因$a_\eta(t,\eta)$為連續，故求導可在積分號下施之，

$$U_\eta(\xi,\eta)=b(\xi_0,\eta)+\int_{\xi_0}^{\xi} a_\eta(t,\eta)\,dt;$$

復因$a_y(x,y)=b_x(x,y)$，遂得

$$U_\eta(\xi,\eta)=b(\xi_0,\eta)+\int_{\xi_0}^{\xi} b_x(t,\eta)\,dt$$

$$=b(\xi_0,\eta)+b(\xi,\eta)-b(\xi_0,\eta)=b(\xi,\eta).$$

故$U(\xi,\eta)$即為吾人欲求之函數，其偏導數滿足所要求之條件，可以見矣．據此可以推知線積分必與途徑無關．惟如是，若C為R中任何按段光滑曲線，連接P_0及P者，則

$$U(\xi,\eta)=\int_C a\,dx+b\,dy$$

即為吾人欲求之函數．於是此定理在R為長方形區域時，已得證矣．

此定理在R為任何單連續區時亦必真確．平面中一閉區謂之單連，如其中任何迴合多邊形得以連續性之形變縮成一點．此意須附以精確之說明．所謂一迴合多邊形縮成一點，其旨略如下述．以$P_0,P_1,\cdots\cdots,P_n$諸點，其坐標分別為$(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots\cdots,(x_n,y_n)$者，作為一迴合多邊形之頂，然後令各頂隨時間而作連續性之運動．當$t=0$時，各頂所處地位分別為$P_0,P_1,\cdots\cdots,P_n$；經過相當時間，至$t=1$時，均各歸於R中之一點(ξ,η)，所謂縮成一點，其義要在乎是．因此之故，如假定t之變

程爲$0\leqq t\leqq 1$，則各頂之坐標在此變程中爲t之連續函數$(x_0(t), y_0(t))$, $(x_1(t), y_1(t))$, ……, $(x_n(t), y_n(t))$；又當$t=0$時必有

$$P_0(0)=(x_0(0), y_0(0))=P_0, \cdots\cdots, P_n(0)=(x_n(0), y_n(0))=P_n,$$

而$t=1$時，則

$$P_0(1)=(x_0(1), y_0(1))=(\xi, \eta), \cdots\cdots, P_n(1)=(x_n(1), y_n(1))=(\xi, \eta).$$

以常理測之，如吾人對於迴合多邊形之地位，不加絲毫限制，則必可縮成一點，自無疑義．殊不知所謂單連區域者，其特性即在於是．單連區域中任何迴合多邊形皆可縮成一點．惟必須假定其頂在其縮小之過程中（即t在$0\leqq t\leqq 1$間變化時）自始至終處於規定變區之內耳．

此定義與前在第二章中所述者初無二致．據第二章中所述定義，一區域中如有漏洞存在，則爲多連而非單連．惟其有漏洞，則R中迴合多邊形之包圍漏洞者自不能縮成一點．倒言之，苟R中無漏洞可尋，則其中任何迴合多邊形皆可縮成一點．此事由觀覺上言之殊爲顯明，惟其解析證明甚爲繁瑣，故不得不從略．吾人在此，但明單連之定義足矣．

所當注意者，吾人欲求上述基本定理之推廣，必假定變區R爲單連而後可．茲擬在任何單連區域R中創造一函數$U(x,y)$，滿足$U_x=a$及$U_y=b$．試在R中任擇一點P_0，經此作一折線以達$P(x,y)$，以是爲積分途徑而得一函數如

$$U(x,y)=\int_{P_0}^{P} a\,dx+b\,dy.$$

苟吾人能證明如是規定之$U(x,y)$與所取途徑無關，則此即爲吾人所欲求之函數，滿足$U_x=a$, $U_y=b$者．

循是以論，吾人所欲證者，爲此線積分與其途徑之獨立性，換言之，爲$\int a\,dx+b\,dy$環繞一迴合多邊形之通過P_0者，必等於零．試名此迴合多邊形爲Π，令Π在R中縮小於一點；詳言之，在R中組織諸多邊形$\Pi(t)$，其頂$P_0(t), P_1(t), \cdots\cdots, P_n(t)$爲$t$之連續函數，當$t=0$時即爲$\Pi$，待$t=1$時縮成一點．雖縮成一點時（[illegible]）視爲一如是之曲線，

其弧長爲零者),其線積分自必爲零.故吾人之問題,在如何證明此線積分沿 $\Pi(t)$ 之值當 t 自 0 變 1 時始終不變.即是不論 t 如何變化,其線積分始終爲零.

欲證此,可於 $0 \leqq t \leqq 1$ 變程中,任取一値,以 t' 名之.於是 $\Pi(t')$ 爲一迴合多邊形,完全處於 R 之中,故於其上可取 $A'_0 = P_0(t'), A_1', A_2', \cdots\cdots, A_m' = A_0'$ 諸點(不必爲其頂點),彼此相去甚近,使每兩鄰點 A_i' A_{i+1}' 同在一長方形 R_i 之內,R_i 又完全在 R 之內者.復以 t 表輔變數之値,與 t' 相差甚微者,則多邊形 $\Pi(t)$ 必與 $\Pi(t')$ 如是接近,使吾人在 $\Pi(t)$ 上可指定 $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m = A_0$ 諸點,致 $A_i' A_i$ 及 $A_{i+1}' A_{i+1}$ 諸線段及線弧 $A_i A_{i+1}$ 亦完全處於 R_i 之內.惟如是,遂得應用前對長方形變區所已證之理,以推知線積分繞迴合折線 $A_i' A_{i+1}' A_{i+1} A_i A_i'$ 一週必等於零.此種折線途徑試以 C_i 名之.據上所述,此種途徑,共計當有 m 條,其一一相加之和,適等於繞 $\Pi(t)$ 及 $\Pi(t')$ 各一週,惟繞 $\Pi(t')$ 之向盲適與 $\Pi(t)$ 相反,因此遂得

$$\sum_{i=0}^{m-1}\int_{C_i} a\,dx+b\,dy=\int_{\Pi(t)} a\,dx+b\,dy-\int_{\Pi(t')} a\,dx+b\,dy=0.$$

由是以論,對於一切 t,相當接近於 t' 者,其線積分繞 $\Pi(t)$ 與繞 $\Pi(t')$ 一週之値必相等.故設想線積分繞 $\Pi(t)$ 一週爲 t 之一函數 $\varphi(t)$,可知 $\varphi(t)$ 必爲一常數,不論 t 如何變化,其値不變,是卽吾人欲證之理.

此定理之推廣於多維空間,事殊不難,惟在此不欲詳論.吾人僅擬就三個變數之線積分說出其定理之內容於後.

苟 R 爲一開區,其中任何迴合多邊形以連續性之形變可縮成一點,又有一連續之矢量場 A,其矢量部分爲 $a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)$ 而其偏導數 $a_y, a_z, b_z, b_x, c_x, c_y$ 亦爲連續,則線積分

$$\int_C a\,dx+b\,dy+c\,dz$$

與其所取 R 中之途徑 C 無關之必要與充分條件爲

$$a_y = b_x,\quad b_z = c_y,\quad c_x = a_z$$

之成立.此條件亦可寫如

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$$

誠如是,如令 C 之起點 P_1 [illegible] 之函數 $U(x,y,z)$:

$$\int_{P_1}^{P} a\,dx + b\,dy + c\,dz = U(x,y,z) - [illegible]$$

或以矢量表之

$$\int_{P_1}^{P} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = U(P) - U(P_1).$$

式中 $U(P)$ 為 U 在 P 點之值. [illegible]

5.1.5. 單連區域之重要性

綜觀上論,其所根據有一重要假定,[illegible]. 如此條件未能滿足,則吾人不能 [illegible]. 即可見在多連變區中,上述可積條件不足 [illegible].

如 $$a(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad b(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

除 $x=0, y=0$ 一點,處處連續,其導數

$$a_y(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad b_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

除原點外亦處處連續,且滿足可積條件

$$a_y(x,y) = b_x(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

設取一圓,以原點為中心,1 為半徑者,作為積分途徑 C,則 C 自未能被圍於一單連區域之內,其中可積條件在在成立者.吾人必將原點除外,從而得一兩連之環形變區.因 C 之方程式為 $x = \cos t, y = \sin t$,可知

$$\int_C a\,dx + b\,dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t]\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

在多連變區中繞過合曲線一週未能爲零.

例題

1.求下列線積分

$$\int_C [illegible]$$

C 爲連接 $(0,0)$ 及 (ξ,η) 之一曲線

*2.試沿包含原點而不自交之一封合曲線，求

$$\int_C \frac{1}{x^2+y^2}[illegible]dy - \frac{1}{[illegible]}([illegible]\sin x - y\cos y)dx$$

第二節　平面中線積分與重積分之關係,Gauss 定理

5.2.1.　Gauss 定理之證明

前在上卷論積分與微分之關係時,有一重要公式:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx = f(x_1) - f(x_0),$$

是爲微積分學之基本定理.考其變程,起自 x_0,訖於 x_1,此定理謂 $f'(x)$ 自 x_0 訖 x_1 之定積分可由其原函數在變程兩端之值表而達之, 至其在此學中之基本重要性,前已詳細言之. 今試廣其意,欲於兩維變區中尋求一與之類似之關係,則有 Gauss 之積分定理.

苟 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 及其偏導數在一變區 R 中處處連續,R 之邊界爲一擄段光滑之曲線,則有下列關係

$$\iint_R [f_x(x,y)+g_y(x,y)]dx\,dy = \int_{+C} f(x,y)dy - g(x,y)dx$$

成立. 此式右方爲一以正向旨環繞邊界一週之線積分,所謂正向旨,乃沿邊界繞行一周,其所圍區域始終居左者.故 Gauss 定理實將一重積分由其繞行邊界一周之線積分表而達之.

欲證 Gauss 定理,不妨先對邊界 C 之形狀有所限制. 假定 C 被直線之平行於縱橫軸者至多相交於兩點, 又 R 完全被限於一長方形之內 $\xi_0 \leqq x \leqq \xi_1$　$\eta_0 \leqq y \leqq \eta_1$, 如圖 5.4 所示.復假定 $g=0$, 則據前章所論,

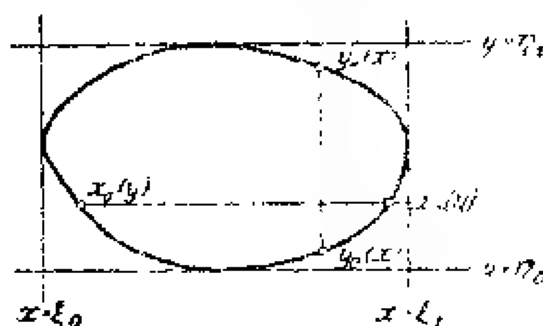


圖 ·.1

$$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy$$

可分解爲

$$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy=\int dy\int f_x(x,y)\,dx$$

而求之．欲求其對 x 之積分，自必令 y 固定，其意卽作一與橫軸平行之直線，名其與C之左右兩交點(僅有兩交點)爲 $x_0(y)$ 及 $x_1(y)$，$(x_1\geqq x_0)$，於是

$$\int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f_x(x,y)\,dx=f(x_1(y),y)-f(x_0(y),y);$$

然後對y求積，由 y 之最小值 η_0 訖其最大值 η_1，則

$$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy=\int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x_1(y),y)\,dy+\int_{\eta_1}^{\eta_0} f(x_0(y),y)\,dy$$

$$=\int_{+C} f(x,y)\,dy,$$

是卽 $g=0$ 時 Gauss 之積分定理．若 R 之邊界有一部分與橫軸平行，則此一段線積分爲零(因在此一段 y 爲固定)，上述證明不必因此有所更易，仍依然有效也．據同理，如假定 R 之邊界與平行於縱橫軸之直線至多僅能相交於兩點，則①

$$\iint_R g_y\,dx\,dy=\int_{\xi_0}^{\xi_1}[g(x,y_1(x))-g(x,y_0(x))]\,dx=-\int_{+C} g(x,y)\,dx,$$

①此式右方有一負號出現，亦理所當然，不足爲奇．蓋平面中之縱橫兩軸自有其本質上之差異，橫軸可由 $\frac{\pi}{2}$ 之正轉動轉入縱軸，而縱軸之轉入橫軸必由 $\frac{\pi}{2}$ 之負轉動．

兩式相加，即得 Gauss 定理：

$$\iint_R [f_x(x,y)+g_y(x,y)]\,dx\,dy=\int_{+C}[f(x,y)dy-g(x,y)dx].$$

此定理之證明，曾引用一條件，謂其變區之邊界至多被平行於縱橫軸之直線交於兩點．茲擬推廣於其他變區，未有此種性質者．試略加思索，將有盡個備有此特性之區域合併之，可得一區域，未有此特性者，觀圖 5.5，可以瞭然．於是應用 Gauss 定理於每一區域，可見線積分之沿每兩區之共同邊界者，一往復間必互相抵消，而結果即為合併後整個區域之 Gauss 定理．倒論之，任何區域 R，苟其可以劃分為有盡區，其邊界與平行於縱橫軸之直線相交不能多於兩點者，則

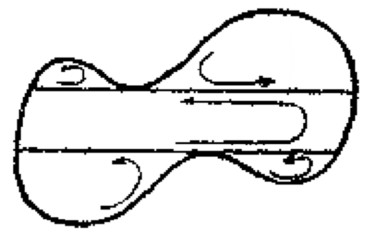


圖 5.5

Gauss 定理在此必能成立．要而言之，不論任何變區，但求其邊界為按段光滑之曲線①，必可證明 Gauss 定理之成立，其普遍證明須經過一番極限之討論，故從略．

最後所欲附述者，所謂一變區可以分裂為有盡個變區，其中每一區至多與平行於縱橫軸之直線相交於兩點之條件可由另一條件替代之．此另一條件為：一變區之邊界可分為有盡部分，其中每一部分在兩坐標軸上各有其確定唯一之投影；惟其影在一軸上或為一點（即邊界之一部分可平行於坐標軸）亦無不可．

茲特示一例，以明 Gauss 定理之用．如 R 之面積公式，前已論及者，可應用此理以得之．試令 $f(x,y)=x$，又 $g(x,y)=0$，則

$$A=\iint_R dx\,dy=\int_{+C}x\,dy;$$

復令 $f(x,y)=0$，又 $g(x,y)=y$，則

$$A=-\int_{+C}y\,dx,$$

與上卷 5.3.2 所得結果正同．

---

①此種區域未必滿足上述條件．例如其邊界之一部分若為 $y=x^2\sin\frac{1}{x}$，則與橫軸之交點可無限多．

5.2.2. Gauss 定理之矢量形式，Stokes 定理

如應用矢量，Gauss 定理得有一極簡潔之形式．試將 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 視為一平面矢量場 A 之矢量部分，則

$$f_x(x,y)+g_y(x,y)=\operatorname{div} A$$

可作 A 之散度觀．又右方線積分之形式，可引用邊線 C 之弧長 s 作變數以變易之，復以 s 增長之方向作為 C 之正向旨，則右方將一變而為

$$\int_C [f(x,y)\dot{y}-g(x,y)\dot{x}]\,ds,$$

其中 $\dot{x}=\dfrac{dx}{ds}$，又 $\dot{y}=\dfrac{dy}{ds}$．

在邊線之任何點上，可規定兩個矢量．其一為切線矢量 $\boldsymbol{t}$，其矢量部分為 $\boldsymbol{t}(\dot{x},\dot{y})$，其絕對值為1，故為一單位矢量，其方向與切線同，指向邊線之正向旨，即 s 增長之向旨．其二為一矢量 $\boldsymbol{n}$，與切線垂直者，其矢量部分為 $\boldsymbol{n}(\dot{y},-\dot{x})$，其絕對值為1，故亦為一單位矢量，其與 $\boldsymbol{t}$ 相處，與正橫軸之與正縱軸相同．因此之故，如邊線 C 之正向旨依上法確定之後(以 s 增長之方向為 C 之正向旨)，則 $\boldsymbol{n}$ 為一單位矢量，指向 C 之外者①．故稱之為向外法矢量，其矢量部分得以

$$\dot{y}(s)=\frac{\partial x}{\partial n},\quad -\dot{x}(s)=\frac{\partial y}{\partial n}$$

表之，其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 為對向外法線之方向求導之意(參閱本卷 2.4.2)．於是 Gauss 定理可寫如

$$\iint_R [f_x+g_y]\,dx\,dy=\int_{+C}\left(f\frac{\partial x}{\partial n}+g\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds;$$

復因

$$f\frac{\partial x}{\partial n}+g\frac{\partial y}{\partial n}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=A_n$$

為 A 與 n 之標積，因之即為 A 投於 n 方向之影，故應用矢量，可將 Gauss 定理寫成如下形式

---

①據運動之連續性亦可以認識之．以切線作為縱軸，其意即切線之方向與 y 增長之方向相同，故 $\dot{x}=0$, $\dot{y}=1$．由是即可知 n 之方向必與正橫軸同．

$$\iint_R \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx\, dy = \int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}\, ds = \int_C A_n\, ds.$$

由是以論，一平面閉區 R 中設有一矢量場 A，則其散度之積分必等於其矢量投於外向法線之影，繞邊界一週之線積分.

所當注意者，如吾人對於 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 給以一種新意義，則 Gauss 定理將有另一種矢量形式，隨之而得另一種解釋. Gauss 定理自可寫為

$$\iint_R [f_x(x,y) - g_y(x,y)]\, dx\, dy = \int_{+C} [g(x,y)\dot{x} + f(x,y)\dot{y}]\, ds,$$

不過將原式中 $g(x,y)$ 代以 $-g(x,y)$ 而已. 若吾人將 $g(x,y)$ 及 $f(x,y)$ 視為一矢量場之矢量部分，以 $g(x,y)$ 作 $\boldsymbol{B}$ 之沿橫軸部分，$f(x,y)$ 為 $\boldsymbol{B}$ 之縱軸部分，即 $\boldsymbol{B}(g(x,y), f(x,y))$，復以 $\dot{x}(s)$ 及 $\dot{y}(s)$ 為單位切線矢量 $\boldsymbol{t}$ 之矢量部分，則

$$g(x,y)\dot{x} + f(x,y)\dot{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t} = B_t,$$

其中 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}$ 表 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{t}$ 兩矢量之標積，據定義自必等於 $\boldsymbol{B}$ 投於切線之影. 然後應用 rot 以寫 $f_x - g_y$，假定矢量場 $\boldsymbol{B}$ 擴展於三維空間，其沿 z 部分處處為零；如是則 $f_x - g_y = (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})_z$，從而獲得 Gauss 定理之又一種矢量形式：

$$\iint_R (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})_z\, dx\, dy = \int_C B_t\, ds.$$

由是以論，一平面閉區中設有一矢量場，則其旋量之積分必等於矢量投於切線之影繞行邊線一周之線積分. 此為 Gauss 定理之他一種闡明，世有稱之為 Stokes 定理者①.

---

①吾人由 Gauss 或 Stokes 定理，可以推線積分之基本定理，如證明 $f_x = g_y$ 之成立，是以致線積分對其途徑之獨立性. 所謂對途徑獨立，無異謂線積分繞行適合曲線一周等於零. 如以 R 之邊線為途徑，則據適所證明之 Stokes 定理，在 $f_x = g_y$ 假定下，必有

$$\int_{+C} g(x,y)dx + f(x,y)dy = 0,$$

是即欲證之理.

吾人旣應用 rot 以寫 Stokes 定理，假定三維空間中有一矢量場 rot $\boldsymbol{B}$，而復自限其討論於 xy 平面．其實此種限制殊可不必．吾人不妨假定 T 爲空間中任何平面，其邊線爲 C，又以 n 表 T 之法線方向，則 Stokes 定理可寫如

$$\iint_T (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})_n \, dS = \int_C B_t \, ds.$$

5.2.3. Green 公式，再論 Jacobian 之意義

有兩重要等式，在將來研討微分方程式時應用尤廣，世常以 Green 公式稱之者，可由 Gauss 定理推論而得之．設 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 爲兩函數，其初重及二重導數在一變區 R 中均爲連續．如是則由於

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\, v_x) = u_x v_x + u v_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(u\, v_y) = u_y v_y + u v_{yy},$$

Gauss 定理得寫成如下形式：

$$\iint_R [u_x v_x + u_y v_y] \, dx\, dy$$

$$= -\iint_R u\, \Delta v \, dx\, dy + \int_{+C} -u v_y \, dx + u\, v_x dy,$$

其中 Δv 爲

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$$

之縮寫．是即所謂 Green 之第一公式，如 $u_x, v_x, u_y, v_y, v_{xx}, v_{yy}$ 在閉區 R 中處處連續之假設下，其眞確固已得證．若更假定 u_{xx} 及 u_{yy} 之連續性，則可得其另一形式

$$\iint_R [u_x v_x + u_y v_y] \, dx\, dy$$

$$= -\iint_R v\, \Delta u \, dx\, dy + \int_{+C} -v\, u_y \, dx + v u_x \, dy.$$

兩式相減，即有所謂 Green 之第二公式如下：

$$\iint_R [u\, \Delta v - v\, \Delta u] \, dx\, dy$$

$$= \int_{+C} [v u_y - u\, v_y] dx - [v\, u_x - u\, v_x] dy.$$

此 Green 兩公式中之線積分尙可轉換於較前之形式．但注意任何函數 $f(x,y)$，如對於邊線之向外法線求導，假定 s 增長之方向爲邊線之正向旨，則

$$\frac{\partial}{\partial n}f(x,y)=f_x\dot{y}-f_y\dot{x}.$$

因之上列兩公式可寫如

$$\iint_R [u_x v_x+u_y v_y]\,dx\,dy=-\iint_R v\,\Delta u\,dx\,dy+\int_{+C} v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

及
$$\iint_R [u\,\Delta v-v\,\Delta u]\,dx\,dy=\int_{+C}\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds.$$

是即著名之 Green 第一第二公式，其實爲 Gauss 定理之一種特殊情形而已．又 Green 之第一公式可應用矢量而出以如下形式：

$$\iint_R [\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v]\,dx\,dy$$

$$=-\iint_R v\operatorname{div}\operatorname{grad} u\,dx\,dy+\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

左方積分符號下爲兩矢量 grad u 及 grad v 之標積，而 Δu 之寫爲 div grad u 亦至爲顯明．

復次，如應用

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\,v_y)=u_x v_y+u v_{yx},\quad 及\quad \frac{\partial}{\partial y}(u\,v_x)=u_y v_x+u\,v_{xy},$$

代入於 Gauss 定理，可得一極堪注意之關係：

$$\iint_R [u_x v_y-u_y v_x]\,dx\,dy=\int_{+C} u\,v_x dx+u\,v_y dy.$$

觀左方積分符號下之 $u_x v_y-u_y v_x$ 卽爲 Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$，故藉此關係可以闡明 Jacobian 之意義．試假定 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 在 R 中處處爲正，又 xy 平面中之變區 R 藉

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

轉換於 uv 平面中之一變區 R'．其邊線之向旨因 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}>0$ 之故可

以保持不變．惟 R 之面積既可由

$$\int_{+C} u\,dv = \int_{+C} u(v_x dx + v_y dy)$$

以知之，故

$$\iint_R \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

實為轉換後之面積，而

$$\iint_{R'} du\,dv = \iint_R \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

之成立顯而易見．是即重積分在 $f=1$ 時之轉換式．

吾人如將

$$\iint_R \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

以 R 之面積除之，復令 R 之直徑趨零，即為行所謂對變區求導之法(本卷4.2.7)，必從而獲得 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$．由是以論，所謂 **Jacobian** $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ **者無他，轉換後區域之面積，除以原有區域之面積，在後者趨零時所趨之極限而已，因此之故，稱之為面積轉換在某地之局部比例，亦無不可**．

第三節 Gauss 定理之闡明及其應用

5.3.1. 由物理學觀點論 Gauss 定理

吾人擬由物理學之觀點闡明 Gauss 定理，於是所謂矢量之散度亦將得一顯明之意義．設在平面中有一不可壓縮之液體，而觀其「**穩定水流**」[1]．任何液體之流動，為行文之便，皆以**水流**簡稱之．如一液體，以等於 1 之恆密度散佈於一平面，而描寫其流動狀態之速度矢量在任何點上不隨時間而變，如是則其水流謂之穩定．此固為實際情形之理想化，惟此種思想頗有助於數理之認識，自覺無可否認．要之，穩定水流可由其速度矢量場 $\boldsymbol{v}$ 完全規定之，其矢量部分稱之為 v_1 及 v_2．於是復假定有一曲線 C，並任意規定其法線之正向，而以 $\boldsymbol{n}$ 表其法線方向之單位

(1) steady flow; stationäre Strömung

矢量，則液體依法線正向在每時間單位中流經曲線之總量當由如下線積分定之：

$$\int_C v n\, ds.$$

其中變數 s 爲 C 之弧長①. 若 C 爲一閉合曲線,圍成一區域 R, 又 n 爲向外法矢量,則據 Gauss 定理,即有

$$\int_C v n\, ds = \iint_R \operatorname{div} v\, dx\, dy,$$

其意即謂液體在每時間單位中由 R 流出之總體積等於

$$\iint_R \operatorname{div} v\, dx\, dy,$$

是乃其水流速度之散度,以所圍區域 R 爲積分變域之重積分. 據是吾人乃得講明散度之物理意義. 考列於左方之線積分在普通情形下不能爲零. 苟其爲正,則區域內液體總量正在減少,苟其爲負,則區域內液體總量正在增多. 至水流穩定時,則區域中水量無增無減;其增由於源之存在,而其減由於洞之存在,若得之於源者,失之於洞,或消減於洞者,得補充於源,消長相抵,結果無增無減,是謂穩定. 試名在每時間單位中由 R 流出之液體總量爲水流總量. 則水流總量之爲正爲負,視 R 中所存在之源或洞何者佔優勢而可以決定之. 若將水流總量以其區域之面積除之,則有水流之平均量,或稱水流之平均強度. 復令區域之直徑趨零,即施行所謂對變區之求導,即得水流在一點之強度. 由是以論,吾人據 Gauss 定理,可以知 $\operatorname{div} v$, 即速度場之散度實等於水流之即地強度. 原甚抽象之散度概念,至是乃得一平易簡明之解釋.

吾人不妨假設特殊條件,以求此說之更覺淺顯. 吾人可設想水流之形成,由於二部分水流,其一沿橫軸以速度 v_1 進行,其二沿縱軸以速度 v_2 進行,復以 $P_1(\xi,\eta)$, $P_2(\xi+h,\eta)$, $P_3(\xi,\eta+k)$, $P_4(\xi+h,\eta+k)$

① 欲明此積分確有意義，當設想曲線 C 由一多邊形替代之；多邊形之邊假定爲 Δs_1, Δs_2, ……, Δs_n，而速度矢量沿每邊均爲恆量,然後令多邊形之邊趨多以求其極限.

表長方形 R 之四頂. 倘 v_1 沿 P_1P_4 及 P_2P_3 兩邊為恆量,其值分別為 $v_1(\xi,\eta)$ 及 $v_1(\xi+h,\eta)$, 則在每時間單位中由 R 沿橫軸流出之液體總量約為 $kv_1(\xi+h,\eta)-kv_1(\xi,\eta)$, 復以 R 之面積 hk 除之,則其平均強度為

$$\frac{v_1(\xi+h,\eta)-v_1(\xi,\eta)}{h}$$

據同理,可以知其水流沿縱軸之平均強度. 因此之故,

$$\frac{v_1(\xi+h,\eta)-v_1(\xi,\eta)}{h}+\frac{v_2(\xi,\eta+k)-v_2(\xi,\eta)}{k}$$

當接近於由 R 流出之平均強度. 然後令 $h\to 0$, $k\to 0$, 其極限即為吾人所欲闡明之散度.

既明上述之理,所謂**無源水流**[1],亦可瞭然. 水流之無源者,液體在其區域中無增無減,源洞兩者互為消長之謂. 其條件為

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}=0,$$

據 Gauss 定理得由

$$\int_C v_n\, ds=0$$

表而出之. 故無源水流,其速度之法線部分,繞行任何迴合線一周皆等於零者也.

5.3.2. 由物理學觀點論 Stokes 定理

吾人引用水流之說,復可闡明 Stokes 定理. 設有一不可壓縮之液體,其流動狀態由其速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 描寫之. $\boldsymbol{v}$ 之矢量部分假定為 v_1 及 v_2. 如是 v_t 繞行任何迴合線一周之線積分

$$\int_{+C} v_t\, ds$$

稱之為液體之旋轉,簡稱為**水旋**. 據 Stokes 定理,此水旋實等於

$$\int_C v_t\, ds=\iint_R \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dx\, dy.$$

(1) source-free, quellenfrei.

於是可知 rot $\boldsymbol{v}$ 爲水旋在任何一點之強度(或稱水旋之即地強度). 故 Stokes 定理之意,無異謂繞行任何迴合曲線 C 之水旋必等於其水旋強度,以 C 所圍區域爲積分區之重積分.

最堪注意者, 爲水旋沿任何迴合曲線皆爲零之水流,據 Stokes 定理爲如是之水流,其水旋強度處處爲零者. 此種水流,謂之**無旋水流**(1),其條件爲

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}=0.$$

苟一水流爲無源又爲無旋,則有如下兩條件

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial x}=0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0$$

成立. 此種現象,吾人將於流體力學中詳加研討. 在本卷最後一章中亦將論及之.

更有進者, 如吾人對矢量 $\boldsymbol{v}$ 給以另一種物理意義, 則 Stokes 定理將更有一種新解釋. 如以 $\boldsymbol{v}$ 表一力場,其矢量部分爲 v_1 及 v_2, 則

$$\int_C v_t\, ds=\int_{+C} v_1\, dx+v_2\, dy$$

沿任何曲線 C, 不論 C 之迴合與否,爲力場加於一質點, 使其沿 C 移動時所作之功量,前章中已論及之. 若 C 爲一迴合曲線,圍成一變區 R, 其沿 C 所作功量爲零,則必

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial x}=0$$

在在成立而後可. 倒論之,此條件在 R 中若處處成立,則據 Stokes 定理

$$\int_{+C} v_t\, ds=\int_{+C} v_1 dx+v_2 dy$$

必爲零. 由是以論,力場所作功量與其所取途徑獨立之必要與充分條件爲

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}=0$$

(1) circulation-free; wirbelfrei

之變處成立，在本卷 5.1.4 固已詳論之矣.

5.3.3. 重積分之轉換式

重積分中轉換變數問題，前章中已詳論之. 茲欲以 Stokes 定理為根據，為其轉換式求得一新證. 設 R 為 xy 平面之一閉區，為曲線 C 所圍而成. 復據

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$$

將 R 轉換於 uv 平面之一變區 R'，其間關係一一相應，R 之邊線 C 轉為 R' 之邊線 C'，其向背依然如舊. 又假定此兩變區滿足一切 Gauss 定理所要求之條件. 如是欲將

$$I=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

轉換，可應用 Gauss 定理，先將此化為一線積分，繞行 R 之邊界 C 一周者. 此線積分自較簡易，可轉換於另一線積分，繞行 R' 之邊界 C' 一周者. 然後再度應用 Gauss 定理，將此線積分寫成重積分，即得所欲求之轉換式.

試假定 $A(x,y)$ 為一函數，與 f 發生如下關係者.

$$A_x=f,$$

其存在自無疑義. 據 Gauss 定理，既有

$$I=\iint_R A_x\,dx\,dy=\int_{+C}A\,dy,$$

然後引用 u,v 作新變數，將右方線積分轉換於

$$I=\int_{+C'}A(y_u\,du+y_v\,dv),$$

再度應用 Gauss 定理將此變成重積分，則有

$$\int_{+C'}(Ay_u)du+(Ay_v)dv=\iint_{R'}[(Ay_v)_u-(Ay_u)_v]du\,dv.$$

惟因

$$(Ay_u)_v=A_vy_u+Ay_{vu},$$

$$(Ay_v)_u=A_uy_v+Ay_{uv},$$

及　　$A_u = A_x x_u + A_y y_u$，$A_v = A_x x_v + A_y y_v$，$A_z = f$

之故，可知

$$(Ay_v)_u - (Ay_u)_v = (x_u y_v - x_v y_u)f,$$

於是遂得

$$I = \iint_{R} f\,dx\,dy = \iint_{R'} f(x_u y_v - x_v y_u)\,du\,dv,$$

是卽欲證之轉換式

第四節　面積分

三維變區中之積分，除三重積分及線積分外，更有所謂曲面積分，或簡稱面積分[1]，其積分變數在一曲面上任意變化者．在解釋此新概念之前，擬先作一種普遍性之討論，其結果可使前述理論，特別關於重積分之概念，得更進一步之精密．

5.4.1.　變區之向旨

吾人回憶最初討論 $f(x)$ 之積分

$$\int_a^b f(x)dx,$$

其變程起自 a，訖於 b，曾作如下協定

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

其意卽謂積分變區有其確定之向旨．如一反其原有向旨，卽令其變程起自 b 訖於 a，則此積分將以 -1 乘之．故此協定亦可簡寫如

$$\int_{+C} f(x)dx = -\int_{-C} f(x)dx,$$

其中 $+C$ 乃表示起自 a 訖於 b 之變程，而 $-C$ 則表示起自 b 訖於 a 之變程．

更就平面或空間中之線積分言之，當吾人沿一曲線而求積，其曲線

(1) surface integral, Flächenintegral

亦必有一確定向旨；如其向旨一反，則其線積分將以 -1 乘之而後可循是以推，欲論多維變區之積分，類似協定之採用，亦勢所必至者.

觀上卷 5.3.1 論面積之正負，曾協定其正負由其邊界之循周向旨而定. 若其邊界之循周向旨爲正，則其面積爲正，若其循周向旨爲負，則面積爲負. 平面中變區 R 之有正負可言者，謂之有向旨之變區(圖 5.6)；據適所協定，當其邊界之循周向旨爲正時，其向旨爲正，否則爲負. 惟吾人現已將 R 之面積由二重積分 $\iint_R dx\,dy$ 表而出之. 若此面積爲正，則其邊界之循周向旨爲正，於是其面積之絕對值爲



圖　5.6

$$\iint_R dx\,dy = |A|$$

若變區之向旨爲負，則其面積爲負，試以 $\iint_{-R} dx\,dy$ 表此面積，必有

$$\iint_{-R} dx\,dy = -|A|.$$

又據前所述，面積得由線積分計算之①，因之復有

$$|A| = -\int_{+C} y\,dx = \int_{+C} x\,dy$$

吾人自後論及變區 R，如未有特殊聲明，均指正向旨之變區而言. 要之，無論何種重積分均由

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \iint_{+R} f(x,y)dx\,dy,$$

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = -\iint_{-R} f(x,y)dx\,dy$$

規定之. 此定義自與前述協定相符.

論重積分必附加此協定之意義，可舉一例以說明之. 據前論積分之

---

①吾人可舉一例以徵實 $-\int_{+C} y\,dx$ 確爲一正數. 如 R 爲一平方形如 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$，則沿兩豎直線 $x=0$ 及 $x=1$ 必有 $dx=0$. 就 $y=0$ 一邊論，對於此線積分亦無所增益. 獨沿 $y=1$ 一邊，自 $(1,1)$ 以達 $(0,1)$，則有 $y=1$, $dx<0$, 故得一正數.

轉換式，如 xy 平面中之一變區 R 攝影於 uv 平面中之 R'，其間關係一一相應，則 R 之面積，由新坐標 u, v 表之，當爲

$$\iint_R dx\, dy = \iint_{R'} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

假定其 Jacobian 在 R 中處處爲正．當此 Jacobian 爲正時，R 與 R' 之向旨相同，當其爲負時，R 與 R' 之向旨適相反，吾人固已知之．惟如是，倘論重積分時置向旨而不論，其結果所至，在 Jacobian 爲負時，上列公式將失其效．如能認識向旨之不可不談，規定 R 爲一有向旨之區域（正向旨或負向旨之區域），R' 亦爲一有向旨之區域，由 R 轉換而得者，則 Jacobian 爲負時，其負適爲上述協定所抵消，而上列轉換式之眞確，依然如故．明乎是，可以推知重積分之普遍轉換式

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv$$

亦必眞確，不論其 Jacobian 在 R 中處處爲正或爲負①，當一有向旨變區 R 轉入一有向旨區域 R' 時，其重積分必依上式轉換．**循是以觀，惟有採用向旨之義，並如上規定正負之法，始可得一絕無例外之公式，以爲轉換重積分之根據**．於是上述協定之重要，可以見矣．

區域之向旨，不必由其邊界，亦可用其他方法規定之．試觀區域中任何一點，以此一點爲中心，作一小圓，如是循圓而行，自有一向旨，此循圓向旨謂之此一點之旋轉向旨．設變區 R 中任何一點有一旋轉向旨，由一點以連續性運動走向他一點時，其旋轉向旨保持不變，則 R 之向旨得因之而確定．

應用是法，三維空間中之曲面亦有向旨之可言．曲面上任何一點均有一旋轉向旨，但用一小圓包圍之，復給以一確定之循圓向旨即可．然後由一點連同其旋轉向旨在曲面上作連續性移動，則曲面上任何一點均有同一旋轉向旨（其事有無例外，自須加以討論），即以此爲曲面之向

---

①若 Jacobian 在 R 中未必處處爲正或爲負，換言之，在 R 中若正負並出，則此轉換式即未能有效．在此情形之下，R 之攝影於 R'，未能有一一相應性．



圖

旨.於是所謂曲面之向旨,得藉是以定.

以是定曲面之向旨,則曲面有正負面之可言.三維空間中普通曲面皆為雙面，因之其一面可視為正,其他一面為負.至何者為正,何者為負，殊覺無關宏旨.例如就 xy 平面言之,其指向 z 軸之一面,可作為正面.據同理,吾人可在任何曲面之上,處處裝作一矢量，指向正面.試設想己身站立於曲面之上,當曲面之向旨既定之後,向頭盤旋而上,成一右手螺旋者,則頭所向之一面謂之正面,反是為負面.此意亦可說明如次.設一曲面連同其向旨(即其每點上之旋轉向旨),經過連續性之變動,結果與 xy 平面相合,則其孰正孰負,可以 xy 平面之正負定之,其法線之正負,即以 z 軸之正負定之.是為決定曲面正負面之一種極自然之法,雖為一種便利之約定,無關宏旨,但不可不一論及之.

惟有一事,不可不特加注意,即曲面之中,無正負面之可分者,即有所謂單面曲面者，如 Möbius 最早所發明之一種曲面即其一例.此種 Möbius 曲面,不難造成之(觀圖 5.8).但取一長方形之紙片,將其一端



圖 5.8

轉 180 度後與他一端相黏合可以得之.此種曲面,有其奇異之特性,為雙面曲面所未有.如由其上之一點(如在 Möbius 曲面畫一中線,就中線上任意取一點)出發,沿中線而行,繞行一周,當復返於出發點時,忽在其反面之上.試設想以一小圓包圍其一點,並確定一循圍向旨,在不

變此循圍向旨之條件下，沿中線移動，當復歸出發點時，其循圍向旨將適得其反．在此種曲面上行動，可不必通過其邊界，自一面走至別面，如是自無正負兩面之可分①．此種無正負面可辨之曲面，在吾人之討論中，自當除外，置諸不論之列．

最後所欲申述者，吾人如欲規定一曲面之正負面，可假定曲面由兩輔變數 u 及 v 表而達之，其意即將 uv 平面中之一區域 R 轉換於一曲面 S．於是 S 之正負面，由 R 之正負定之可矣．

以上論平面中區域及空間中曲面之正負．至三維變區，亦有正負之可言．設有一三維變區 R，其邊界為一閉合曲面 S．試規定 S 指向區內之一面為正面．曲面之向旨既定，循是繞過曲面自負至正之向若與右手螺旋相符，則 R 謂有正向旨（觀圖 5.9）．反之，循曲面上所定向旨，自負而正之方向若為一左手螺旋，則 R 之向旨為負．例如立體 $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$, $0\leqq z\leqq 1$ 假定其底在 xy 平面中之向旨為正，則其向旨亦為正．

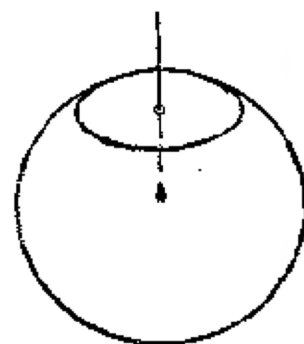


圖 5.9

以上論三維變區之向旨．此向旨定，則其體積

①吾人可求得 Möbius 曲面之輔變數方程式如次．試設想有一圓如 $x=2\cos u$, $y=2\sin u$．就此圓上取一點 P，與 u 相應者，作一單位矢量 j，在正 z 軸及由 0 至 P 之半徑所規定之平面中與正 z 軸成一角，等於 $\frac{1}{2}u$．在此同一點上，復作一單位矢量如 $-j$．於是得一直線線段，為兩單位矢量所合成，其長為 2，而其中點則處於圓之上．當 u 自 0 變至 2π 時，此直線線段將隨 u 而轉動，作等於 π 之轉動後，結果使 j 轉為 $-j$，而 Möbius 曲面因之而成．故不論 u 如何變化，此直線線段上任何一點，與圓周之距離為 v 者 $(-1\leqq v\leqq 1)$，必有如下坐標：

$$x=2\cos u+v\sin\frac{u}{2}\cos u,$$

$$y=2\sin u+v\sin\frac{u}{2}\sin u,$$

$$z=v\cos\frac{u}{2},$$

$$0\leqq u\leqq 2\pi,\quad -1\leqq v\leqq 1$$

是即 Möbius 曲面之方程式．

之正負隨之而定，其理與平面中變區同．無論爲平面或空間中之變區，其面積或體積之正負皆隨其區域之向旨而定之可也．此事協定之後，設有一積分，以一有向區域爲積分變區者．當其變區向旨一反時，其積分之正負必互易，簡言之，

$$\iiint_{+R} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = -\iiint_{-R} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

又根據與前相同之推理，可知下列轉換式

$$\iiint_{R} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(x,y,z)\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

不論 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 在 R 中處處爲正或爲負皆爲有效．讀者可自體會得之，無容縷述．

5.4.2. 就一曲面施展之積分

既有如上各種準備之後，吾人可爲面積分立一普遍定義．設 $a(x,y,z)$，$b(x,y,z)$，$c(x,y,z)$ 爲三個函數，在三維空間之一變區中處處連續，並可視爲一矢量場 $A=A(x,y,z)$ 沿三坐標軸之矢量部分．設又有一曲面 S，以一一相應之關係投影於 xy 平面中之一閉區 R，其方程式爲 $z=z(x,y)$，復假定 S 有一向旨，因投影於 R 而轉爲 R 之向旨．又以 n' 表一單位矢量，其方向爲 S 之法線方向，且爲一如是之法線方向，與 S 之向旨合成一右手螺旋者．然後將曲面 S 劃爲 n 部分 $S_1,S_2,\cdots\cdots,S_n$，其面積分別爲 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots\cdots,\Delta S_n$；其投於 xy 平面之影爲 R 之分區 R_ν，其面積分別爲 ΔR_1，$\Delta R_2,\cdots\cdots,\Delta R_n$，且此諸分區適將 R 一次掩蔽而無重疊．吾人假定 ΔS_ν 爲正，至 ΔR_ν 之爲正爲負，當視其投影於 R_ν 後之向旨如何以定之．要之，$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots\cdots$，$\Delta S_n$ 與 $\Delta R_1,\Delta R_2,\cdots\cdots,\Delta R_n$ 之間必有如下關係

$$\Delta R_\nu = q_\nu \Delta S_\nu$$

成立，其中 q_ν 乃表一如是之數，當 S_ν 之直徑趨零時，趨於正法線 n' 及正 z 軸所夾成之角 $\gamma(x,y,z)$ 之餘弦者．於是令 (x_ν,y_ν,z_ν) 爲曲面上

第 ν 分區中之一點，即 $z_\nu = f(x_\nu, y_\nu)$. 當 S_ν 之最大直徑(隨之而 R_ν 之最大直徑)趨零時，

$$\sum_{\nu=1}^{n} c(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\Delta R_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} c(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\cos\gamma_\nu \Delta S_\nu$$

所趨之極限，吾人以

$$\iint_S c(x, y, z)dx\,dy$$

或

$$\iint_S c(x, y, z)\cos\gamma\, dS$$

表之，並稱之爲一**面積分，就有向曲面 S 而施展者**. 此極限自必存在無疑，蓋吾人可視此爲 $c(x, y, z(x, y))$ 之普通積分，其變數在 R 中變化者：

$$\iint_R c\, dx\, dy,$$

惟 R 必假定爲有向盲之區域耳.

據同理，如假定 S 得以一一相應之關係投影於 yz 平面或 xz 平面，得其影區 R' 及 R''，與 S 同爲有向區域，即 S 可由單值函數 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$ 表達時，則復有下列面積分

$$\iint_S a(x, y, z)dy\, dz = \iint_{R'} a(x(y, z), y, z)dy\, dz$$
$$= \iint_S a(x, y, z)\cos\alpha\, dS,$$

及

$$\iint_S b(x, y, z)dz\, dx = \iint_{R''} b(x, y(z, x), z)dz\, dx$$
$$= \iint_S b(x, y, z)\cos\beta\, dS,$$

其中 α 及 β 爲 S 之正法線分別與正 x 軸及正 y 軸所成之角，至 R' 及 R'' 之意義已如上述. 吾人將三式合併，得面積分之普遍定義如下：

$$\iint_S [a(x, y, z)dy\, dz + b(x, y, z)dz\, dx + c(x, y, z)dx\, dy]$$
$$= \iint_S [a(x, y, z)\cos\alpha + b(x, y, z)\cos\beta + c(x, y, z)\cos\gamma]dS.$$

若以 $\frac{\partial}{\partial n'}$ 表對 n' 方向之求導，並對其正法線之方向①，則

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n'},\quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial n'},\quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial n'}$$

因之上列面積分可寫如

$$\iint_S \left[a\frac{\partial x}{\partial n'} + b\frac{\partial y}{\partial n'} + c\frac{\partial z}{\partial n'} \right] dS$$

如以 a,b,c 視作 $\boldsymbol{A}$ 之矢量部分，則此積分符號下之函數實為矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿其曲面之正法線部分，因之亦得寫如 $\boldsymbol{A}n'$ 或 A_n.

復次，吾人可假定曲面 S 由兩輔變數 u 及 v 表達之，得其方程式為 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$，由是一有向曲面 S 將與 uv 平面中之一有向區域 B 一一相應，而上列面積分隨之將有如下形式

$$\iint_B \left[a(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + b(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + c(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du\,dv;$$

此為一普通積分，以 B 為其變區者.

論至此，吾人不難發見 S 在坐標系中所處位置，實不必有如前之限制. 如吾人可假定一有向曲面 S 得用有盡條光滑線段分作有盡個部分 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots$，使每一部分滿足前所要求之假定. 其可視為例外情形者，若 S 或 S 之一部份與坐標面垂直時，則其投於此平面之影將為一曲線而非一區域，如是則組織積分時，自可將此置諸不顧，因重積分當其變區縮成一曲線時為零故也. 於是吾人可根據上述定義為 S 之每一部分組織面積分，而所謂就一有向曲面 S 而施展之積分即為此種面積分之和而已. 例如 S 為一迴合曲面，如為一球面時，其投於坐標面之影將上下疊出，且有相反之向背，勢必分為若干部分而研討之. 惟如應用輔變數方程式 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$，將一曲面 S 以一一相應之關係投影於 uv 平面中之一有向區域 B，則上列面積分之輔變數

---

①在此用 n' 以表正法線，因 n 前已作為平面曲線之向外法線.

形式依然有效．故應用輔變數形式，S 之剖分殊非必要，此其便利處，可設法利用之．

5.4.3. 面積分由物理學觀點說明之

面積分之義，亦可設想有一不可壓縮之液體（在此自爲三維空間中之液體），其密度爲一恆量等於 1 者，而以其穩定水流闡明之．Ｈ穩定水流由一速度矢量 $\boldsymbol{A}$ 完全規定之．於是在曲面 S 之每一點上，其水流速度投於正法線方向之矢量部分爲 $\boldsymbol{A}n'$，而

$$\boldsymbol{A}n'\Delta S_\nu = \Delta S_\nu[a(x_\nu,y_\nu,z_\nu)\cos\alpha_\nu + b(x_\nu,y_\nu,z_\nu)\cos\beta_\nu + c(x_\nu,y_\nu,z_\nu)\cos\gamma_\nu],$$

則約等於液體在每時間單位中通過面素 ΔS_ν 由負面流向正面之質量（此質量自可爲負數）．惟如是，可知下列面積分

$$\iint_S [a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy] = \iint_S A_{n'}dS,$$

實爲液體在每時間單位中經過 S 由負面流向正面之總量．於此可見採用向旨之義，使曲面有正負面之別，其事在物理現象之描寫時發生極重要之影響．

復次若以矢量 $\boldsymbol{A}$ 表力，由於一力場，作用於一點 (x,y,z) 者，則 $\boldsymbol{A}$ 之方向即表示力線[1]之方向，而其絕對值則表示力之強弱．在此種解釋之下，

$$\iint_S [a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy]$$

實爲力線經過曲面由負面向正面之總通量[2]．

第五節　空間中之積分定理及等式

5.5.1. Gauss 定理及其在物理學上之解釋

既明面積分之義，吾人可將平面中之 Gauss 定理推廣於三維空間而研討之．平面中 Gauss 定理之要旨，在乎將一重積分，就一平面區域而施展者，化爲一線積分，沿區域之邊界繞行一周者．玆假定 R 爲三維空間中之一閉區，其邊界爲一曲面 S，可分爲有盡部分，各有連續變動之切面．復假定每一與坐標軸平行之直線，與 R 有共同點者，與 R 之邊界僅能交於二點；此最後假定將來可設法取消之．

(1) line of force; Kraftlinie.　(2) Flux of force; Kraftfluss.

設 $a(x,y,z)$， $b(x,y,z)$， $c(x,y,z)$ 三個函數，連同其初重偏導數在 R 之中及 R 之邊界上處處連續．此三函數可作爲一矢量場 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 之矢量部分．然後一觀下列三重積分

$$\iiint_R \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz,$$

其中 x,y,z 在 R 中任意變化．令 R 投影於 xy 平面，得一區域 B，立 xy 平面之法線於 B 之一點，名其進口之 z 坐標爲 $z=z_0(x,y)$，出口之 z 坐標爲 $z=z_1(x,y)$，則此三重積分可據

$$\iiint_R f\,dx\,dy\,dz=\iint_B dx\,dy\int_{z_0}^{z_1} f\,dz$$

以分解之．因 $f=\frac{\partial c}{\partial z}$，故對 z 之求積即可實現

$$\int_{z_0}^{z_1}\frac{\partial c}{\partial z}dz=c(x,y,z_1)-c(x,y,z_0)=c_1-c_0;$$

因之遂得

$$\iiint_R \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}dx\,dy\,dz=\iint_B c_1\,dx\,dy-\iint_B c_0\,dx\,dy.$$

如設想 S 對於 R 之向旨爲正，則 S 含進口 $z=z_0(x,y)$ 之一部分，投影於 B，將有正向旨，而其含出口 $z=z_1(x,y)$ 之一部分將有負向旨．故右方兩積分相加結果爲

$$-\iint_B c(x,y,z)dx\,dy,$$

就整個曲面 S 而施展之．惟如是，吾人遂得下列關係

$$\iiint_R \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}dx\,dy\,dz=-\iint_S c(x,y,z)dx\,dy.$$

此關係即 S 有一部分垂直於 xy 平面時仍然有效，其理甚顯，可不贅．

據同理，可推知其他兩式；然後三式相加，即得

$$\iiint_R\left[\frac{\partial a(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial b(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$
$$=-\iint_S[a(x,y,z)dy\,dz+b(x,y,z)dz\,dx+c(x,y,z)dx\,dy],$$

是卽三維空間中之 Gauss 定理，將一三重積分化爲一面積分，就其組成邊界之曲面而施展者. 此公式亦可寫如

$$\iiint_R(a_x+b_y+c_z)dx\,dy\,dz=-\iint_S(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)dS,$$

式中 S 對於 R 之向背爲正，至 α,β,γ 則爲向內法線 n' 與正坐標軸所成之角.

既明此，欲推廣其理於其他比較普遍之變區，事亦不難. 吾人但要求 R 可由有盡個曲面部分具有連續性切面者，劃爲若干分區 R_ν，其中每一分區均滿足前述之假定，如任何平行於坐標軸之直線若其與 R_ν 有共同點者，與 R_ν 之邊界僅交於兩點. 於是 Gauss 定理在每一 R_ν 中均已得證. 然後一一相加，則式之左方爲一三重積分，施展於整個 R，而式之右方爲一面積分，施展於 S 之全面，蓋其爲分區之共同邊界者一往復間，其面積分互相抵消，其理與平面中情形初無二致. 最後所欲附述者，吾人對於 R 之邊界，但要求其爲有盡個部分所合成，每一部分在三坐標面有其確定唯一之投影卽足. 間有柱面形之部分，其投影爲曲線者，亦無不可. 在此假定之下，Gauss 定理得如上法證明之.

茲先舉一淺例以明 Gauss 定理之用. 如 R 爲一有向而又適合之曲面所圍成之區域，則其體積可用 Gauss 定理推算之. 若令 $a=0$, $b=0$, $c=z$, 則其體積爲

$$V=\iiint_R dx\,dy\,dz=-\iint_S z\,dx\,dy.$$

據同理，又得①

$$V=-\iint_S x\,dy\,dz=-\iint_S y\,dz\,dx.$$

①於此點見一事，深足注意. 此表示體積之積分，當 x,y,z 循環互易時，其正負依然不易. 回憶平面中表積面積之

$$A=\int_{+C}x\,dy=-\int_{+C}y\,dx,$$

則因 x 與 y 互易而互易正負. 追溯其故，實由於平面中正 x 軸若與正 y 軸互易，勢必一反其平面之旋轉向背. 在三維空間中，x,y,z 若循環互易，亦卽將 x 易以 y，y 易以 z，z 易以 x，其結果不能使一右手坐標系轉爲左手坐標系.

復次，吾人應用矢量，可將 Gauss 定理出之以一極簡潔之形式．如以 a,b,c 為一矢場量 A 沿三坐標軸之部分，則因

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

之故，Gauss 定理遂得如下形式

$$\iiint_R \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx\, dy\, dz = -\iint_S \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}'\, dS = -\iint_S A_{n'} dS,$$

其中 $A_{n'}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 投於曲面上向內法線之部分．

為應用之便，吾人常採用曲面上之向外法線 $\boldsymbol{n}$ 以替代 $\boldsymbol{n}'$:

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}',$$

於是 Gauss 定理遂為

$$\iiint_R \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx\, dy\, dz = \iint_S A_n\, dS = \iint_S \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}\, dS;$$

復將向外法線與正坐標軸所夾成之角之餘弦以 $\frac{\partial x}{\partial n}, \frac{\partial y}{\partial n}, \frac{\partial z}{\partial n}$ 表之，則有

$$\iiint_R [a_x + b_y + c_z]\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left[a\frac{\partial x}{\partial n} + b\frac{\partial y}{\partial n} + c\frac{\partial z}{\partial n}\right] dS.$$

空間中之 Gauss 定理，與平面中之 Gauss 定理同，亦可由物理學觀點闡明之．試想像有一不可壓縮之液體，其密度恆等於 1．觀其穩定水流，可由一速度矢量場 $\boldsymbol{A}$ 規定之．若以 A_n 表其速度矢量在曲面上任何一點投於其向外法線 $\boldsymbol{n}$ 之部分，則液體在每時間單位中經過面素 ΔS 向外流出之總量約為 $A_n \Delta S$．因此之故，其在每時間單位中經 S 流出之總量當由施展於整個曲面之面積分 $\iint_S A_n dS$ 推算之．如是可知列於 Gauss 公式右方之面積分，即為液體在每時間單位中由 R 流出之總量．此流出液體之總量據 Gauss 定理竟轉換於 $\boldsymbol{A}$ 之散度施展於 R 內部之重積分．由是可以闡明 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 之物理意義為何如．吾人既假定水流為不可壓縮而又穩定，所謂穩定，乃與時間無關之謂，換言之，始終保持原態；惟如是，其液體之外流必有連續性之補充而後可，故在 R 之內部必有水

源(正或負)存在,以保持水流之穩定. 因此之故,在每一點上自有水源強度之可論.考列於右方之面積分既爲液體流出R之總量,若以R之體積除之,可從而得知其水源之平均強度. 然後令R之直徑趨零,卽令R縮於一點,以考其極限,換言之,將

$$\iiint \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,dx\,dy\,dz$$

對變區求導,卽得此一點上之水源強度.循是以論,所謂 div $\boldsymbol{A}$ 者,其義無他,由$\boldsymbol{A}$所描寫之穩定及不可壓縮之水流在任何一點之水源強度耳.

水流之無源者最足注意. 所謂無源,液體在某區域內不生不滅,無增無減之謂,如是則有下列條件

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

處處成立,隨之而
$$\iint_S A_n dS$$

施展於任何迴合曲面均爲零. 試觀兩曲面F_1及F_2,兩者之邊界爲同一有向曲線C;C所圍之區域假定爲單連,以R名之.復以指向R內部之法線作爲F_1之正法線(觀圖5.10),如是循C之向旨,沿F_1及F_2之正法線前進,均成一右手螺旋.然後應用 Gauss 定理,必有

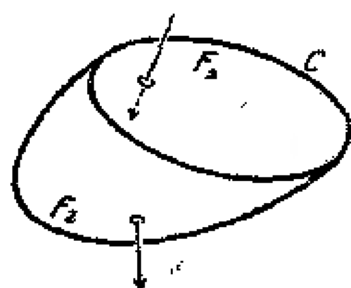


圖 5.10

$$\iiint_R \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,dx\,dy\,dz = \iint_{F_1} A_n dS - \iint_{F_2} A_n dS.$$

因假定 div $\boldsymbol{A}=0$,遂得

$$\iint_{F_1} A_n dS = \iint_{F_2} A_n dS.$$

循是以論,若水流爲無源,則液體在每時間單位中流經同一邊界之任何兩曲面必相等.因此流過之液體總量與曲面之選擇無關;僅能與邊界C發生關係而已.至其與C之關係爲如何,將於下段論 Stokes 定理時討論之.

5.5.2. Green 等式

根據 Gauss 定理，如對其中 A 有所假設，可推得兩重要關係，世常以 Green 等式稱之者．

如令
$$A = u \operatorname{grad} v,$$
其沿坐標軸之矢量部分隨之而爲 $u v_x, u v_y, u v_z$，則在 R 中有

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial x}(u v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u v_z),$$

在邊線上有
$$A_n = u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

於是應用 Gauss 定理之結果，得

$$\iiint_R [u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z]\, dx\, dy\, dz$$
$$= -\iiint_R u\, \Delta v\, dx\, dy\, dz + \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS,$$

其中 Δv 爲
$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}.$$

據同理，若以 $A = v \operatorname{grad} u$，則

$$\iiint_R [u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z] dx\, dy\, dz$$
$$= -\iiint_R v\, \Delta u\, dx\, dy\, dz + \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

兩式相減，即得 Green 之第二等式：

$$\iiint_R [u\, \Delta v - v\, \Delta u]\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS.$$

5.5.3. 空間力與曲面力

凡力在一連續體內發生作用者，可作爲空間力或曲面力觀之．據 Gauss 定理，可以闡明其間之關係．

謹就一簡單情形說明其梗概．設有一液體，其密度 ρ 恆等於 1，則其壓力 $p(x,y,z)$（自隨 x,y,z 而變者）實爲一種力．細考其意，即謂在經過 x,y,z 之每一面素上，有一種力，以 $p(x,y,z)$ 爲密度，依垂直於面素之方向發生作用．如在液體中設想有一區域 R，爲曲面 S 所圍而成者，則 R 所受影響，可謂由於壓力加於其邊面而來，其沿 x 軸部分當爲

$$X=-\iint_S p\frac{\partial x}{\partial n}dS,$$

其中$\frac{\partial x}{\partial n}$為 x 軸與曲面向外法線所成之角之餘弦。據同理，其在 y 及 z 軸之部分為

$$Y=-\iint_S p\frac{\partial y}{\partial n}dS,$$

$$Z=-\iint_S p\frac{\partial z}{\partial n}dS.$$

惟據 Gauss 定理，可知

$$X=-\iiint_R p_x\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y=-\iiint_R p_y\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z=-\iiint_R p_z\,dx\,dy\,dz;$$

從而得知作用於 R 之總力，由如下矢量

$$\boldsymbol{F}=-\iiint_R \operatorname{grad} p\,dx\,dy\,dz$$

而可以決定之。循是以論，液體中由於壓力 $p(x,y,z)$ 而起之影響，可視為一種面力，以等於 $p(x,y,z)$之密度，並以垂直於曲面之方向，施於任何部分之曲面元素，由他方面觀之，亦可視為一種空間力，以等於 $-\operatorname{grad} p$ 之密度，施於體積之每一元素。

例　題

1.*以下列方程式

$$x_i=x_i(p_1,p_2,p_3)\qquad(i=1,2,3)$$

規定一種垂直坐標系 p_1,p_2,p_3。換言之，如令 $a_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$，則有

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,$$

$$a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,$$

$$a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0$$

成立。

(a)試證
$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}=\sqrt{e_1e_2e_3},$$

其中

$$e_i = x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2,$$

(b)試證

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{e_i}\frac{\partial x_k}{\partial p_i} = \frac{1}{e_i}a_{ik}.$$

(c)用 Gauss 定理,將 $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$ 由 p_1, p_2, p_3 表而達之.

(d)將 Δu 轉換於焦點坐標(參閱第三章第三節後例題 6).

第六節　空間中之 Stokes 定理

5.6.1.　Stokes 定理之證明

設 C 爲空間中一曲線,週合,有向,而又按段光滑. S 爲一曲面,爲 C 所圍而成，其法線爲連續或按段連續者，又循 C 之向旨向正法線而進，成一右手螺旋. 復假定 $\boldsymbol{B}$ 爲一矢量場,在 S 之鄰區由矢量部分 $\phi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\chi(x,y,z)$ 決定之.

Stokes 定理謂

$$\iint (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})_n \, dS = \int_C B_t \, ds,$$

其中 s 爲 C 之弧長,隨 C 之繞行方向而增大者，又 B_t 爲 $\boldsymbol{B}$ 沿 C 投於其切線之部分. 此定理亦可寫如

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dx\, dy \right\}$$

$$= \int_C \phi\, dx + \psi\, dy + \chi\, dz.$$

考其用意,實將一施展於一有向曲面之面積分轉換爲一線積分,繞行其有向邊界一周者.

此定理在平面中既已得證，則其對於曲面之眞確，可由是而推斷之. 如假定 S 爲有盡個平面所合成,其邊界 C 爲一直線多邊形,則吾人可應用 Stokes 定理於每一平面部分,然後一一加之. 於是就線積分而論,其沿每兩平面部分之共同邊界而積者一往復間，彼此適相抵消，其

結果可謂 Stokes 定理對於此種 S 已得證明．欲求其普遍證明，勢必令平面部分趨多，其組成之曲面趨於任何曲面 S，其邊界趨於任何光滑之曲線 C，如是必經過一番極限之研討，似覺過於冗長．故吾人擬用直接計算以求其證明如下：

為推理之便，可引一矢量 $\boldsymbol{A}$，其與 $\boldsymbol{B}$ 之關係如

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\boldsymbol{B},$$

如是其沿 xy 及 z 軸之矢量部分為

$$a(x,y,z)=\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad b(x,y,z)=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\chi}{\partial x},$$

$$c(x,y,z)=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

而

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=0$$

之成立，乃理所當然(本卷 2.7.4)．

吾人茲就一有向曲面 S，為一有向曲線 C 所圍而成者，詳考其施展於 S 之面積分

$$\iint_S A_n dS=\iint_S(a\,dy\,dz+b\,dz\,dx+c\,dx\,dy)$$

如何轉換為一線積分，隨 C 而變者．吾人可設想 S 由兩輔變數 u 及 v 表而達之，其意即令 S 與 uv 平面中之一閉區 D 相應．誠如是，乃可據普遍轉換式以推知．

$$\begin{aligned}&\iint_S[a\,dy\,dz+b\,dz\,dx+c\,dx\,dy]\\&=\iint_D\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right.\\&\qquad+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right\}du\,dv.\end{aligned}$$

考右方含有 ϕ 諸項為

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial\phi}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

加入 $$-\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0$$

合併之,則右方之含 ϕ 者可寫爲

$$\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$-\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

據同理,可知其含 ψ 或 χ 諸項,可各寫爲

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \quad 及 \quad \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

於是上列重積分遂分裂爲三個積分之和:

$$\iint_D \frac{\partial(\phi,x)}{\partial(u,v)}du\,dv,\ \iint_D \frac{\partial(\psi,y)}{\partial(u,v)}du\,dv,\ \iint_D \frac{\partial(\chi,z)}{\partial(u,v)}du\,dv.$$

各就 D 而施展,其邊界 K 之向旨與 C 之向旨相應.惟據前所述平面中之 Stokes 定理,既有

$$\iint_D\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)du\,dv$$

$$=\int_K\left(\phi\frac{\partial x}{\partial u}du+\phi\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)=\int_C\phi\frac{dx}{ds}ds,$$

式中 s 爲 C 之弧長,隨繞行 C 之正向旨而增大者.因此之故,將三式相加,其右方爲一線積分如

$$\int_C\left(\phi\frac{dx}{ds}+\psi\frac{dy}{ds}+\chi\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

其中 $\phi\frac{dx}{ds}+\psi\frac{dy}{ds}+\chi\frac{dz}{ds}$ 適爲矢量 B 沿有向邊線 C 投於其切線方向之部分.因之遂得

$$\iint_S(\mathrm{rot}\ B)_n dS=\int_C B_t\,ds.$$

詳寫之，爲

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy\right\}$$

$$=\int_C(\varphi\,dx+\psi\,dy+\chi\,dz);$$

並重述其成立條件如下．$A=\text{rot }B$ 在規定區域內處處連續，又 S 之全部劃分爲有盡個部分後，每部分均可由轉變數方程式 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ 表達之，此三個函數連同其初重偏導數皆爲連續函數．在此條件之下，Stokes 定理已得證矣．

自 Stokes 定理成立之後，前段中所提出之問題遂得一圓滿之解決．問題爲何？一矢量場 A，其散度 div 處處爲零者，其法線部分之積分，施展於一曲線 C 所圍成之曲面 S，果在何種條件下與 S 之特性無關，即僅隨 C 而異．據 Stokes 定理，可知如有一矢量場 B 存在，使 A 適爲 rot B 者

$$A=\text{rot }B,$$

則此面積分可轉爲一線積分，僅隨 C 而變者．吾人將於本章附錄中更證任何矢量場 A，如其 div 爲零，則必有 $A=\text{rot }B$ 之形式，於是此問題乃得一言而決．

5.6.2. 再由物理學觀點論 Stokes 定理

欲由物理學觀點闡明 Stokes 定理①，可想像有一不可壓縮之液體，其穩定水流由其速度場 B 完全規定之．於是

$$\int_C B_t\,ds$$

沿一週合曲線 C 繞行一周，謂之水流沿此曲線之旋量．據 Stokes 定理，並應用對變區求導之法，可以推知每一點上之水旋強度必爲 $(\text{rot }B)_n$，

①平面中之 Gauss 及 Stokes 定理實際上爲同一定理，不過有一項正負不同，無關宏旨．惟進至三維空間，則兩者性質完全不同，讀者可自思得之．

其旋轉向旨與曲面之正法線成一右手螺旋[1].

復次,如以$\boldsymbol{B}$表一力場或電力場之矢量,則列於Stokes公式右方之線積分,實爲此力場作用於一質點使其繞行曲線C一周所作之功量.據Stokes定理,此功量可由一面積分測知之.

論至此,吾人可復返於本章之出發點,一論線積分之基本定理.吾人可在Stokes定理中爲此基本定理求得一新證.主要問題在乎研討一矢量場$\boldsymbol{B}$必具何種特性而後其沿切線方向之部分,繞行任何迴合曲線一周始能爲零.觀於Stokes定理[2].可知矢量場$\boldsymbol{B}$之旋量rot爲零時其事必能實現.故旋量rot之爲零,或一矢量場之無旋性爲此事實現之充分條件,至其同時亦爲必要條件,前在5.1.5固已證之.惟如是,矢量場$\boldsymbol{B}$必可由一函數之陡量表而出之:

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{grad} f.$$

苟此矢量場$\boldsymbol{B}$不僅爲無旋,且爲無源,即其散度div爲零,則f必滿足

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f=0,$$

或
$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

於是知此標量f,世常以$\boldsymbol{B}$之勢函數稱之者,實爲著名Laplace微分方程式之解也.

第七節　就兩個以上自變數再論積分與微分之關係

回顧本章所論各節,綜合而比較之,則對於積分與微分之基本關係,或更有透澈之認識.

前在上卷第二章述一個自變數之函數時,曾詳論積分與微分相互關係之重要,奉爲基本定理,且認爲微積分學所以完成之最要關鍵.考此定理之內容,謂$f(x)$如在一閉程中$a\leqq x\leqq b$處處連續,又$F(x)$如

---

[1]於是可見矢量之旋量有離坐標系而獨立之意義,故復爲一矢量.

[2]如欲應用此定理,自必對曲面及其邊界要求所假設之條件.其事可能有困難發生,如曲線有重點時,即爲一種困難情形.故5.1.5所述證明自當較此爲優.

為 $f(x)$ 之一原函數,則其間有如下關係

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

成立. 倒論之,若 $F(x)$ 為一連續可導之函數, 則必可求得一 $f(x)=F'(x)$, 滿足如上關係. 在此所欲特加注意者,為此定理之上半,其要旨在乎將一積分,施展於一維空間性之變程者,簡化為 $F(b)-F(a)$, 此 $F(b)$ 及 $F(a)$ 僅隨變程之兩端而定,故其變可視為有零維空間性. 由是言之,若 $f(x)$ 為 $F(x)$ 之導數, 則 $f(x)$ 之定積分, 就一維變區而施展者,得由 $F(x)$ 在變區邊界之值表而出之. 試將此定理細加探討,其要旨實在乎是.

由此觀點研討兩個以上自變數之情形, 藉以瞭解本章中所述各種積分定理,則思想之來龍去脈,自有可尋.綜觀問題之要點,在乎如何將一積分,就一區域而施展者,不論其區域為一曲線,為一曲面,或為空間中之任何一部分, 轉換為另一積分, 就其區域之邊界而施展者; 易言之,如何將積分所施展之區域自 n 維減為 $n-1$ 維而已.例如平面中之 Gauss 定理

$$\iint_R (a_x+b_y)\,dx\,dy=\int_{+C}(a\,dy-b\,dx),$$

其意即謂施展於一閉區R之二重積分

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy,$$

苟其中　$f(x,y)=a_x(x,y)+b_y(x,y),$

則可化為一線積分, 繞行邊界一周, 故其積分變區可謂由二維變至一維. 至其與前不同者,在此無復原函數 F 可言;從前 F 所處地位,今由一矢量場$a(x,y)$,$b(x,y)$取而代之;又從前 f 既定之後,其原函數$F(x)$除可加一任意常數外, 亦隨之而定,今欲由 $f=a_x+b_y$ 以定一矢量場,

其矢量部分為 $a(x,y)$, $b(x,y)$ 者,其間尙有相當自由①,此不可不注意及之.

就兩個自變數之情形(即 $n=2$)而論,除 Gauss 及 Stokes 定理外(此兩定理內容無別,可視為同一定理),尙有一關於線積分之重要定理,論其性質,與前述之基本定理極相類似.設平面中有一曲線 C,其兩端分別為 (ξ_0,η_0) 及 (ξ,η),則 $f(x,y)$ 沿 C 而積,起自 (ξ_0,η_0),訖於 (ξ,η) 之線積分,與其途徑 C 無關之必要與充分條件為

$$f(x,y)=t\operatorname{grad}U,$$

式中 t 為指向切線之單位矢量.果如是,則

$$\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)} t\operatorname{grad}U\,ds=U(\xi,\eta)-U(\xi_0,\eta_0),$$

於是此線積分之值已由 $U(x,y)$ 在兩端之值表而出之,故無論在形式上或意義上,與 $n=1$ 時之基本定理,可謂完全相似.

更考一線積分

$$\int_C (a\,dx+b\,dy)$$

僅隨邊值而變(與途徑無關)之必要與充分條件,為矢量 A(其矢量部分為 a 及 b)可表達為一勢函數之陡量.此事與前 $n=1$ 時情形比較而並觀之,可見前之 f,為 F 之導數,而今之 f,則為一勢函數之陡量,故 F 之地位,由一勢函數取而代之.惟此事之可能與否,即勢函數之存在與否,有其必要與充分條件,即所謂可積條件 $a_y=b_x$.

就三個自變數之問題而論,其情形亦復類似.在此亦有 Gauss 定理,其意乃將 $f(x,y,z)$ 之三重積分,施展於三維閉區者,轉換為一施展於其邊界之面積分,此其所謂邊界,自為三維空間中之一曲面,有迴合性而無邊界者.此轉換之可能,又必假定 $f(x,y,z)$ 為一矢量場(a,b,c)

①如欲求案 $a(x,y)$ 及 $b(x,y)$ 以滿足 $a_x+b_y=f(x,y)$,其事有相當伸縮餘地.例如吾人可令 $b(x,y)$ 恆等於 0,或等於一任意函數,然後依 $a_x=f-b_y$ 以求 $a(x,y)$,如是則 $f(x,y)-b_y(x,y)$ 對 x 之任何不定積分,視其中 y 為一輔變數,皆可作為 $a(x,y)$.既得 $a(x,y)$ 之後,再加以一任何矢量場,其 div 為零者皆為吾人所欲求之矢量場.

之散度，而此矢量場又相當於 $n=2$ 時之原函數①.

至於三維空間中之線積分，與平面中情形完全相同，可不必詳論，讀者自求之可矣.

更觀三個自變數之情形，復有所謂面積分，施展於一被一空間曲線所圍而成之曲面之上者，論其地位，實介於線積分及三重積分之間. 欲將一如是之面積分轉換於一僅隨邊值而變之線積分，自有其條件，是即 Stokes 定理，其內容謂

$$\iint_S (a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy);$$

如此轉換之可能，當視 a, b, c 是否爲一矢量場之旋量. 故此矢量場又相當於前之原函數. 復考此矢量場存在之必要條件，則爲

$$a_x + b_y + c_z = 0.$$

其爲充分，當於本章附錄中補述之.

綜觀本章所述各項定理，察其同而析其異，則對於基本關係之認識，所得必多，讀者幸深思而自得之. 更推其理以觀三個以上自變數之問題，其情形亦復相似.

例　題

1. 求下列面積分

$$\iint \frac{z}{p}\,dS,$$

施展於橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 之上半部 z 爲正時，其中

$$\frac{1}{p}=\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2},$$

又 l, m, n 爲向外法線之方向餘弦.

2. 求下列面積分

$$\iint H\,dS$$

施展於一以原點爲中心，以 1 爲半徑之球面，其中 H 爲

$$H=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2.$$

---

①創造此矢量場之法甚多，不必贅述，其最簡者 $n=2$ 時正試.

*3. 證 n 維空間中之 Gauss 定理. 其意如下. 設 B 爲 n 維空間,即 $x_1\cdots\cdots x_n$ 空間中之一變區,其邊界 S 之方程式爲

$$G(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0,$$

如是在 B 之內必有 $G\leqq 0$. 又設 $a_i(x_1,\cdots\cdots,x_n)$, $i=1,\cdots\cdots,n$ 在 B 中爲連續可導函數,則

$$\iint\cdots\cdots\int_B\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right)dx_1\cdots\cdots dx_n=\int\cdots\cdots\int_S\left(a_1\frac{\partial x_1}{\partial\nu}+\cdots\cdots+a_n\frac{\partial x_n}{\partial\nu}\right)dS,$$

其中 dS 爲曲面元素(參閱 A4.2.2),而 $\frac{\partial x_i}{\partial\nu}$ 則爲坐標對向外法線之導數,因之即爲

$$\frac{\partial x_i}{\partial\nu}=\frac{G_{x_i}}{\sqrt{G_{x_1}^2+\cdots\cdots+G_{x_n}^2}}.$$

第五章　附錄

第一節　再論 Gauss 及 Stokes 定理

觀本章中證明 Gauss 及 Stokes 定理時，皆以一重積分作出發點，分步求積，而轉換於一僅隨邊值而變之線積分. 細思之，吾人未始不可倒其過程，由一線積分出發，轉入於重積分. 因其事頗饒趣味，故略論之.

例如欲求平面中之 Stokes 定理，可在平面中任擇兩點 P 及 Q，以一曲線 C 連結之. 令 C 在其兩端(P 及 Q)固定不變之假定下伸縮之，並假設 C 在其自始至終之形變中將一區域 R 掃蕩一過，使 R 爲 C 所單層掩蔽(圖 5.11). 精言之，C 之輔變數方程式爲

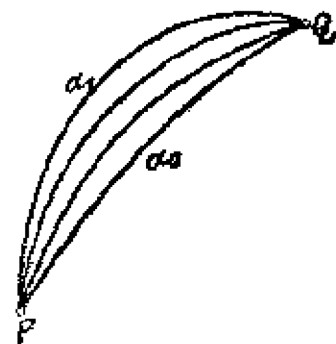


圖　5.11

$$x=x(t,\alpha),\quad y=y(t,\alpha),\quad t_0\leqq t\leqq t_1,$$

其中 $x(t_0,\alpha)$, $y(t_0,\alpha)$ 及 $x(t_1,\alpha)$, $y(t_1,\alpha)$ 爲 P 及 Q 兩固定點之坐標，不論 α 如何變化，始終如一. 當 α 在 $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ 變化時，C 即從而描繪一變區 R. 吾人復假定 $x(t,\alpha)$ 及 $y(t,\alpha)$ 對 t 及 α 各有連續導數，又

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial t}=x_{\alpha t},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial t}=y_{\alpha t}$$

亦爲連續，又 Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\alpha)}$ 在 R 中除 P 及 Q 兩點外處處爲正．惟如是，此一區域 R，將 P 及 Q 兩點除外，必一一相應攝影於 αt 平面中之一長方形 $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ 及 $t_0 \leqq t \leqq t_1$．

設在閉區 R 中有兩連續可導函數 $a(x,y)$ 及 $b(x,y)$．試一考下列線積分，沿曲線 C_α 而施展者：

$$I(\alpha)=\int_{C_\alpha}[a(x,y)dx+b(x,y)dy]=\int_{t_0}^{t_1}[ax_t+by_t]dt,$$

觀其如何隨 α 而變．欲明此，當求其對 α 之導數，在積分符號下求之，得

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{t_0}^{t_1}[(a_x x_\alpha+a_y y_\alpha)x_t+(b_x x_\alpha+b_y y_\alpha)y_t+ax_{\alpha t}+by_{\alpha t}]dt.$$

然後應用部分積分法，於最後兩項，復注意 x_α 及 y_α 在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 時爲零，

$$\int_{t_0}^{t_1}(ax_{\alpha t}+by_{\alpha t})dt=[ax_\alpha+by_\alpha]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(a_t x_\alpha+b_t y_\alpha)dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}[(a_x x_t+a_y y_t)x_\alpha+(b_x x_t+b_y y_t)y_\alpha]dt.$$

因此遂得

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{t_0}^{t_1}[a_y(y_\alpha x_t-y_t x_\alpha)+b_x(x_\alpha y_t-x_t y_\alpha)]dt,$$

或
$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{t_0}^{t_1}(a_y-b_x)\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\alpha)}dt;$$

於是復將此式對 α 求積分，自 α_0 以訖 α_1，則有

$$I(\alpha_1)-I(\alpha_0)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{t_0}^{t_1}(a_y-b_x)\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\alpha)}dt\,d\alpha;$$

更將右方變數轉換爲 x,y，以替代原有之 t 及 α，則

$$I(\alpha_0)-I(\alpha_1)=\iint_R(b_x-a_y)dxdy.$$

觀式之左方，爲一線積分，繞行邊界 $C_{\alpha_0}-C_{\alpha_1}$ 一周者．因此在前所假設之條件下，此即爲平面中之 Stokes 定理．

至三維空間中之 Stokes 定理，亦可依此求之．欲求三維空間中之 Gauss 定理，可由一施展於一曲面之面積分出發，然後將此曲面經過一番形變，從而描繪一三維變區可矣．

惟不可不注意者，應用此種推理所得結果未必與前完全相同．如欲達到與前相同之普遍性，（例如平面上之 Stokes 定理言之），必證明前所假設之變區 R 可由一曲線線族在所要求之連續及可導性條件下單層掩蔽之．其證較長，故從略．

第二節 無源矢量場由旋量表達之

設有一矢量場 $\boldsymbol{A}$ 其散度 div $\boldsymbol{A}$ 在一三維有限區 R 中處處為零者，是否可由他一矢量 $\boldsymbol{B}$ 之旋量表而達之；換言之，是否有一矢量 $\boldsymbol{B}$ 存在，與 $\boldsymbol{A}$ 發生如下關係：

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}.$$

此問題前在 5.6.1 已提出之．茲欲證明者，此條件確為 $\boldsymbol{B}$ 存在之充分條件，即擬在 div $\boldsymbol{A}$ 之假定下，求得一如是之 $\boldsymbol{B}$．若以 $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ 表 $\boldsymbol{A}$ 之矢量部分，以 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ 表 $\boldsymbol{B}$ 之矢量部分，於是當在 $a_x + b_y + c_z = 0$ 之假定下試求 u,v,v，以滿足

$$a = w_y - v_z,$$

$$b = u_z - w_x,$$

$$c = v_x - u_y.$$

為求簡之故，可假定 R 為一平行多面體．於是不難求得一 $\boldsymbol{B}$，其第三矢量部分 $w(x,y,z)$ 處處為零者．因此上列條件即簡化為

$$a = -v_z,$$

$$b = u_z,$$

$$c = v_x - u_y.$$

欲求第一式滿足，但令

$$v = -\int_{z_0}^{z} a(x,y,\zeta)d\zeta,$$

其中 x,y 作爲輔變數，而 z_0 (隨之而 y_0) 爲 R 中任何固定點之 z 坐標．至欲求第二式成立，當令

$$u = \int_{z_0}^{z} b(x,y,\zeta)d\zeta + \alpha(x,y),$$

其中$\alpha(x,y)$爲一待定函數，僅隨x及y而變．然後根據假定$a_x + b_y = -c_z$可以求第三式之成立．因

$$c = v_x - u_y = -\int_{z_0}^{z} [a_x(x,y,\zeta) + b_y(x,y,\zeta)]d\zeta - \alpha_y(x,y),$$

於此應用 $a_x + b_y = -c_z$，則

$$\begin{aligned} c(x,y,z) &= \int_{z_0}^{z} c_\zeta(x,y,\zeta)d\zeta - \alpha_y(x,y) \\ &= c(x,y,z) - c(x,y,z_0) - \alpha_y(x,y). \end{aligned}$$

據此即可規定 $\alpha(x,y)$，因

$$\alpha_y = -c(x,y,z_0),$$

故

$$\alpha = -\int_{y_0}^{y} c(x,\eta,z_0)d\eta.$$

於是遂得欲求之 B 如下：

$$\begin{aligned} u &= \int_{z_0}^{z} b(x,y,\zeta)d\zeta - \int_{y_0}^{y} c(x,\eta,z_0)d\eta, \\ v &= -\int_{z_0}^{z} a(x,y,\zeta)d\zeta, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

既得此，若以 $\Phi(x,y,z)$ 表任何兩重連續函數，則問題之最普遍解當爲

$$\begin{aligned} U &= u + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ V &= v + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ W &= w + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

得之.何則,$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}+\operatorname{grad}\Phi$(其矢量部分為 U',V',W')之必能滿足所要求條件,實由於 $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi=0$.倒論之,皆 $\boldsymbol{B}'$ 為一矢量,滿足$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=A$者,則必有 $\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{B})=0$.由是知 $\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{B}$ 必為無旋,因之可表達為一勢函數 Φ 之陡量,而所欲證者,已得證矣.

例　題

1.若 $f(x,y)$ 為一連續函數,其初重及二重導數亦連續.若

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\neq 0,$$

試證下列轉換

$$u=f_x(x,y),$$

$$v=f_y(x,y),$$

$$w=-z+xf_x(x,y)+yf_y(x,y),$$

必有唯一逆轉換如

$$x=g_u(u,v),$$

$$y=g_v(u,v),$$

$$z=-w+ug_u(u,v)+vg_v(u,v).$$

2.試將吸力矢量場

$$X=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad Y=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad Z=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

表達為一矢量之旋量.

第六章 微分方程式略論

微分方程式在近代各類科學中幾比比皆是. 若欲在本書範圍之內發揮其理論要旨,其勢有所不能. 故不得已僅就物理學中常見之例,略示梗概,藉明微積分學在此方面之應用而已.

第一節 力學中之微分方程式

6.1.1. 質點之運動方程式

一質點之運動問題,前在上卷第五章第四節中已論及之,當時曾假定其運動沿一預先指定之曲線而進行. 茲特將此限制取消,專就一質量集中於一點(x,y,z)者,而考其運動狀態. 如以 $\mathbf{x}$ 表決定地位之矢量,起自坐標原點,指向此質點,其矢量部分為 x,y,z 者,則由 $\mathbf{x}(t)$ 或 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 如何隨時間 t 而定,可以推斷質點之運動為何如. 至於運動之速度,仍以 $\dot{\mathbf{x}}$ (其矢量部分為 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, $\dot{z}=\frac{dz}{dz}$,其絕對量為 $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$),其加速度以 $\ddot{\mathbf{x}}$ (其矢量部分為 $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$))表之.

物理學中發達最早系統最完者,首推力學,力學中之基本概念及原理,精深宏闊,非專書不能述其略. 本節以下列定義及事實為出發點,就簡單問題略加研討. 所謂力,為質量 m 乘其加速度

$$m\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{f},$$

故其矢量部分為

$$m\ddot{x}=X,$$

$$m\ddot{y}=Y,$$

$$m\ddot{z}=Z.$$

此三方項式,即為 Newton 之基本方程式. 論其意義,不過為力之定義而已. 然吾人常可由物理學中之特殊假設,預知力場之性質,不必由所研討之運動而始知之. 因此之故,此三方程式乃可作為規定 $\mathbf{x}$ 之微分方

程式，爲運動之加速度在已知力場之影響下必須滿足之條件

例如重力即爲一種最簡單之力．吾人假設力爲一恆等之力，依負 z 軸之方向作用於一質點，其矢量部分因之爲

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-mg,$$

或以矢量表之 $$\mathfrak{f}=-mg\,\mathrm{grad}\,z,$$

其中 g 爲一恆量，在上卷 21[illegible] 頁已論及之．

他如吸力，由一質量 μ，集中於坐標原點時，由此發生而施於一質點 m，其坐標爲(x,y,z)，其與原點相去之距離因之爲 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，則加於質點之吸力據 Newton 之吸力定律爲(參閱 2.7.3) $$\mathfrak{f}=\mu m\gamma\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r},$$

故 Newton 之基本方程式爲

$$\ddot{\mathfrak{x}}=\mu\gamma\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r},$$

或用矢量部分表之，得

$$\ddot{x}=-\mu\gamma\frac{x}{r^3},$$

$$\ddot{y}=-\mu\gamma\frac{y}{r^3},$$

$$\ddot{z}=-\mu\gamma\frac{z}{r^3}.$$

要而論之，若 $\mathfrak{f}$ 爲一由假設或實驗所確定之力場，其矢量部分 $X(x,y,z)$，$Y(x,y,z)$，$Z(x,y,z)$ 爲 x,y,z 之函數，則 Newton 之運動方程式 $$m\ddot{\mathfrak{x}}=\mathfrak{f},$$

或 $$m\ddot{x}=X,$$

$$m\ddot{y}=Y,$$

$$m\ddot{z}=Z,$$

實爲三個聯立微分方程式，用以規定 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$．於是力學中之基本問題，在乎求得此微分方程式之通解，更求其滿足開始運動之條件(即開始運動時之坐標 $x_0=x(0)$，$y_0=y(0)$，$z_0=z(0)$ 及速度 $\dot{x}_0=\dot{x}(0)$，$\dot{y}_0=\dot{y}(0)$，$\dot{z}_0=\dot{z}(0)$ 可層出不窮，隨情形而異，故須假定爲任意已知常數而必求其滿足者)．如是則實際之運動狀態可以詳悉無遺．

是即所謂微分方程式之求解或求積①問題

6.1.2. 能量不滅原則

根據 Newton 之運動方程式，從事推理，可以獲得種種普遍討論，為將來研討特殊問題時之基礎，前在 5.1.2. 已知有所謂功量概念. 一力場 $\mathbf{f}$ 對一質點在其運動時所作之功量，為一線積分，沿其運動途徑而施展者：

$$\int \mathbf{f}\dot{\mathbf{x}}\, dt = \int X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

苟其力場為一勢函數之陡量：

$$\mathbf{f} = \text{grad}\, \Phi,$$

則其在運動時所作功量與其運動途徑無關，僅隨途徑之起訖點而變，前在 5.1.2 已論及之. 凡力場之可表達為一勢函數之陡量者，吾人擬從 Helmholtz 之意，稱之為保守力(1)，或謂其力有保守性. 在保守力場之中，運動方程式可寫如

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad}\, U,$$

其中 U 為 x, y, z 之函數，與勢函數 Φ 之關係為 $U = -\Phi$，世常以位能或位能量稱之. 此式用矢量部分表之，為

$$m\ddot{x} = -U_x,$$
$$m\ddot{y} = -U_y,$$
$$m\ddot{z} = -U_z.$$

欲據是以求其解，因條件過於寬泛，自覺難於從事. 惟吾人可據是以推斷一重要關係，其中僅含 $x(t), y(t), z(t)$ 之初重導數，而不復含二重導數者. 試就 $m\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad}\, U$，求其兩方分別與 $\dot{\mathbf{x}}$ 之標積，則左方為 $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2}mv^2$ 對 t 之導數，而右方則為 $-U$ 對 t 之導數，因之對 t

---

①微分方程式之解常以積分稱之. 其故或由於其解法必應用積分法，可視為普通積分法之一種擴充.

(1) conservative force; konservative Kraft.

求積之結果爲

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2=-U+c,$$

其中 c 爲一常數，與 t 無關者，此關係亦可於 x 式推得之．將上列三個運動方程式分別與 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 乘之，然後相加，並對 t 求積分，則有

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+U=c$$

是爲運動能量不滅定理，其中

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}mv^2$$

謂之運動質點之動能，而 U 則爲其位能．此定理在物理學中之意義，吾人在此不欲細加分析，但求對此關係有清晰之認識可矣．茲特將其內容說明如次：

若力場有保守性，則其運動之總能量，即動能量與位能量之和不變．

至如何應用此定理之解釋或描寫運動現象，當於下段中見之．

6.1.3. 論平衡狀態

根據 Newton 之基本方程式及力場爲保守之假定，吾人可研討平衡問題．所謂平衡，在力場之影響下不動之謂．欲此事實現，其速度及加速度必始終爲零．因之其運動方程式爲

$$\text{grad } U=0;$$

故

$$U_x=0,\quad U_y=0,\quad U_z=0$$

爲平衡之必要條件．考其內容，即爲位能得其駐値之條件．循是以推，若其位能得其莫小値時，則其平衡必穩定，此種情形最饒趣味，擬略論之．平衡狀態如有小擾，換言之，離平衡而稍稍移動，不致引起如何影響，移動結果仍與原有地位相差甚微，且不久復歸原狀者，其平衡謂之穩定．其意又可精析之如次．設 R 及 G 爲任何兩正數，如能求得其他兩正數 ϵ 及 δ，其値如是小，使一質點被移至離平衡地位不大於 ϵ，其時速度

又不大於 δ 者，其質點自始至終不能到達距離平衡地點大於 R 之處，其速度又始終不能超過 G，如是則其平衡謂之穩定①.

此事之證明殊不難，且不必解答運動方程式而後始知之．吾人但假定在平衡地位上，其位能有一最小值如是．爲求簡之故，不妨假定坐標原點爲一如是之平衡點，其位能在此獲得其最小值者；如其不然，可令坐標軸作一轉動以實現之．據位能之定義，其中可加一任意常數．蓋由於 U 及 $(U+c)$ 之力場完全相同，故假定 $U(0,0,0)$ 之值爲零，自不妨礙定理之普遍性.

明乎是，吾人得以坐標原點爲中心，作一圓球 S_r 其半徑爲 r 者．據假定，U 在原點既有其最小值，吾人可選擇 $r<R$ 如是小，使 U 在球面之上及球面之內（中心除外）處處爲正．復名球面上 U 之最小值爲 a，則 a 自亦爲一正數．於是當其位能小於 a 時，此質點無論如何不能到達 S_r 之面上．考 U 既爲連續函數，自可求得一 ϵ，隨 a 而異，且如是小，使 U 之值在一球面 S_ϵ 之以原點爲中心，以 ϵ 爲半徑者不能超過 $\frac{1}{2}a$．若一質點由 S_ϵ 之一點移動，其開始移動時之速度復假定如是小，致其開始移動時之動能量不超過 $\frac{1}{2}a$：

$$T_0=\frac{1}{2}mv_0{}^2<\frac{1}{2}a$$

$\left(\text{即 } |v_0|<\sqrt{\frac{a}{m}}\right)$，則據能量不滅原則，其總能量始終必爲

$$T+U=T_0+U_0<a.$$

因 T 必大於或至少等於零，不能爲負，由是可知 U 必始終小於 a．惟如是，此質點無論如何不能到達距離原點大於 r 之處．復次，U 既不能爲負，T 必自始至終小於 a，因之其速度 v 必始終 $v<\sqrt{\frac{2a}{m}}$．復由 U 之連續性，可知 a 必隨 r 而趨於零．因此之故，必可選擇 r 如是小，使

①試想像有一球形之碗向上凹者，一質點在重力影響下墜下，而停於其最低點，即爲平衡穩定之例．若其停於一向下凹球形碗之最高點，則其平衡即不穩定，因極輕微之擾動足以引起其地位之大變也.

$\sqrt{\frac{a\cdot 2}{m}}<\rho$（但令 $a<\frac{1}{2}\rho^2 m$ 即可）．於是其速度必始終小於 ρ．由是以觀，若一質點由 S_r 之內，以速度 v 移動，如其 $v<\sqrt{\frac{a}{m}}$，則其移動始終限於 S_r 之內，其半徑 $r<R$，且其速度無論如何不能大於 ρ

6.1.4. 平衡點旁之輕微振動

穩定平衡之義，已如上述．試在穩定平衡點(即位能得其莫小值之點)之近旁，觀一質點之運動．其情形可用極簡單之近似法探討之．為研討之便，不妨假定其運動限於 xy 平面之內，即假定力場在 z 軸方向不起作用．復假定坐標原點為平衡穩定之處，則位能量在其鄰近可依 Taylor 定理展開，如

$$U=U_0+px+qy+\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+\cdots\cdots,$$

其中 p,q 及 a,b,c 分別為 U_x、U_y 及 U_{xx}、U_{xy}、U_{yy} 在原點之值．據假定，U 在原點得其莫小值，因之除 $U_0=0$ 及 $U_x(0,0)=0$, $U_y(0,0)=0$ 外，又可知下列二次式

$$Q(x,y)=\frac{1}{2}(ax^2+2xy+cy^2)$$

為正定(參閱 A3.1)．於是 U 在原點相當小之鄰近中，得以 Q 近似替代之．在此假定之下，質點在平衡點旁之運動方程式為

$$m\ddot{x}=-\operatorname{grad} Q,$$

或

$$m\ddot{x}=-ax-by,$$

$$m\ddot{y}=-bx-cy.$$

欲解此微分方程式，可將坐標軸先作一適當轉動，蓋 $ax^2+2bxy+cy^2=2Q$ 如有正定性，則將坐標軸轉動一角如

$$x=\xi\cos\phi-\eta\sin\phi,$$

$$y=\xi\sin\phi+\eta\cos\phi,$$

即可歸於如下形式

$$\alpha\xi^2+\beta\eta^2=2Q,$$

其中 ξ,η 為新垂直坐標，而 α 及 β 則為正數①．應用此新坐標，則運動方程式 $m\ddot{x}=-\text{grad}\,Q$ 將為

$$m\ddot{\xi}=-\alpha\xi,$$

$$m\ddot{\eta}=-\beta\eta$$

此兩方程式可如上卷 5.4.2 例三所論解之，得

$$\xi=A_1\sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}(t-c_1),$$

$$\eta=A_2\sin\sqrt{\frac{\beta}{m}}(t-c_2),$$

其中 A_1,A_2,c_1,c_2 為積分常數，當依任意指定之開始條件規定之．

觀此方程式之解，可見一質點在其穩定平衡點旁之運動，為依兩互相垂直方向之簡諧振動所疊合而成．其諧振動之頻率分別為 $\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ 及 $\sqrt{\frac{\beta}{m}}$．疊合結果可有層出不窮之形式，在此不能詳論，僅略舉數例於後．

若
$$\xi=\sin(t+c),$$

$$\eta=\sin(t-c),$$

則消去 t 之後，得

$$(\xi+\eta)^2\sin^2c+(\xi-\eta)^2\cos^2c=4\sin^2c\cos^2c,$$

是為一橢圓．若其振動之兩部分有同一頻率 1，及同一振幅 1，惟有一相差[1]等於 $2c$．當其相差由 0 至 $\frac{\pi}{4}$ 變化時，則橢圓將由一直線 $\xi-\eta=0$ 變至一圓 $\xi^2+\eta^2=1$，是即振動由線性變至圓性之謂（觀圖 6.1, 6.2, 6.3）．

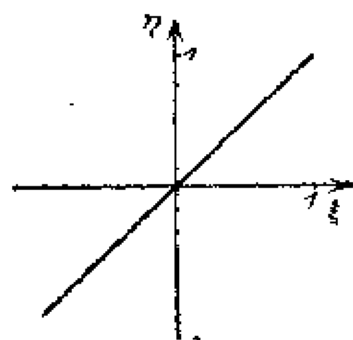


圖 6.1

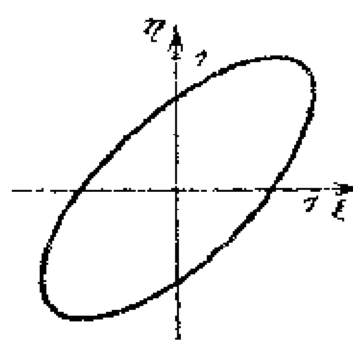


圖 6.2

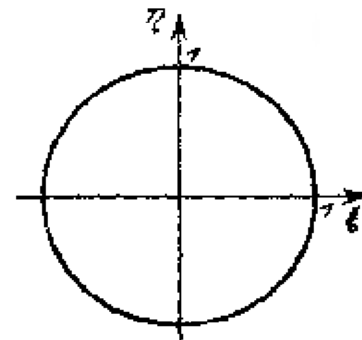


圖 6.3

①如 $Q=1$ 即為一橢圓，如將 ϕ 適當選擇，可令含有 xy 之項消滅．

(1) Difference of phase; Phasendifferenz.

復次，若一質點在平衡點旁之運動如

$$\xi = \sin t,$$

$$\eta = \sin 2(t - c),$$

兩者之振動頻率不復相等，則其振動圖表殊為複雜。茲試令 $c = 0$, $c = \frac{\pi}{8}$ 及 $c = \frac{\pi}{4}$ 作其圖如圖 6.4, 6.5, 6.6. 就前兩種情形而言，其質點在一閉合曲線上往復繼續運動，至最後一種情形，則在一拋物線 $\eta = 2\xi^2 - 1$ 上往復搖擺. 此等由互相垂直各種不同之諧振動疊合而成之曲線，世常以 Lissajous 曲線稱之.

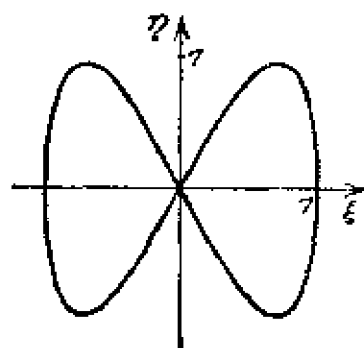


圖 6.4

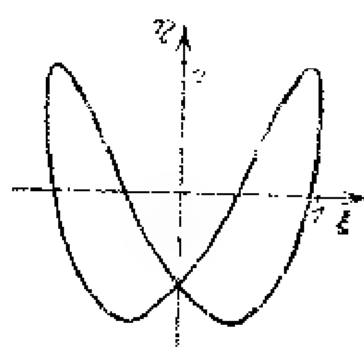


圖 6.5

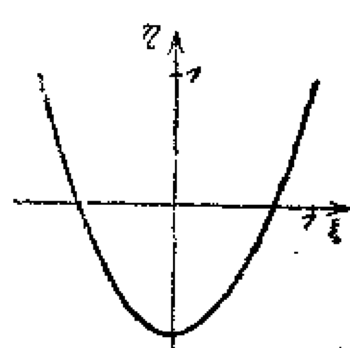


圖 6.6

6.1.5. 行星繞日運動問題

行星繞日之運動，有著名之 Kepler 三大定理規定之. 吾人茲擬由 Newton 基本方程式推論 Kepler 定理，藉以見後者為前者之必然結果，於是其所以然之故，可以大明. 設在坐標原點有一質點(如日)，其質量為 μ，對於每一質量單位所引起之吸力場為

$$\boldsymbol{f} = \gamma\mu \operatorname{grad}\frac{1}{r}.$$

在此力場之影響下，一質點(如一行星，其質量為 m，其坐標為 x, y, z)之運動當為何如. 考其運動方程式，自為

$$\ddot{x} = -\gamma\mu\frac{x}{r^3},$$

$$\ddot{y} = -\gamma\mu\frac{y}{r^3},$$

$$\ddot{z} = -\gamma\mu\frac{z}{r^3};$$

於是能量不滅原則自必成立,其形式在此爲

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{\gamma\mu m}{r}=C,$$

式中 C 爲一常數,由開始條件可以定之.復次,據上列運動方程式,又可推知一重要關係,其中僅含速度而不復含加速度,故論其性質,與能量不滅定理頗相似.試將第一式以 y 乘之,第二式以 x 乘之,然後相加,則有

$$x\ddot{y}-\ddot{x}y=0 \quad 或 \quad \frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})=0,$$

由是求積分,則 $$x\dot{y}-y\dot{x}=c_1.$$

據同理,由其他諸式,可得①

$$y\dot{z}-z\dot{y}=c_2,$$

$$z\dot{x}-x\dot{z}=c_3.$$

此三式既經過一次求積而得之,故其中僅含初重而不復含二重導數.細考之,又有其簡單之物理意義.吾人不妨假定質點在開始運動時卽 $t=0$ 時,處於 xy 平面之中,其速度矢量亦在此平面之中,於是 $z(0)=0$,又 $\dot{z}(0)=0$(讀者當知此假定毫不妨礙討論之普遍性).在此條件下,可知 $c_2=c_3=0$,故上列三式爲

$$x\dot{y}-y\dot{x}=h,$$

$$y\dot{z}-z\dot{y}=0,$$

$$z\dot{x}-x\dot{z}=0,$$

其中 h 爲一常數.據此可以推斷行星之繞日,自始至終在一平面中進行.何則,在行星與日永不互撞之條件下,可知 x,y,z 無論如何不能同時爲零.故在 $z(0)=0$ 時,可假定 $x(0)\neq 0$.於是由上列第三式,得知

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{x}\right)=-\frac{z\dot{x}-\dot{z}x}{x^2}=0,$$

從而知 $z=ax$,其中 a 爲一常數.然當 $t=0$ 時,由 $z(0)=0$ 及 $x(0)\neq 0$

①此諸式自可應用矢量以得之,茲不詳論.

可以斷定 a 為零. 因之 $z=0$, 即運動始終在 xy 平面中進行之意.

繼此所欲討論者,如何根據

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{\gamma\mu m}{r}=C,$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=h$$

兩定理,以推知行星運動之軌跡. 試改用極坐標 r, θ, 視此為 t 之待定函數,則由於

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2,$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=r^2\dot{\theta}$$

之故,此兩式即轉換於

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\gamma\mu m}{r}=C,$$

$$r^2\dot{\theta}=h.$$

前者即為能量不滅定理,由極坐標表而達之. 考後者之意,因 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ 為規定行星之半徑矢量在時間 t 時所描繪之面積對 t 之導數(上卷5.3.2),故 $r^2\dot{\theta}$ 如為一恆量,則此矢量在相等時間內所描繪之面積必相等,是即 Kepler 關於行星繞日運動之第二定理. 所當注意者,倘 $h=0$, 則 $\dot{\theta}$ 亦為 0, 於是 θ 自始至終不變其值,其意謂運動將沿一經過原點之直線進行. 此情形自必除外,故假定 $h\neq 0$.

論至此,可求索行星運動之軌跡果為何如. 將上列第二式中 $\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}$ 代入於能量不滅定理,則由於

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$$

之故,即得一微分方程式如

$$\frac{m}{2}\left\{\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}\right\}-\frac{\gamma\mu m}{r}=C,$$

或
$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=r^4\left(\frac{2C}{mh^2}+\frac{2\gamma\mu}{h^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\right).$$

由是求解，可明 r 與 θ 間之函數關係① 欲解此，當先改用 u 作積分變數以簡化之，u 與 r 之關係如

$$r = \frac{1}{u}.$$

復以

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{h^2},$$

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}.$$

則上列微分方程式卽化爲

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2,$$

由是卽得

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}}.$$

復用 $u - \frac{1}{p} = v$ 作新變數，則有

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - v^2}}.$$

此積分可由 $\arcsin \frac{vp}{\epsilon}$ 表而達之．因此遂得

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = v = \frac{\epsilon}{p}\sin(\theta - \theta_0).$$

其中 θ_0 可隨意指定，蓋開始時 θ 之值如何，於事絕無關係．如令 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，則隨之而有 $v = 0$，從而得行星運動之軌跡如

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon\cos\theta};$$

此爲一錐線，以原點爲其焦點之一者．於是得 Kepler 第一定理，謂行星繞日之軌跡爲一錐線，以日爲其焦點之一者

試更詳考積分常數

---

①此關係既明，可由 $\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = h(t - t_0)$ 以知其如何隨 t 而變．

$$p=\frac{h^2}{\gamma\mu}\quad 及\quad \epsilon^2=1+\frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

與開始條件之關係.若其錐線為一橢圓或為一雙曲線,則其正副軸之長 a 及 b 與 p 之關係為

$$p=\frac{b^2}{a},$$

在解析幾何學中已早知之.至其果為一橢圓.一拋物線或一雙曲線,當視 ϵ^2 小於、等於或大於 1 而定.復觀

$$\epsilon^2=1+\frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2},$$

可知此三種情形,得由能量常數 C 直接定之,蓋其為一橢圓、為一拋物線或一雙曲線,由 C 之小於、等於或大於零而可以知之也.

如假定一質點在 $t=0$ 時所處地位為 r_0、由此以開始速度等於 v_0 者開始運動,則

$$C=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\gamma\mu m}{r_0}.$$

於此可見 C(隨之其軌跡之為橢圓、拋物線、或雙曲線),與開始運動時之速度方向無關,僅隨 v_0 之絕對值而定,其事亦殊堪注意.

最後可推論 Kepler 之第三定理.此第三定理實為前兩定理之必然結果.如以 T 表繞行橢圓一周之時間,以 a 表橢圓正半軸之長,則其言謂

$$\frac{T^2}{a^3}=常數,$$

而此比例常數僅隨吸力場而定,與行星之性質無關.其證可求之於

$$\int_{\theta_0}^{\theta}r^2d\theta=h(t-t_0),$$

蓋繞行橢圓一周,此式之左方卽為橢圓之面積,而右方則為 hT.因之遂有

$$2\pi ab=hT\quad 或\quad 4\pi^2a^2b^2=h^2T^2.$$

惟因 $\frac{h^2}{\gamma\mu}=p=\frac{b^2}{a}$ 之故,將式中 h 消去,卽得

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\gamma\mu};$$

是卽 Kepler 之第三定理.式中 γ 為吸力場常數,而 μ 則為日之質量,

故 $\dfrac{T^2}{a^3}$ 僅與力量有關，可以見矣．

例　題

1．試證行星運動軌跡爲拋物線時，$\sqrt{\dot{x}^2}$ 在 $t\to\infty$ 時趨於 0，爲雙曲線時，其所趨極限爲一正數．

*2．設一行星在橢圓上運動．試以 $\omega=\omega(t)$ 表一角 $\angle P'MP_s$，其中 P 爲行星在 t 時之地位，P' 爲補助圓上與 P 對峙之點，P_s 爲行星在 t_s 時之地位，與日相去最近之處，而 M 則爲橢圓之中心．證 ω 與 t 間有如下 Kepler 公式成立

$$n(t-t_s)=(\omega-\epsilon\sin\omega).$$

3．試證一物體被一等於 k^2r 之力向原點吸引者，其運動軌跡爲一以 O 爲中心之橢圓．

4．試證一物體被一抗拒力 $f(r)$ 由原點推拒者，其軌跡之極坐標方程式爲

$$\theta=\int^r\frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2c}{k^2}+\dfrac{2}{k^2}\displaystyle\int^r f(r)\,dr-\dfrac{1}{r^2}}}.$$

5．試證一物體由 O 點被一等於 $\dfrac{\mu}{r^3}$ 之力抗拒，其軌跡爲

$$\frac{1}{r}=\begin{cases}\dfrac{2c}{k^2\sigma}\cos(\sigma\theta+\epsilon) & \text{當}\quad \mu<k^2\\[2ex] \dfrac{2c}{k^2\sigma}\cosh(\sigma\theta+\epsilon) & \quad \mu>k^2,\end{cases}$$

其中 $\sigma=\sqrt{\left|1-\dfrac{\mu}{k^2}\right|}$ 及 ϵ 爲積分常數．

第二節　線性微分方程式引論

物理學中之微分方程式，以線性者居多．茲擬就其中最淺易之例，溯其思想之來源，然後擴充發揮，以完成一精密之理論，其事自覺易於着手．

6.2.1.　最簡單之線性微分方程式；常數變易法

前在上卷 3.5.5，已求得微分方程式 $y'+ay+b=0$ 之通解，惟當時曾假定 a 及 b 爲常數．試假定 a 及 b 爲任何連續函數，詳考下列「線性

初重微分方程式①」: $y'+ay+b=0$,

其解亦可用普通積分法及指數函數獲得之.

請先論 $b=0$ 時之情形. 如是則此微分方程式可寫如

$$-a=\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\log|y|,$$

假定 $y\neq 0$. 於是遂得

$$\log|y|=-\int a(x)dx,$$

復以 $A(x)$ 表 $a(x)$ 之任何不定積分, 則有

$$y=ce^{-A(x)},$$

其中 c 爲一積分常數. 此即吾人欲求之通解. 即 $c=0$ 時亦爲其解, 其時 $y=0$.

上述之微分方程式, 其中 $b=0$ 者, 謂有齊性. 其意乃示方程式中各項均含未知函數. 如 $b\neq 0$, 則其微分方程式爲不齊. 兩者關係至爲密切, 如 y_1 爲齊方程式之通解, y_2 爲不齊方程式之特解, 則 y_1+y_2 必爲不齊方程式之通解.

既解一齊方程式如 $y'+ay=0$, 得其通解如 $y=ce^{-A(x)}$, 吾人可利用此通解以求解不齊方程式如 $y'+ay+b=0$, 其中 $b\neq 0$. 其法乃將通解中之積分常數改易, 以一待定函數 $u(x)$ 替代之, 然後規定 $u(x)$, 使

$$y=u(x)e^{-A(x)}$$

滿足 $y'+ay+b=0$. 是爲常數變易法(1). 因 $A'(x)=a(x)$, 又

$$y'=u'(x)e^{-A(x)}-u(x)a(x)e^{-A(x)}$$

之故, 欲此事成功, 但求 $u(x)$ 滿足下列微分方程式

$$u'(x)e^{-A(x)}=-b$$

即可. 由是得

$$u(x)=-\int b(x)e^{A(x)}dx;$$

①所謂線性, 係指未知函數及其導數之間有一次關聯性. 又微分方程式中僅有未知函數之初重導數而無高重導數出現者謂之初重微分方程式.

(1) Variation of constants. Variation der Konstanten.

其中 $A(x)$ 爲

$$A(x)=\int a(x)dx;$$

此卽欲求之 $u(x)$. 當積分時倘可加一任意常數. 旣得 $u(x)$, 則隨之卽有

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(c-\int b(x)e^{A(x)}dx\right),$$

其中

$$A(x)=\int a(x)dx.$$

是卽 $y'+ay+b=0$ 之通解. 其中含有一個任意常數 c. 雖 $A(x)$ 亦可加一任意常數, 惟將式中 $A(x)$ 以 $A(x)+c$ 代之, 仍得原有通解中之一函數, 不過將 c 易 ce^{-c} 而已.

例如有一微分方程式如

$$y'+xy+x=0,$$

則

$$A(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2,\quad \int e^{A(x)}b(x)dx=\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx=e^{\frac{x^2}{2}},$$

因之得其通解如

$$y=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c-e^{\frac{x^2}{2}}\right)=ce^{-\frac{x^2}{2}}-1.$$

6.2.2. 變數分途法

綜觀上述微分方程式之解法, 其成功原因要在於變數之分途[1]. 設一微分方程式有如下形式:

$$y'=-\frac{\alpha(x)}{\beta(y)},$$

其中 α 僅隨 x, β 僅隨 y 而變, 則此亦可寫作

$$\alpha\,dx+\beta\,dy=0,$$

或

$$\alpha\,dx=-\beta\,dy,$$

其中變數 x 及 y 已各自分途. 因之可分別求其積分如

$$A=\int\alpha\,dx,\quad B=-\int\beta\,dy.$$

惟如是, 遂有

(1) separation of variables; Trennung der Variablen

$$\frac{d}{dx}(A-B)=\alpha+\beta y'=0,$$

或

$$A-B=c.$$

其中 c 爲一積分常數．此關係可設想已向 y 解開，因之即爲欲求之解．

復次，若有一微分方程式如

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

亦可用此法以求其通解．試用 z 以代 y，其間關係爲 $z=\frac{y}{x}$，則因 $y'=xz'+z$，此方程式可變爲

$$xz'+z=f(z),$$

或

$$z'=\frac{f(z)-z}{x}.$$

其中不復含 y，故爲一規定 z 之微分方程式．觀 z 及 x 在此顯可分途，故得

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dx}{x}+c=c+\log|x|.$$

既有 $z(x)$，則 $y(x)$ 亦可隨之而得矣．

例如

$$y'=\frac{y^2}{x^2},$$

應用前法，則

$$\int\frac{dz}{z^2-z}=\log\frac{z-1}{z}=c+\log|x|,$$

從而得知

$$y=\frac{x}{1-kx},$$

其中 k 爲一常數．

例　題

1. 用變數分途法求解

　(a) $(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)dy=0.$

　(b) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$

2. 解下列微分方程式：

　(a) $y^2dx+x(x-y)dy=0.$

(b)　$xydx+(x^2+y^2)dy=0$.

(c)　$x^2-y^2+2xyy'=0$.

(d)　$(x+y)dx+(y-x)dy=0$.

(e)　$(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

3. 微分方程式之有如下形式者

$$y'=\varphi\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),\qquad (a,b,c,a_1,\cdots\cdots=\text{常數})$$

當 $ab_1-a_1b\neq0$ 時,可用下法轉換

$$\eta=ax+by+c,\qquad \xi=a_1x+b_1y+c_1$$

當 $ab_1-a_1b=0$ 時,用　$\eta=ax+by$,

使歸於一微分方程式,其中變數得各分途.證之

4. 解　(a)　$(2x+4y+3)y'=2y+x+1$.

　(b)　$(3y-7x+3)y'=3y-7x-7$.

5. 解　(a)　$y'+y\cos x=\cos x\sin x$.

　(b)　$y'-\frac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n$

　(c)　$x(x-1)y'+(1-2x)y+x^2=0$.

　(d)　$y'-\frac{2}{x}y=x^4$.

　(e)　$(1+x^2)y'+xy=\frac{1}{1+x^2}$.

6. 解　$y'+y^2=\frac{1}{x^2}$.

6.2.3. 邊值問題舉例

綜觀前論各種力學問題及其他例題,可知吾人之最後目標,乃欲就滿足微分方程式之函數族中,選擇一如是之函數,適應任何預知之起始條件,換言之,欲規定積分常數,使其解,或在相當情形之下,其導數直至 $n-1$ 重,在一確定點上獲得任意預定之值. 是即所謂始值問題[1],其在物理學上之意義,前已屢言之矣. 始值問題之外,又有所謂邊值問題[2],其目的欲求一微分方程式之解在變程之兩端或在分散於變程內

(1) initial-value problem, Anfangswertproblem.

(2) boundary-value problem, Randwertproblem.

有幾個點上獲得預先指定之值．特舉一例說明於後，至邊值問題之詳細理論，本書中自無暇討焉．

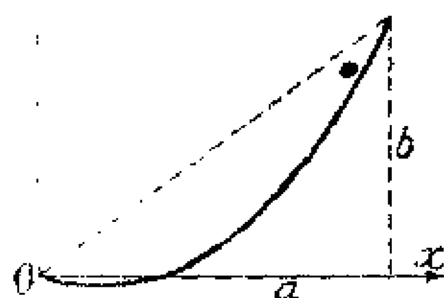


圖 6.7

試在 xy 平面中觀一負載之電纜．假定電纜沿橫軸之張力部分為一常量 S，由坐標原點起，被拉緊於 $x=a, y=b$ 一點，如圖 6.7 所示，其負重密度由一按段連續函數 $p(x)$ 決定之．如是則電纜之下垂情形，即其 y 坐標必滿足一微分方程式如

$$y''(x)=g(x),$$

式中

$$g(x)=\frac{p(x)}{S}.$$

其拉緊狀態為何如，當由此方程式之解，同時滿足 $y(0)=0$, $y(a)=b$ 者描寫之．是為一邊值問題，因其條件異常簡單，故解之殊不難．

考此問題中之微分方程式為一不齊方程式，其齊方程式為 $y''=0$，故其通解為 c_0+c_1x．既得 $y''=0$ 之通解，如能更得 $y''=g(x)$ 之一特解，則兩者相加，必為 $y''=g(x)$ 之通解．如

$$\int_0^x g(\xi)(x-\xi)d\xi,$$

即為 $y''=g(x)$ 之一特解，其初重導數在 $x=0$ 時為零者．因此之故，其通解必為

$$y(x)=c_0+c_1x+\int_0^x g(\xi)(x-\xi)d\xi$$

復要求 $y(0)=0$，則 $c_0=0$．至欲求滿足 $y(a)=b$，但由

$$b=c_1a+\int_0^a g(\xi)(a-\xi)d\xi$$

規定 c_1 即可．於是此邊值問題，得以解決．

更有進者，問題之條件，不必限於兩端．如要求一電纜除上述負荷外，更有一負荷，集中於 $x=x_0$ 一點．此種負荷可想像為一種極限，由於一負荷 $p(x)$，其作用限於 $x_0-\epsilon$ 及 $x_0+\epsilon$ 之間，然後令 $\epsilon\to0$，而後有

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} p(x)dx = P.$$

其意謂負荷總量在 $\epsilon\to 0$ 之過程中固定不易. 因之 P 即稱之為集中於 x_0 之負荷. 在 $\epsilon\to 0$ 之前, 試求 $y''=\frac{p(x)}{S}$ 之積分, 起自 $x_0-\epsilon$, 訖於 $x_0+\epsilon$, 則有

$$y'(x_0+\epsilon)-y'(x_0-\epsilon)=\frac{P}{S}.$$

然後令 $\epsilon\to 0$, 可知所謂有一負荷集中於 x_0, 即 $y(x)$ 在 x_0 作一跳躍, 而此跳躍適等於 $\frac{P}{S}$ 之謂.

明乎此, 可討論下列値邊問題. 設有一弦線, 被拉緊於 $x=0, y=0$ 及 $x=1$, $y=1$ 兩點之間。其唯一負荷為等於 P 而集中於其中點 $x=\frac{1}{2}$ 者. 欲解答此問題, 當求一連續函數 $y(x)$, 除 $x_0=\frac{1}{2}$ 一點外, 在 $0\leqq x\leqq 1$ 變程中處處滿足 $y''=0$, 在變程兩端適應 $y(0)=0, y(1)=1$, 而其初重導數在 x_0 作一跳躍, 適如 $\frac{P}{S}$ 者. 欲求此, 可將變程分作兩段, 如 $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ 為一段, $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ 又為一段. 然後分段創造函數 $y(x)$ (即 $y''=0$ 之通解) 如

$$y(x)=ax+b, \quad 當 \quad 0\leqq x\leqq\frac{1}{2},$$

及
$$y(x)=c(1-x)+d, \quad 當 \quad \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1.$$

據 $y(0)=0, y(1)=1$ 所要求, 必 $b=0$, $d=1$. 又 $y(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 既須連續, 故

$$\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}c+1$$

最後要求其初重導數經過 $x_0=\frac{1}{2}$ 時須增加 $\frac{P}{S}$, 則

$$-c-a=\frac{P}{S}.$$

由是遂得規定各常數如

$$a=1-\frac{P}{2S},\ b=0,\ c=-1-\frac{P}{2S},\ d=1,$$

而欲求之解即在於是. 至除此外別無他解, 亦不難證之.

第三節 線性微分方程式理論述要

6.3.1. 疊合原則

本節中擬就下列線性微分方程式

$$L[u]\equiv u^{(n)}(x)+a_1u^{(n-1)}(x)+\cdots\cdots+a_nu(x)=\phi(x)$$

作普遍之研討.此方程式爲 n 重微分方程式,其中 a_1、a_2,……,a_n 及 $\phi(x)$ 均爲已知函數,式之左方,常以 $L[u]$ 簡寫之,得求推理之便耳.

若 $\phi(x)$ 在規定變程中處處爲零,即 $\phi(x)=0$,則此微分方程式謂有齊性,否則謂不齊.**凡線性微分方程式之兼有齊性者,其解有疊合性,其意謂 $u_1,u_2,\cdots\cdots,u_m$ 如爲其解,則**不論 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_m$ **爲任何常數,$c_1u_1+c_2u_2+\cdots\cdots+c_mu_m$ 亦爲其解,此由**

$$L[c_1u_1+\cdots\cdots+c_mu_m]=c_1L[u_1]+\cdots\cdots+c_mL[u_m]$$

可以見之.是即所謂疊合原則.

復次,若 $v(x)$ 爲不齊方程式 $L[u]=\phi(x)$ 之一解,則其他之解,可由是加一齊方程式之解而得之.倒論之,不齊方程式之任何兩解,相差必爲齊方程式之一解.其證甚易,讀者可自求之(參閱 6.2.1).

若 $n=2$, 又 a_1,a_2 爲常數時,則一齊方程式之解,可選擇兩適當特解 u_1 及 u_2, 疊合而成之如 $c_1u_1+c_2u_2$, 其理已見上卷第十章.惟 u_1 與 u_2 必各不相倚而後可.所當注意者,此理可推廣於 n 重齊方程式,其中係數 $a_1,a_2,\cdots\cdots$, 爲任何連續函數者.欲論此,須先說明何謂函數**之線性相倚或線性關聯**(亦稱一次關聯).

設有 n 個函數, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ……, $\phi_n(x)$. **苟有 n 個常數 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$ 存在,不全爲零而滿足**

$$c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\cdots\cdots+c_n\phi_n(x)=0,$$

不論 x 在規定變區內如何變化,則此 n 個函數之間謂有線性關聯.如是可假定 $c_n\neq0$, 則 $\phi_n(x)$ 可由其他函數表達如次:

$$\phi_n(x)=a_1\phi_1(x)+\cdots\cdots+a_{n-1}\phi_{n-1}(x),$$

故 $\phi_n(x)$ 實倚其他函數而成. 苟不能有如是關係

$$c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\cdots\cdots+c_n\phi_n(x)=0$$

成立,其中 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$ 不全爲零, 則謂 $\phi_i(x)$ 各自獨立,或謂其間無線性關聯. 舉例明之如下.

〔例一〕 如 $1,x,x^2,\cdots\cdots,x^{n-1}$ 諸函數之間顯無線性關聯. 倘其有之,則將有 n 個常數 $c_0,c_1,\cdots\cdots,c_{n-1}$ 存在,致下列多項式

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$$

恆等於零. 如是則其係數將一一爲零.

〔例二〕 若 $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n$, 則 e^{a_ix} 間亦無線性關聯. 吾人可假定此定理就 $n-1$ 個此種指數函數已得證明. 倘

$$c_1e^{a_1x}+c_2e^{a_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{a_nx}=0$$

恆能成立,則將此式以 e^{a_nx} 除之,復令 $a_i-a_n=b_i$, 必有

$$c_1e^{b_1x}+c_2e^{b_2x}+\cdots\cdots+c_{n-1}e^{b_{n-1}x}+c_n=0.$$

然後對 x 求導數,則 c_n 將不復出現,由是得 $n-1$ 個函數 $e^{b_1x},e^{b_2x},\cdots\cdots,e^{b_{n-1}x}$ 間之一恆等關係,從而可知 $e^{a_1x},e^{a_2x},\cdots\cdots,e^{a_{n-1}x}$ 亦必有線性關聯存在,與假定適相牴牾. 故原有 n 個函數間,亦無線性關聯存在可能.

〔例三〕 如 $\sin x,\sin 2x,\sin 3x\cdots\cdots$, 在 $0\leqq x\leqq\pi$ 間亦無線性關聯. 此可據上卷 150 頁所證三角函數之垂直關係

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & 若\ m\neq n,\\ \pi & 若\ m=n,\end{cases}$$

而可以證之.

何謂線性關聯,既如上述,吾人乃可研討其存在之必要及充分條件爲何如. 試假定 $\phi_i(x)$ 及其導數直至 n 重皆爲連續,則有下列定理.

n 個函數 $\phi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 間有線性關聯之必要與充分條件爲

$$W=\begin{vmatrix}\phi_1(x) & \phi_2(x)\cdots\cdots\cdots & \phi_n(x)\\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x)\cdots\cdots\cdots & \phi_n'(x)\\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x)\cdots\cdots & \phi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=0,$$

在其規定變程中處處成立.又n個行列式,由其中任何$n-1$個函數組成者,在任何點上不能同時為零. 此W,世常以函數ϕ_i之Wronskian稱之.

此條件之為必要,殊覺顯而易見.蓋據

$$\Sigma c_i\phi_i(x)=0,$$

疊次求導,則有

$$\Sigma c_i\phi_i'(x)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma c_i\phi_i^{(n-1)}(x)=0;$$

如是得n個聯立齊次方程式,其解$c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$不全等於零,從可知其行列式W必等於零.

至其為充分條件,擬證之如次.由於W等於零之故,可知下列聯立方程式

$$\begin{aligned} c_1\phi_1 &+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n\phi_n &&=0,\\ c_1\phi_1' &+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n\phi_n' &&=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1\phi_1^{(n-1)} &+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n\phi_n^{(n-1)} &&=0 \end{aligned}$$

之解$c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$不能全等於零.其實c_i為x之函數.惟吾人不妨假定$c_n=1$,其事無礙於討論之普遍性.復次,吾人又可假定$n-1$個函數$\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_{n-1}$之Wronskian,姑以$V$名之,不等於零,蓋欲證之定理可假定在$n-1$個函數時已得證明,於是$V=0$之意,謂$(n-1)$個函數$\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_{n-1}$之間有線性關聯,隨之而$n$個函數$\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_n$間亦有線性關聯矣.因此必假定$V\neq 0$.然後將上列第一式求導①,同時注意第二式之成立,則有

$$c_1'\phi_1+c_2'\phi_2+\cdots\cdots+c_{n-1}'\phi_{n-1}=0;$$

據同理,將第二式求導,並注意第三式,得

$$c_1'\phi_1'+c_2'\phi_2'+\cdots\cdots+c_{n-1}'\phi_{n-1}'=0,$$

① c_i為連續可導函數,自可想見.蓋在$V\neq 0$之假定下,c_i實為ϕ_i及其導數之有理函數故也.

依此類推，直至

$$c_1'\phi_1^{(n-2)}+c_2'\phi_2^{(n-2)}+\cdots\cdots+c_{n-1}'\phi_{n-1}^{(n-2)}=0.$$

考此$(n-1)$個聯立方程式，因V不等於零之故，可知其解$c'_1, c'_2, \cdots\cdots, c_{n-1}'$必全等於零．由是知$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{n-1}$皆爲常數．因$c_n=1$，故有$n$個不全爲零之常數$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{n-1}$，足致

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)=0$$

成立，而$\phi_i(x)$間有線性關聯存在．於是得證．

論至此，吾人可提出線性微分方程式之基本定理，其言曰：**任何線性 n 重微分方程式之兼有齊性者**

$$L[u]=a_0(x)u^{(n)}(x)+a_1(x)u^{(n-1)}(x)+\cdots\cdots+a_n(x)u(x)=0,$$

必有 n 個無線性關聯之解 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$，謂其基本積分組①．其他之解，皆可由基本積分組疊合而得之，如

$$u=\sum_{i=1}^{n} c_iu_i.$$

據微分方程式理論中之存在定理(將於下節中詳證之)，謂必有唯一之解，滿足已知之起始條件．茲向$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$提出條件謂在$x=\xi$點上，$u_1$之值爲1，其導數直至$(n-1)$重之值皆爲0；又$u_i(i>1)$及其導數直至$(n-1)$重，除其$i$重導數在$x=\xi$爲1外，餘在$x=\xi$皆爲0．如是則不特$u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n$之存在絕無疑義，且其間無線性關聯，亦顯而可見．

復次，若此外更有一解u，則因

$$\sum_{i=0}^{n} a_iu^{(n-i)}=0,$$

復因u_i亦一一滿足上列微分方程式：

---

①兩種不同之基本積分組如$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$及$v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$可由下式

$$v_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}u_k$$

互相轉換，其係數c_{ik}爲常數，其行列式不等於零者．

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u_i^{(n-i)} = 0 \qquad (i=1,2,3,\cdots\cdots,n),$$

可知 $n+1$ 個函數 $u, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 之 Wronskian 必等於零，由是知此 $n+1$ 個函數必有線性關聯，惟 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 既各不相倚，則 u 必可由 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 以一次式表達之，故 u 爲 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 疊合之結果，已得證矣.

6.3.2. 二重微分方程式

讀者試將上述之理應用於二重微分方程式，其結果將異常簡單明瞭，因此種方程式在應用上所見甚多，故擬詳論之.

設有一齊性二重微分方程式如

$$L[u] = au'' + bu' + cu = 0,$$

其基本積分組如爲 u_1 及 u_2，則其 Wronskian 爲 $W = u_1 u_2' - u_2 u_1'$，又 $W' = u_1 u_2'' - u_2 u_1''$，復因

$$L[u_1] = 0 \quad 及 \quad L[u_2] = 0,$$

可以推知

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = aW' + bW = 0,$$

由是求積分，得

$$k + \log|W| = -\int \frac{b}{a} dx,$$

或

$$W = ce^{-\int \frac{b}{a} dx},$$

其中 c 爲一常數. 此關係在高深理論中應用甚廣，至如何擴張於 n 重微分方程式，讀者可自求之.

復次，上列二重微分方程式可用 $u' = uz$ 替代，隨之而有

$$u'' = u'z + uz' = uz^2 + uz'$$

轉換於

$$az' + az^2 + bz + c = 0,$$

其中不復見 u，爲規定 z 之一初重微分方程式，世常以 Riccati 方程式稱之.

復有一事，深足注意．如吾人能獲得上列二階微分方程式之一解如 $v(x)$，則問題可簡化甚多．設有一 $v(x)$，滿足 $L[v]=0$，然後令 $u=zv$，z 爲一待定之新函數，則上式可化爲

$$az''v+2az'v'+bz'v+zL[v]=avz''+(2av'+bv)z'=0,$$

是乃對 z 之一種條件．惟此條件中僅 z' 及 z''，而無 z 本身出現．因此如令 $z'=w$，則爲對 w 之一初階微分方程式，前已詳論之．既得 w，即可得 z，於是 u 亦隨之而得矣．試將此理推廣於 n 階微分方程式，如其有一解可得，即可簡化爲 $(n-1)$ 階方程式之問題．讀者可自思得之．

例如
$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$$

可歸於 Riccati 方程式如

$$z'+z^2-\frac{2}{x}z+\frac{2}{x^2}=0$$

其中 $z=\frac{y'}{y}$．復次，試略觀原方程式，可知 $y=x$ 爲其一特解，因之應用前法可歸於

$$v''=0,$$

式中 $v=\frac{y}{x}$．由是知 $v=ax+b$．故原方程式之通解爲

$$y=ax^2+bx.$$

例　題

1．設 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_k$ 爲各不相同之數，又 $P_1(x),\cdots\cdots,P_k(x)$ 爲任何多項式（不恒等於0），試證 $\varphi_1(x)=P_1(x)e^{a_1x},\cdots\cdots\varphi_k(x)=P_k(x)e^{a_kx}$ 無線性關聯．

2．下列所謂 Bernoulli 方程式

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \qquad (n\neq1)$$

可轉換於一線性微分方程式，以 $z=y^{1-n}$ 爲待定函數者．應用此理以解

(a)　$xy'+y=y^2\log x$．

(b)　$xy^2(xy'+y)=a^2$．

(c)　$(1-x^2)y'-xy=axy^2$．

3．下列 Riccati 微分方程式

$$y'+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0$$

假定能獲得其一特解 $y_1=y_1(x)$, 然可歸[illegible]一級性微分[illegible]方程式(以 $v=\frac{1}{y-y_1}$ 作待定之新函數). 應用此法以解

[illegible]

此方程式顯以 $y_1=x$ 為其特解

4. 求積分之同時滿足下列兩微分方程式者

(a) $y'=y^2+2x-x^4$ [illegible] x^4

*5. 解 [illegible]

用定積分表出之,同時並應用例題[illegible]作一草圖.

*6. 設 $y_1,y_2,y_3,$[illegible] 為[illegible]試證

[illegible]

為一常數.

7. 苟能獲得 Riccati 方程式之兩個解, [illegible] 則其通解為

[illegible]

其中 c 為一任意常數. 由是更求

[illegible]

之通解, 其解當有 $a\cos^n x$ 形式

8. 證 (a) $(1-x)y''+xy'-y=0$,

(b) $2x(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+y(2x+1)=0$,

有一共同積分. 試求之, 由是更將兩方程式完全解之.

6.3.3. 不齊微分方程式: 常數變易法

既論齊性微分方程式之後, 欲進而求其不齊方程式

$$L[u]=a_0u^{(n)}+\cdots\cdots+a_nu=\phi(x)$$

之通解, 但設法求得其一特解已足, 其故已詳於前矣(6.3.1). 然則其一特解, 將如何求之. 當齊方程式 $L[u]=0$ 已解之後, 可利用其通解, 規定其中之常數 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$, 使適應下列條件:

$$u(\xi)=0,u'(\xi)=0,\cdots\cdots,u^{(n-2)}(\xi)=0,u^{(n-1)}(\xi)=1,$$

從而得一函數, 隨輔變數 ξ 而變者, 因以 $u(x,\xi)$ 表之. 此 $u(x,\xi)$ 在

x 固定時爲 ξ 之連續函數，其對 x 之導數直至 n 重皆爲連續．例如 $u''+k^2u=0$，則 $\frac{\sin k(x-\xi)}{k}$ 即爲一如是之 $u(x,\xi)$，讀者可自驗之．既得一如是之 $u(x,\xi)$，則

$$v(x)=\int_0^x \phi(\xi)u(x,\xi)d\xi$$

必爲 $L[u]=\phi(x)$ 之一特解，其値在 $x=0$ 時連同其導數直至 $n-1$ 重在 $x=0$ 皆爲零．欲驗此，但將 $v(x)$ 對輔變數 x 疊次在積分符號下求導，並注意 $u(x,\xi)$ 在 $\xi=x$ 時之特性

$$u(x,x)=0,\ u'(x,x)=0,\ \cdots\cdots,\ u^{(n-2)}(x,x)=0,\ u^{(n-1)}(x,x)=1$$

即可$\left(u'(x,x)\text{ 之意，爲 } u'(x,x)=\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{\xi=x}\right)$．據此遂得

$$v'(x)=\phi(\xi)u(x,\xi)\Big|_{\xi=x}+\int_0^x \phi(\xi)u'(x,\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x \phi(\xi)u'(x,\xi)d\xi,$$

$$v''(x)=\phi(\xi)u'(x,\xi)\Big|_{\xi=x}+\int_0^x \phi(\xi)u''(x,\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x \phi(\xi)u''(x,\xi)d\xi,$$

……………………………………………………

$$v^{(n-1)}(x)=\phi(\xi)u^{(n-2)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}+\int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)d\xi,$$

$$v^{(n)}(x)=\phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}+\int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x,\xi)d\xi$$

$$=\phi(x)+\int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x,\xi)d\xi.$$

由是知 $v(0)=0, v'(0)=0, \cdots\cdots, v^{(n-1)}(0)=0$；復因 $L[u(x,\xi)]=0$ 之故，可見 $v(x)$ 爲滿足 $L(v)=\phi(x)$ 之一特解．

此特解亦可用常數變易法以求之．觀齊方程式 $L[u]=0$之通解，由其基本積分組疊合而成 $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i=u$，其中 c_i 爲任意常數．今將 c_i 易

以待定函數 $\gamma_i(x)$，然後規定 $\gamma_i(x)$，使

$$u = \sum \gamma_i(x) u_i(x)$$

滿足 $L[u]=\varphi(x)$，是卽所謂參數變易法，前在 [illegible] 上就最簡單之線性方程式已闡明之．惟在此待定之函數共有 n 個，而所要求者，不外 $L[u]=\varphi(x)$ 之成立，因此之故，不妨添設相當條件，以求此主要條件之易於滿足．茲擬附設下列 $n-1$ 個條件

$$\gamma_1' u_1 + \gamma_2' u_2 + \cdots + \gamma_n' u_n = 0,$$

$$\gamma_1' u_1' + \gamma_2' u_2' + \cdots + \gamma_n' u_n' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_1' u_1^{(n-2)} + \gamma_2' u_2^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n' u_n^{(n-2)} = 0;$$

由是得 u 之各頂導數如

$$u' = \sum \gamma_i u_i',$$

$$u'' = \sum \gamma_i u_i'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^{(n-1)} = \sum \gamma_i u_i^{(n-1)},$$

$$u^{(n)} = \sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} + \sum \gamma_i u_i^{(n)},$$

代入於 $L[u]=\varphi[x]$，復有

$$\sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} = \varphi(x).$$

於是得n個聯立線性方程式以規定γ_i'．其行列式適爲u_i之Wronskian，故不等於零．從而得規定 γ_i'，復經積分而得 γ_i．於是不僅一個特解，因 γ_i 中尚包含積分常數，其通解亦一舉而得之矣

此方法與前述之法，貌雖不同，其實一致．但將前述齊方程式之解 $u(x,\xi)$ 寫成

$$u(x,\xi) = \sum a_i(\xi) u_i(x),$$

卽可悟其間之關係矣．

例如 $u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{\cdots}$ [illegible]

[illegible]與之對應之齊方程式

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = 0,$$

實以 $u_1 = x, u_2 = x^2$ 爲其基本積分組，因此，如用常數變易法求其特解於

$$y = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2,$$

得條件如下：

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

由是得

$$[illegible]$$

故原有不齊方程式之通解爲

$$[illegible] + c_1 x + c_2 x^2$$

6.3.4. 再論强迫振動

最後擬應用上述之理以論强迫振動。何謂强迫振動，前在上卷第十章早已知之。爲求簡之故，兹假定爲一無阻尼運動，一質點在彈力及一外力之影響下有如下運動方程式

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = \phi(t),$$

式中表示外力之 $\phi(t)$ 不復假定有週期性。於是據 6.3.3 所述，可知

$$F(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda)\sin k(t-\lambda)\,d\lambda$$

必爲其一特解，同時滿足如下開始條件者

$$F(0) = 0, \quad \dot{F}(0) = 0.$$

因之其通解必爲

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda)\sin k(t-\lambda)\,d\lambda + c_1 \sin kt + c_2 \cos kt,$$

其中 c_1 及 c_2 爲兩積分常數。若 $\phi(t)$ 爲週期函數如 $\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$，則結果必與上卷第十章所論相符，讀者可自驗之。

例　題

*1. 試證一綫性方程式如餘有齊性者，

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

其中係數均爲常數者，必有一種基本積分組，形式如 x^{p-1} [illegible] 爲下列多項式

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots\cdots$$

之根.

2.解下列方程式

(a)　$y'''-y=0$.　　　　(b)　$y^{IV}-[illegible]y''+[illegible]y'-2y=0$.

(c)　$y'''-3y''+3y'-y=0$.　　　　(d)　[illegible]$+2y=0$.

(e)　$x^2y''+xy'-y=0$

3.設　　$a_0y+a_1y'+\cdots\cdots+a_ny^{(n)}=P(x)$

為一 n 重微分方程式,有線性,不齊,而係數為常數者,又 $P(x)$ 為一多項式. 又設 $a_0\neq0$, 試一觀下列恆等式

$$\frac{1}{a_0+a_1t+\cdots\cdots+a_nt^n}=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots\cdots,$$

並證明　　$y=b_0P(x)+b_1P'(x)+b_2P''(x)+\cdots\cdots$

為此微分方程式之一特解.若 $a_0=0$ 而 $a_1\neq0$, 則有

$$\frac{1}{a_1t+a_2t^2+\cdots\cdots+a_nt^n}=bt^{-1}+b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots\cdots$$

成立,然後證

$$y=b\int P(x)dx+b_0P(x)+b_1P'(x)+b_2P''(x)+\cdots\cdots$$

為上列微分方程式之一特解.

4.應用例題 3 之結果求下列微分方程之特解.

(a)　$y''+y=3x^2-5x$;　　(b)　$y''+y'=(1+x)^2$.

5.若 $k,a_0,a_1,\cdots\cdots$ 為實數, $P(x)$ 為一多項式,則下列方程式

$$a_0y+a_1y'+\cdots\cdots+a_ny^{(n)}=e^{kx}P(x)$$

之特解,可應用一轉換如

$$y=ze^{kx}$$

以求 z, 然後應用例題 3 之法於 z 以求之.此法用以求下列方程式之特解:

(a)　$y''+4y'+3y=3e^{x}$[illegible]　　(b)　$y''-$[illegible]$y=xe^{x}$.

6.解　　$y''-$[illegible]$y'+6y=$[illegible]

第四節　就最簡單情形討論微分方程式之基本問題

為微分方程式建立一精密理論,既非本書範圍所許.茲就最簡單情形略示梗概,藉此可以想見基本問題之所在.

6.4.1.　初重微分方程式及其幾何意義

吾人擬就一初重微分方程式開始討論.是為一微分方程式,其中除 x 及待定函數 y 之外,僅 y 之初重導數出現.故為 x,y 及 y' 三變數間之一種關係:

$$F(x,y,y')=0,$$

其中 F 自必假定對 x,y 及 y' 三者連續可導.考其意義,乃對於平面中曲線經過任何一點時之方向有所要求.假定在 xy 平面中某一區域 R 之內,如在一長方形之內, $F(x,y,y')=0$ 可向 y' 解開,得唯一之 y',由

$$y'=f(x,y)$$

表而出之,其中 $f(x,y)$ 對 x 及 y 均連續可導.於是在 R 之每一點 (x,y) 上均憑此微分方程式而得一曲線之「進展方向」.故由幾何觀點言之,一微分方程式可視為**一方向場**,所謂求解一微分方程式,其意乃欲求索適應其方向場之曲線,即如是之曲線,其切線在每點上滿足 $y'=f(x,y)$ 所要求.此種曲線,常稱之為**微分方程式之積分曲線**.

明乎此義,吾人憑觀覺,似可信 R 中每一點必有 $y'=f(x,y)$ 之一積分曲線所經過,且如是之曲線,僅有一條可能.是即所謂存在定理,精言之,得

苟一微分方程式 $y'=f(x,y)$ 中之 $f(x,y)$ 在一區域 R 中,連同其對 y 之導數處處連續,則 R 中每一點 (x_0,y_0) 必有且僅有一條積分曲線經過,換言之, $y'=f(x,y)$ 必有且僅有一解 $y(x)$ 存在,同時滿足 $y(x_0)=y_0$.

在證明此基本定理之前,擬舉淺例數則,藉觀究竟.

例如

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

就 $y<0$ 區域內觀之．其方向場中各方向均[illegible]之矢量，因之欲求之積分曲線必爲圓弧，已可觀察知之．其果然實確，可由

$$[illegible]$$

及

$$[illegible]$$

驗之．

　　試更觀

$$[illegible]$$

其方向場①中各方向，即爲連接原點[illegible]，因之其積分曲線爲 $y=cx$．

　　據同理，可見

$$y'=[illegible]$$

及

$$y'=[illegible]$$

將分別由下列兩雙曲線

$$y=\sqrt{[illegible]+x^2},$$

$$y=\frac{c}{x}$$

滿足之．

　　推存在定理之意，初重微分方程式必有一單參變之曲線族以滿足之，是乃 x 之函數，不僅隨 x 而變，其中復含一輔變數 c 者(如 $c=y_0=y(0)$)，吾人常謂其解含一積分常數．於是普通求積分問題，如欲求 $f(x)$ 之積分，可視爲微分方程式之一種特殊情形，卽爲一如是之方程式，其中 $f(x,y)$ 不含 y 者．惟如是，其方向場中之方向完全視 x 而定，其積分曲線乃可彼此向 y 軸平移而得之．明乎是，前既有繪圖求積分之法，詳載上卷第二章第四節，今可廣其意，創繪圖之法，以求微分方程式之積分曲線．試想像欲求之積分曲線，由一多邊形替代之，其每邊在其起點(或在其上任何一點)之方向由微分方程式之方向場決定之．以 R 中任何一點作爲起點，可繪一如是之多邊形，其邊愈短，則其適應方向

---

①此方向場在原點上失去唯一性．經過原點，顯有無窮多之積分曲線經過．是卽所謂微分方程式之「奇點」．

場所要求將愈見接近，由是以求其逐漸趨於極限時所趨近之曲線，即近似於通過此起點之積分曲線．此解為一種近似法，惟應用甚廣，且可不必假定 $f(x,y)$ 有一表達公式，但得 $f(x,y)$ 之草圖已足．讀者試用此法以求解微分方程式，必可對微分方程式之幾何意義有確切之認識，故不可不注意及之．

6.4.2. 曲線族之微分方程式

據微分方程式理論中之存在定理、一初階微分方程式必有一單參變之曲線族以滿足之．此理倒論之，亦為一可資研討之問題．設有一曲線族如 $\phi(x,y,c)=0$ 或 $y=g(x,c)$，其中曲線是否滿足一微方程式

$$F(x,y,y')=0,$$

此微分方程式又將如何求得之．考此方程式中不復含 c，故應用求導法之後，必繼之消去 c，如將

$$\phi(x,y,c)=0$$

對 x 求導，必有　　$\phi_x+\phi_y y'=0;$

若其中 ϕ_y 不恆等於零，又若由上列兩式可消去 c、即得欲求之微分方程式．如在一區域中可將 $\phi=0$ 對 c 解開，將 c 由 x 及 y 表而出之 $c=c(x,y)$，則代入於 ϕ_x 及 ϕ_y，可知 c 之消去必為可能之事．

例如將一族同心圓如 $x^2+y^2-c^2=0$ 對 x 求導，即得其微分方程式

$$x+yy'=0,$$

與 6.4.1 結果完全相符．又如 $(x-c)^2+y^2=1$，為一族圓，其半徑為1而中心居橫軸之上者，對 x 求導，則有

$$(x-c)+yy'=0;$$

然後由兩式消去 c，即得其微分方程式如

$$1-y^2=y^2y'^2 \quad 或 \quad y^2(1+y'^2)=1.$$

更觀一族與橫軸相切之拋物線 $y=(x-c)^2$，對 x 求導得 $y'=2(x-c)$，復消去 c，可知其微分方程式為

$$y'^2=4y.$$

細觀最後兩例,有一事深堪注意.從 $y^2(1+y'^2)=1$,除以 $(x-c)^2+y^2=1$ 爲其通解外,復有一解,即 $y=1$ 及 $y=-1$,未含於通解之中.又 $y'^2=4y$ 除 $y=(x-c)^2$ 外,復有 $y=0$ 以滿足之.然一考 $y=\pm1$ 爲 $(x-c)^2+y^2=1$ 之包線,$y=0$ 又爲 $y=(x-c)^2$ 之包線,其事亦不足爲奇.蓋曲線族之包線既與族中之線有在相切,則其適應微分方程式所規定之方向場,亦理所當然.故一積分曲線族如有一包線,則其包線必滿足同一微分方程式,可以斷言.此種包線,常稱之爲微分方程式之奇解[1].

所當注意者,一微分方程式如

$$F(x,y,y')=0$$

之奇解,不必先求得其通解,然後求其包線(如果有包線)而始得之.據存在定理所論,一微分方程式之解在一點 (x,y) 鄰近,其方程式可化爲 $y'=f(x,y)$,而 $f(x,y)$ 又爲連續可導函數時,必有唯一性.惟如是,若有一點,爲一積分曲線及奇解所經過,則在此點鄰近,$F(x,y,y')$ 之化爲 $y'=f(x,y)$ 爲不可能.復據隱函數定理,此事在 $F_{y'}\neq0$ 條件下始爲可能.由是可知奇解存在之必要條件(非充分條件)爲

$$\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')=0.$$

因此之故,據 $F=0$ 及 $F_{y'}=0$ 以消去 y',可得一 x 與 y 間之關係,即爲奇解(如果有一奇解)之方程式.故此奇解(如果存在)可用消去法直接獲得之.例如 $F\equiv y^2(1+y'^2)=1$,則 $F_{y'}=2y^2y'=0$,由是消去 y',即得 $y=\pm1$,與前所得結果相符.

據上所述,設有一區域 R,爲一曲線族 $\Phi(x,y)=c$ 所單層掩蔽,則其在每一點 P 上之切線方向可規定一方向場,以

$$y'=-\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$$

表而達之.若於每點上更作曲線之法線方向,亦可得一方向場如

(1) singular solution, singuläres Integral

$$y' = \frac{\Phi_y}{\Phi_x}.$$

此亦爲一微分方程式，其解爲一曲線族，與原有曲線族 $\Phi(x,y)=c$ 在在相交於直角，因稱之爲原有曲線族之垂直曲線族．要之，如有一族曲線，其微分方程式爲 $y'=f(x,y)$，則其垂直曲線族之方程式必爲

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

例如一族同焦點之拋物線 $y^2-2p\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$ $(p>0)$ 皆滿足下列方程式

$$y' = \frac{1}{y}\left[x+\sqrt{x^2+y^2}\right],$$

故其垂直曲線族之微分方程式爲

$$y' = \frac{-y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y}\left[x-\sqrt{x^2+y^2}\right],$$

其解爲

$$y^2-2p\left(x+\frac{p}{2}\right)=0,$$

其中 $p<0$，故爲同焦點之拋物線族，與原有曲線族亦同焦點者．

6.4.3. 求全因子

吾人可將一初重微分方程式 $y'=f(x,y)$ 寫成如下形式

$$dy-f(x,y)dx=0,$$

或

$$a(x,y)dx+b(x,y)dy=0.$$

如是可視爲一種條件，對 dx 及 dy 之變有所限制．所謂此方程式之解，乃爲一如是之函數 $y(x)$，其 dy 及 dx 滿足此關係者．吾人皆知其解在一特殊條件之下得之甚易，卽 $a\,dx+b\,dy$ 爲一函數 $F(x)$ 之全微分，換言之，有一函數存在，滿足 $a=F_x$ 及 $b=F_y$．因之此微分方程式可寫如

$$dF=0.$$

於是

$$F(x,y)=c,$$

其中 c 爲一積分常數；據是對 y 解開，卽得 y 爲 x 及 c 之函數，是卽欲求之解．

又據 5.1.4 所論，$a\,dx+b\,dy$ 如爲一函數 F 之全微分，其必要與

充分條件爲 $a_y=b_x$ 之成立．苟此條件果能成立，則 $a\,dx+b\,dy$ 之線積分與其所沿途徑獨立．當其積分起點 P_0 固定時，僅隨其終點 $P(x,y)$ 而變．此隨終點坐標而變之函數 $F(x,y)$ 即爲上列微分方程式之解．

惟一微分方程式

$$a\,dx+b\,dy=0$$

中之 a 及 b 未必能滿足 $a_y=b_x$．因此之故，吾人擬設法求得一因子 $\mu(x,y)$ 使

$$\mu(a\,dx+b\,dy)=0$$

之左方爲一全微分．此種因子 $\mu(x,y)$ 稱之爲求全因子(1)．求全因子之條件爲

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu b)}{\partial x},$$

或
$$a\mu_y-b\mu_x+(a_y-b_x)\mu=0$$

是爲一偏微分方程式，其中有待定函數 μ 之偏導數出現，其難將遠甚於原有微分方程式．雖然，在特殊情形之下，一求全因子或不難求得．苟有一 μ，足致 $\mu a\,dx+\mu b\,dy=0$ 之左方爲一全微分，則即可求得其通解．凡 $\mu a\,dx+\mu b\,dy=0$ 之解，除 $\mu(x,y)=0$ 可能亦爲其一解應置諸不論外，必同時爲 $a\,dx+b\,dy=0$ 之解．倒論之，凡 $a\,dx+b\,dy=0$ 之解，因

$$a\,dx+b\,dy=\frac{1}{\mu}dF$$

之故，可能將

$$\frac{1}{\mu(x,y)}=0$$

除外，亦必同時爲 $\mu a\,dx+\mu b\,dy=0$ 之解．由是以論，如能獲得一求全因子 μ，將 $\mu a\,dx+\mu b\,dy=0$ 之通解求得之後，則原有 $a\,dx+b\,dy=0$ 必隨之而完全解決，惟在相當情形下尚須加入 $\frac{1}{\mu}=0$，並棄去 $\mu=0$ 而已．

例如
$$y^2(x-y)\,dx+(1-3y^2x)\,dy=0$$

---

(1) integrating factor, integrierender Faktor.

之左方顯非全微分，惟有一求全因子(μ)

$$\mu = [illegible]$$

因 [illegible]

為一全微分故，因得其通解為

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{[illegible]} - 3xy = [illegible]$$

若 $\mu=0$ 在此無意義可言；惟 $\frac{1}{\mu}=$ [illegible] 之確滿足原有方程式，顯而可見.

繼此所欲討論者，為求全因子如何求索之問題．此問題之難實遠甚於原有問題，故應用求全因子之法，實際上可謂無甚意義．惟在相當條件下未始不可試求之．如假定 μ 僅隨 x 而變，則上列規定 μ 之條件可簡化為

$$b\mu_x + \mu(b_x - a_y) = 0,$$

或

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{b}(a_y - b_x);$$

由是可知

$$\frac{1}{b}(a_y - b_x)$$

若僅隨 x，不隨 y 而變之函數，則必有一求全因子 $\mu(x)$ 如

$$\log \mu(x) = \int \frac{1}{b}(a_y - b_x)dx = \phi(x)$$

或

$$\mu(x) = e^{\phi(x)}.$$

據同理，可知 $\frac{1}{a}(b_x - a_y)$ 如僅隨 y 而變，則有一 $\mu(y)$

$$\mu y = e^{\psi(y)}, \quad \psi(y) = \int \frac{1}{a}(b_x - a_y)dy.$$

類是之例甚多，讀者可自求之．

6.4.4. 解之存在與唯一

吾人現欲證明 6.4.1 所提出之存在定理．謂一初重微分方程式

$$y' = f(x, y),$$

其中 $f(x,y)$ 苟在一區域 R 之內，連同其對 y 之偏導數處處連續，則必有一解 $y(x)$，且僅有一解，滿足任意指定之開始條件．吾人可假定開始條件之形式為 $y(0)=0$．苟其不然，可改用 $\xi = x - x_0$，$\eta = y - y_0$ 代替

x, y 作變數，將微分方程式歸於

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(\xi+x_0, \eta+y_0),$$

於是開始條件變爲 $\eta(0)=0$. 故此假定並不影響討論之普遍性.

此定理之證明，可限於 $x=0$ 一點的相當小之鄰近. 如能在此證其解之存在與唯一，則在其兩端鄰近之存在與唯一亦可依法證之. 然後逐步展拓之可矣.

請先證微分方程式之解，滿足指定開始條件者，不能多於一個. 倘有兩個 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 可能，則其差 $d(x)=y_1-y_2$ 將滿足

$$d'(x)=f(x, y_1(x))-f(x, y_2(x));$$

此式之右方可據中值定理寫爲

$$d'(x)=(y_1-y_2)f_y(x, \bar{y})=d(x)f_y(x, \bar{y}),$$

其中 $\bar{y}$ 爲介於 y_1 及 y_2 間之一值. 試就原點鄰近選一鄰區如 $|x|\leqq a$, 則 y_1 及 y_2 在此必爲 x 之連續函數，且在 $x=0$ 時同等於零. 若以 b 表此兩函數之絕對值在此鄰區所不能超過之上涯，則當 $|x|\leqq a$ 時必有 $|\bar{y}|\leqq b$, 可以斷言. 復以 M 表 $|f_y|$ 在 $|x|\leqq a, |y|\leqq b$ 區域內所不能超過之值，以 D 表 $|d(x)|$ 在 $|x|\leqq a$ 之最大值，又假定 $d(x)$ 獲得其最大值時爲 $x=\xi$, 如是必有

$$|d'(x)|=|d(x)f_y(x, \bar{y})|\leqq DM,$$

因之

$$D=|d(\xi)|=\left|\int_0^\xi d'(x)dx\right|\leqq|\xi|DM\leqq aDM.$$

惟吾人可選擇 a 如是小，使 $aM<1$, 蓋 $|f_y(x, y)|$ 在 $|x|\leqq a, |y|\leqq b$ 區域內既小於 M, 當 a 縮小時，必依然小於 M. 但 a 若依 $aM<1$ 擇定之後，吾人可由 $D\leqq aMD$ 以推知 $D=0$. 故在 $|x|\leqq a$ 之內①, 可知 $y_1(x)=y_2(x)$.

應用類似於此之推理，可以證解之存在. 先用逐步接近法創造一種

①此證之要旨，實根據一簡單事實. 若一函數爲有涯，則求其積分後所得之數，當其積分變程趨零時，必以同一數量級趨零.

函數序 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \cdots\cdots$ 如下：

$$y_0(x)=0,$$

$$y_1(x)=\int_0^x f(\xi,0)d\xi,$$

$$y_2(x)=\int_0^x f(\xi,y_1(\xi))d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如是以第 n 個，規定隨於其後之第 $(n+1)$ 個函數：

$$y_n(x)=\int^x f(\xi,y_{n-1}(\xi))d\xi.$$

苟能證明此函數序在 $|x|\leqq a$ 變程中勻斂於一極限 $y(x)$，則在積分符號下可令 $n\to\infty$，從而得知

$$y(x)=\int_0^x f(\xi,y(\xi))d\xi,$$

由是求導，即得 $y'(x)=f(x,y)$，是即欲求之解.

惟此函數序在 $|x|\leqq a$ 中之勻斂，將如何證之. 試名

$$y_{n+1}(x)-y_n(x)=d_n(x),$$

並以 D 表 $|d_n(x)|$ 在 $|x|\leqq a$ 中之最大值. 據

$$d_n'(x)=y_{n+1}'-y_n'=f(x,y_n)-f(x,y_{n-1})$$

應用中值定理，得

$$d_n'(x)=d_{n-1}(x)f_y(x,\bar{y}_{n-1}(x)),$$

其中 $\bar{y}_{n-1}$ 爲介於 y_n 及 y_{n-1} 間之一值. 復考 f_y 及 f 之有涯性，可知必有常數 M 及 M_1 存在，在 $|x|\leqq a$、$|y|\leqq b$ 變區之內，有

$$|f_y(x,y)|\leqq M, \qquad |f(x,y)|\leqq M_1$$

成立. 如假定 y_n 之絕對值在 $|x|\leqq a$ 之內不能超過 b，$|y_n|\leqq b$，則據 y_{n+1} 之定義可知

$$|y_{n+1}(x)|=\left|\int_0^x f(\xi,y_n(\xi))d\xi\right|\leqq|x|M_1\leqq aM_1.$$

於是可選擇 a 如是小，使 $aM_1\leqq b$. 故在 $|x|\leqq a$ 之中，必有 $|y_{n+1}|\leqq b$. 但 $|y_0|$ 之不能超過 b，顯而可見，因此不論 n 爲任何正整數，在 $|x|\leqq a$

之中必有 $|y_n(x)|\leqq b$，可以見矣．明乎是，吾人可對

$$d_{n+1}(x)=\int_0^x f_y(\xi,y_n(\xi))d_n(\xi)d\xi$$

之右方估值，因 $|f_y|\leqq M$ 之故，可以推得 $d_{n+1}(x)$ 在 $|x|\leqq a$ 之最大值 D_{n+1} 必滿足

$$D_{n+1}\leqq aMD_n.$$

然後取 a 如是小，使 $aM\leqq q<1$．q 爲一固定分數，如 $q=\frac{3}{4}$，則

$$D_{n+1}\leqq qD_n\leqq q^n D_1$$

之眞確，自無疑義．既明以上所述，則下列無盡級數

$$d_0(x)+d_1(x)+d_2(x)+\cdots+d_{n+1}(x)+\cdots$$

之勻歛，爲當然之理．此級數中最前 n 項之和恰爲 $y_n(x)$．其中第 n 項之絕對值在 $|x|\leqq a$ 中不能超過 D_1q^{n-1}，故小於一收歛幾何級數之第 n 項．因此之故，遂可斷定此級數在 $|x|\leqq a$ 勻歛於一函數 $y(x)$．上列初重微分方程式在 $|x|\leqq a$ 有唯一之解，於是得證．

繼此尚須證明者，此存在於 $|x|\leqq a$ 之解可逐步展拓，直達一閉區 R 之邊界，假定 R 中 $f(x,y)$ 在在有連續可導性．綜觀上述證明經過，既將存在於 $|x|\leqq a$ 之解展至一點之後，必可繼續拓展一程，其長爲 a，而 a 似與前一程之端點有關．故可引以爲慮者，其展拓既如 a 之遠，而 a 或將迅速趨小；結果所至，無論如何展拓，終不能超原程一步．現欲補證者，此事決不致發生耳．

設 R' 爲一有界區域，完全處於 R 之內．如是必可求得一 b，其值如是小，致以 R' 中任何一點 (x_0,y_0) 爲中心，作一平方形如

$$x_0-b\leqq x\leqq x_0+b,\quad y_0-b\leqq y\leqq y_0+b,$$

必完全居於 R 之內．又以 M 及 M_1 分別表 $|f_y(x,y)|$ 及 $|f(x,y)|$ 在 R 中之上限，則上述證明中對於 a 之要求，但令 a 爲 b、$\frac{1}{2M}$ 及 $\frac{b}{M_1}$ 三數中最小之一數，必可一一滿足無疑．如是則 a 不復隨 (x_0,y_0) 而異．因此之故，每一次展拓，均可如 a 其遠，而 a 爲一常數．故逐步展拓之結果，必可到達 R' 之邊界．因 R' 可假定爲 R 中任何閉區，故 R 之邊

界亦必隨之而到達.吾人欲證之理,即在於是

6.4.5. 聯立微分方程式及高重微分方程式

上述之理,可推廣於聯立微分方程式之問題,假定方程式之多,適如其欲定之函數.茲就兩聯立微分方程式及兩待定函數 $y(x)$ 及 $z(y)$ 之問題

$$y' = f(x,y,z),$$

$$z' = g(x,y,z),$$

略加討論,式中 f 及 g 自必假定為連續可導函數.考此微分方程式之幾何意義,自為三維空間中之方向場.空間中每一點均有一方向以應之,其方向餘弦如 $dx:dy:dz=1:f:g$.所謂求解此微分方程式,由幾何觀點闡明之,乃欲求索空間中之曲線,以適應所指定之方向場而已.此義既明,即有解之存在問題隨之而起.於是復有一基本定理,保障解之存在及唯一,與前論一個方程式時正同.據存在定理所論,苟 f 及 g 在一區域 R 內為連續可導,則 R 中每一點必有且僅有一條積分曲線通過,於是 R 將為一雙參變之空間曲線族所掩蔽.此積分曲線族即為聯立微分方程式之解,為兩函數 $y(x)$ 及 $z(x)$,復含有兩積分常數.

聯立之初重微分方程式與高重微分方程式有密切關係,其故由於後者可藉新函數之採用而轉換於前者,例如

$$y'' = h(x,y,y')$$

為一二重微分方程式.惟將 y' 視為一新函數 z,則此式可寫如

$$y' = z,$$

$$z' = h(x,y,z);$$

是為兩個初重微分方程式,其待定函數為 $y(x)$ 及 $z(x)$.此兩問題可謂形異而實同,其一得解,其他即隨之而解也.讀者試由此觀點研討線性二重微分方程式(參閱 6.3.2)並建立其解之存在定理.

6.4.6. 用係數待定法求解微分方程式

最後吾人擬討論一相當普通之法,即所謂係數待定法者,可為求解

微分方程式時有力之一助.設

$$y'=f(x,y)$$

中之 $f(x,y)$ 可展爲 x 及 y 之冪級數,因之其對 y 及 x 之任何高重導數無不存在.如是吾人可試求其解,以一冪級數之形式出之

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$$

將其中係數依微分方程式所要求而一一規定之.欲實現此事,可先將

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots$$

代入於 $f(x,y)$ 之中,於是左右各爲 x 之冪級數.然後令其同次冪之係數相等.由是將 $c_0=c$ 之值依開始條件確定後,可望將其他係數 $c_1, c_2,$ ………一一規定.

較此更爲簡潔者有如下規定係數之法.吾人不妨假定開始條件之形式爲 $y(0)=0$,意即欲求一積分曲線,經過坐標原點者.如是則 $c_0=c=0$.其次復應用 Taylor 定理,知一冪級數之係數爲

$$c_\nu=\frac{1}{\nu!}y^{(\nu)}(0),$$

則求之自較易.因 $c_1=y'(0)=f(0,0)$;又欲求 c_2,可將微分方程式之兩方各對 x 求導,則

$$y''(x)=f_x+f_yy',$$

於此代入 $x=0$,由已知之 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=f(0,0)$,即得 $y''(0)=2c_2$ 之值.依此類推,既得 c_ν,即可從而知其隨後之 $c_{\nu+1}$.

苟 $f(x,y)$ 之冪級數在一以 $x=0$, $y=0$ 爲中心之圓內有絕對收斂性,則如上規定之級數必能斂於欲求之解.其證可求之專書,在此不能縷述.

例 題

1.試驗下列微分方程式之左方爲全微分,並求其通解:

(a) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

(b) $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$.

2. 如 M 及 N 為等次之齊次函數,討論 $Mdx+Ndy=0$ 之解法.

3. 解 $(xy^2-y^3)dx+(1-xy^2)dy=0$, 先求其僅隨 y 而變之求全因子.

4. 解 $2y^3dx+(3xy^2-1)dy=0$, 並由其通解求一求全因子.

5. 設 $f(x,y,c)=0$ 為一平面曲線族, 由是求導

$$f_x+f_y y'=0$$

並消去 c, 即得此族曲線之微分方程式:

$$F(x,y,y')=0$$

(見本卷 6.4.2). 復設 $\varphi(p)$ 為 p 之已知函數, 則曲線 C 之滿足

$$F(x,y,\varphi(Y'))=0$$

者, 常稱之為 $f(x,y,c)=0$ 之交軌. 由此兩式, 可知

$$y'=\varphi(Y')$$

即表示一種關係, 為 C 在任何一點之方向 Y' 及 $f(x,y,c)=0$ 經過此點之方向 y' 所滿足者. 其最重要情形為 $\varphi(p)=-\frac{1}{p}$, 因之遂有

$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0,$$

如是則 $f(x,y,c)=0$ 之交軌為垂直於 $f(x,y,c)=0$ 之曲線(6.4.2), 以此法求曲線與下列曲線族垂直者:

(a) $x^2+y^2+cy-1=0$.　　(b) $y=cx^2$.

(c) $\frac{x^2}{a^2+c}+\frac{y^2}{b^2+c}=1$ $(a>b>0, -b^2<c<\infty)$.

(d) $y=\cos x+c$.　　(e) $(x-c)^2+y^2=a^2$.

並作兩互相垂直曲線族之草圖.

6. 設有一族直線如 $y=cx$, 試求

(a) $y=cx$ 之對峙曲線, 其斜度兩倍於 $y=cx$ 之斜度.

(b) $y=cx$ 之對峙曲線, 其斜度一反 $y=cx$ 之斜度.

7. 微分方程式之有如下形式者:

$$y=xp+\psi(p),\qquad p=y',$$

常稱之為 Clairaut 方程式. 由是求導, 得

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0,$$

因此得 $p=c$，故　　$y=xc+\psi(c)$

爲其通解，是爲一族直線．又

$$x=-\psi'(p),$$

聯同　　$y=-p\psi'(p)+\psi(p),$

爲其奇解之輔變數方程式．此奇解爲上列直線族之包絡，不難見之．以此方法求下列方程式之奇解：

(a) $y=xp-\dfrac{p^2}{4}$．

(b) $y=xp+e^p$．

8．下列曲線

$$y=a\cosh\frac{x}{a}$$

之切線族果滿足何種方程式，試求之．

9．微分方程式之有如下形式者：

$$y=x\varphi(p)+\psi(p),$$

常稱之爲 Lagrange 方程式．由是求導，得

$$p=\varphi(p)+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

解之，可得其通解之輔變數方程式．若假定 $\varphi(p)-p\neq 0$，又 p 不等於一常數，由是可求其逆函數 $x(p)$ 之微分方程式如

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x+\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}=0,$$

此爲一線性方程式(6.3.1)，當 $\varphi(p)-p=0$ 及 $p=c$ 時將有奇解出現．

其解可由幾何觀點說明如次．試考下列 Clairaut 方程式

$$y=xp+\psi(\varphi^{-1}(p)),$$

其中 $\varphi^{-1}(p)$ 爲 $\varphi(p)$ 之逆函數，即 $\varphi^{-1}(\varphi(p))\equiv p$．實是可知其解爲下列一族直線

$$y=xc+\psi(\varphi^{-1}(c))$$

或　　$y=x\varphi(c)+\psi(c)$　　　　($c=$常數)

之交軌，如下列 Clairaut 方程式

$$y = xp + f\left(-\frac{1}{p}\right)$$

之奇解，其切線之垂直交軌必滿足

$$y = -\frac{x}{p} + \psi(p).$$

以此法求解

$$y = x(p-a) + \frac{1}{4}(p+a)^2$$

10. 將下列各方程式之解由初等函數表達之：

(a)　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = $ [illegible]；　(b)　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-y^2}$；

(c)　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = $ [illegible]；　(d)　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$；

並爲各積分曲線族作圖，從而發見有無奇解存在

11. 一微分方程式如　$f(y, y', y'') = 0$

(其中無 x 顯明出現)可用下法歸於一初重微分方程式，以 y 爲自變數，復以 $p = y'$ 爲待定函數，則

$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'p,$$

故得 $f(y, p, pp') = 0$。以此法求解如下問題

就平面曲線 Γ 上任何一點 M，作 Γ 之法線，名法線與橫軸之交點爲 N，又名 Γ 在 M 之曲率中心爲 C，試求滿足下列關係之曲線

$$MN \cdot MC = k = \text{常數},$$

就 $k>0$ 及 $k<0$ 各種可能情形討論之，並繪其略圖。

*12. 求三重微分方程式，爲下列諸圓所滿足者：

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

13. 求解

$$(xy' - y)^2 = (x^2 - y^2)\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)^2,$$

並求其奇解。

*14. 以展開於冪級數之法求

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

之解，同時滿足 $y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ 者，並證其解即爲 Bessel 函數 $J_0(x)$ (4.1 例題 4)。

第五節 吸力場之勢函數

上述各種微分方程式,其待定函數爲一個自變數之函數者,世恆以常微分方程式稱之.常微分方程式之外,又有所謂偏微分方程式,其所求函數爲多於一個自變數之函數,故爲自變數、待定函數及其偏導數間之一種關係.茲就物理學中常見之例,略述要旨,至系統研討,自非本書範圍所許.

前在 4.7.4,已知質量依 Newton 吸力定理所引起之吸力場,可由一勢函數之陡量表達之.茲特就此問題作更詳盡之研討.

6.5.1. 質量分佈之勢函數

力學中 Newton 吸引定理與電學中 Coulomb 之電荷吸引定理在形式上完全相同,故爲應用之便,假定質量 μ 可正可負,藉便電學中以電荷代替質量時,可表示正負電荷之別.設有一質量 μ,集中於空間中之一點(ξ,η,ζ),則$\frac{\mu}{r}$,其中 r 爲

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

謂其在(x,y,z)之勢函數①.於是起於 n 個不同電源或電極之勢函數 Φ 爲

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{r_i},$$

其所引起之力場爲 $\boldsymbol{f}=\gamma\operatorname{grad}\Phi$,$\gamma$ 爲一常數,與質量 μ_i 及其地位無關者.

復次,如質量未嘗集中於各自分立之點或源,而以如 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 之密度分佈於 $\xi\eta\zeta$ 空間中之一區域 R,則其質量分佈之勢函數爲

$$\Phi=\iiint\frac{\mu}{r}d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

如以密度 μ 分佈於一曲面 S 之上,則其勢函數爲

$$\iint\frac{\mu(u,v)}{r}d\sigma,$$

①此可稱爲質量(或電荷)之一勢函數.任意加一常數於此,又爲一勢函數,蓋兩者所引起之力場相同故也.

是為一施展於 S 之面積分，其面素為 $d\sigma$，而面積又假定為兩輔變數 u 及 v 表而達之者．又質量如沿一曲線而分佈，則其勢函數為

$$\int \frac{\mu(s)}{r}\,ds,$$

是為一線積分，s 為曲線之弧長，μ 為質量分佈之密度．要而言之，不論為何種形式之勢函數，

$$\Phi = 常數$$

必代表等勢曲面(1)①，而力場之矢量必處處與此相垂直．

試就質量沿一直線之分佈為例，觀其勢函數．如質量以恆等於 μ 之密度分佈於 z 軸上 $-l \leqq z \leqq l$ 一段，在平面 $z=0$ 中取一點 P，其坐標為 x 及 y，其離原點之距離為 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，則此質量分佈在 $P(x,y)$ 之勢函數為

$$\Phi(x,y)=\mu\int_{-l}^{+l}\frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+C,$$

在此加一常數，自對於其所引起之力場完全無涉．由是得

$$\Phi(x,y)=2\mu\log\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{\rho}+C.$$

若欲考其在 $l\to\infty$ 時之勢函數，可令 $C=-2\mu\log 2l$②，於是

$$\Phi(x,y)=2\mu\log\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{2l}-2\mu\log\rho.$$

然後令 $l\to\infty$，即質量所分佈之線段無限制趨大，則因 $\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{2l}$ 趨 1 之故，得

$$\Phi(x,y)=-2\mu\log\rho.$$

由是以觀，除一因子 -2μ 可以不論外，質量如以恆密度分佈於一垂直於 xy 平面之直線上，則其勢函數為

$$\log\rho=\log\sqrt{x^2+y^2}.$$

質量除上述各種分佈外，又有所謂雙層分佈(2)．試假設有一電荷 M

---

(1) equipotential surfaces; Aequipotentialflächen

①曲線在每點上之方向適如力矢量所定者，謂之力線．故力線必在在與等勢曲面相垂直．試觀一電極或有若干個電極之勢函數，其力線族之由電極流出與由一電源流出正同．若為一單獨之電極，則其力線，即為經過此電極之直線．

②此積分常數必如是選擇，使勢函數在 $l\to\infty$ 時仍為有意義數耳．

(2) double layers; Doppelbelegungen.

集中於 (ξ,η,ζ)，復有一電荷 $-M$ 集中於 $(\xi-h,\eta,\zeta)$，則兩者之勢函數為

$$\Phi=\frac{M}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{M}{\sqrt{(x-\xi+h)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

若令 h 即兩電極間之距離趨零，同時令 M 變大，使 M 始終等於 $-\frac{\mu}{h}$，μ 為一常數，如是則 Φ 將趨於

$$\mu\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right);$$

是謂**偶極**[1]之勢函數，其軸與 ξ 軸同其方向者．物理學中所謂偶極乃謂一對相處異常接近之電荷，強度相等而正負相反者．據上以推，若其軸之方向為 ν，則其勢函數得以

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)$$

表之．

復次，吾人可想像偶極以如 μ 之密度分佈於一曲面 S 之上，復假定其軸在每點上均與曲面垂直，如是則有

$$\iint_S\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

其中 $\frac{\partial}{\partial\nu}$ 為對曲面之正法線方向求導（何者為正，自可隨意指定），r 為 (x,y,z) 與 (ξ,η,ζ) 之距離，而 (ξ,η,ζ) 則在曲面 S 上變化．偶極之勢函數，可想像如下：就曲面之每一面，創造曲面，相距為 h 者，假設其一面之分佈密度為 $\frac{\mu}{2h}$，他一面為 $-\frac{\mu}{2h}$，則兩面合併，在曲面外之一點 (x,y,z) 當 $h\to0$ 時所造成之勢函數即為偶極之勢函數．惟在上列各式中自必假定 (x,y,z) 為空間中之一點，無復電荷集中，故在積分符號下始可對 x,y,z 求導．

6.5.2. 勢函數之微分方程式

(1) dipole 或 doublet; Dipol 或 Dipolpol

如上所論各種勢函數皆滿足一微分方程式如

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0,$$

此方程式常簡寫如 $\Delta\Phi=0$.

即著名之 Laplace 方程式. 蓋此方程式之必爲$\frac{1}{r}$所滿足, 自無待言, 而$\frac{1}{r}$之積分, 由於積分符號下對 x, y, z 求導之許可, 亦必滿足此方程式無疑. 至偶極之勢函數亦滿足 Laplace 方程式之故, 乃由於求導先後之可顛倒①:

$$\Delta\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\frac{1}{r}=0,$$

讀者自能得之. 復次, 若質量以恆密度分佈於一豎直於 xy 平面之直線, 如上段一例所示者, 其勢函數 $\log\sqrt{x^2+y^2}=\Phi(x,y)$ 因 $z=0$ 及 $\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0$ 之故 (2.5.3), 亦必滿足上列勢函數之微分方程式.

Laplace 方程式之研究, 在數學分析中佔一極重要地位. 其問題所在, 不在求索其通解, 而欲規定一函數, 在一指定區域 R 內連同其初重及二重導數處處連續而滿足 $\Delta\Phi=0$, 在 R 之邊界上適應任何指定條件者, 故即所謂邊值問題.

6.5.3. 雙層均勻分佈

偶極以恆等於 1 之密度, 即 $\mu=1$, 分佈於一曲面之上, 從而產生所謂雙層均勻分佈, 其勢函數爲

$$V=\iint_S\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

已如上所述矣. 此勢函數據其表達形式觀之, 有一極顯明之幾何意義. 吾人假定此曲面 S 上任何一點可由一點 P, 其坐標爲 (x,y,z) 者, 直接觀察之, 其意即謂 S 上任何一點可用一直線與 P 相連結, 而此連結兩

①惟須注意 $\frac{\partial}{\partial\nu}$ 爲對 (ξ,η,ζ) 求導, 而 Δ 中之求導, 係指對 (x,y,z). 復次, 若視$\frac{1}{r}$爲 x,y,z 及 ξ,η,ζ 六個變數之函數, 則其對 (x,y,z) 與對 (ξ,η,ζ) 可謂完全對稱, 因之

[illegible]

之成立, 至爲顯然.

點之直線與曲面不復相遇於任何其他之處. 故由 P 可直接觀曲面上任何一點. 於是此曲面 S, 連同一切射線, 將其邊界上各點與 P 相連結者, 自成一錐形區域 R. 觀 S 之邊界, 對 P 一點, 將有一立體角; 吾人所欲證者, 上列雙層分佈之勢函數, 除正負號之不論外, 即等於此立體角. 在此所謂立體角, 係指一球面之一部; 此球面乃以 P 為中心, 以 1 為半徑, 其面積之一部, 自 P 達 S 邊界之射線所割出者, 即為此立體角; 其正負, 當視經過 S 之射線方向與正法線 ν 方向是否相同而定.

欲證上述之理, 須先注意 $u=\frac{1}{r}$, 若視為 (ξ,η,ζ) 之函數, 必滿足

$$\Delta u=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0$$

吾人視 P 點為固定, 並以 (ξ,η,ζ) 表錐形區域 R 中之點, 復以 P 為中心, ρ 為半徑, 作一小球體將 R 之頂點 P 割出 R 之外, 其餘區域以 R_ρ 名之. 然後應用 Green 公式於 R_ρ, 得

$$\iiint_{R_\rho}\Delta u\ d\xi\ d\eta\ d\zeta=\iint_{S'}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,$$

其中 S' 為 R_ρ 之邊面, 而 $\frac{\partial}{\partial n}$ 則為對向外法線之求導. 因 $\Delta u=0$ 之故, 可知此式右方為零①. 若令向外法線之方向為 S 之正法線方向, 則右方面積分將分為三部: 其一, 施展於 S 之上者, 即前述之勢函數 V; 其二, 施展於射線所描繪之一部, 因其法線方向垂直於球面之半徑, 與球面 $r=c$ 相切, 故等於零; 其三, 施展於以 ρ 為半徑, 以 P 為中心之小球體面積之一部 Γ_ρ, 在此 $\frac{\partial}{\partial n}$ 自為 $-\frac{\partial}{\partial \rho}$ 之意. 因此之故, 遂得

$$V-\iint_{\Gamma_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)d\sigma=0,$$

或

$$V=-\frac{1}{\rho^2}\iint_{\Gamma_\rho}d\sigma;$$

復以 $d\sigma=\rho^2 d\omega$, 其中 $d\omega$ 為單位球面元素, 得

①由是可知應用 Green 公式之結果, 任何面積分 $\iint\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$, 施展於一閉合曲面, 若 u 在曲面之內處處滿足 $\Delta u=0$, 必為零無疑.

$$V = -\iint d\omega,$$

是卽吾人所欲闡明之幾何意義.

若 S 對 P 所處地位不若前述之簡單,如可被經過 P 點之射線相交於多處時,吾人可將 S 分作若干較簡部分,以求上述定理之依然有效.若 S 爲一週合曲面,則可分爲兩個有邊界曲面,當 P 在其中時,$V=-4\pi$,P 在其外時,$V=0$.其理甚顯,讀者可自思得之.

據同理,可知質量分佈於一曲線上之勢函數

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu}(\log r)ds$$

除正負不論外,亦等於此曲線在 P 點所對之角.

要之,上述幾何意義,不論爲平面或空間,皆可如下闡明之.設 Q 爲曲線 C 上之一點,其坐標爲 (ξ,η),則 $\log r$ 在 Q 點對法線方向求導,必有

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\log r) = \frac{\partial}{\partial r}\log r \cdot \cos(\nu,r) = \frac{1}{r}\cos(\nu,r),$$

其中 (ν,r) 爲法線與矢徑方向 r 所夾成之角.復用極坐標 (r,θ) 可將弧長表達如(上卷 5.3.3)

$$ds = \frac{r\,d\theta}{\cos(\nu,r)},$$

因之

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu}\log r\,ds = \int \frac{1}{r}\cos(\nu,r)\frac{r\,d\theta}{\cos(\nu,r)} = \int d\theta,$$

是卽欲證之理.

6.5.4. 勢函數之中值定理

任何勢函數,卽在一區域 R 之內滿足 Laplace 方程式 $\Delta u=0$ 之函數,均有一重要特性,由如下定理說明之:

設有一任何球體,其中心爲 P,半徑爲 r,完全處於一區域 R 之內.如是則勢函數在其中心 P 之値必等於其在球面 S_r 之中値,換言之,如以 $u(x,y,z)$ 表其在 P 之値,又以 $\bar{u}$ 表其在球面 S_r 上之值,則

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}u\,d\sigma$$

欲證此定理,可先取一球體 S_ρ,與 S_r 同心,完全處於 S_r 之中,因之其半徑 ρ 為 $0<\rho\leqq r$.因 $\Delta u=0$ 在 S_r 之內處處成立,故應用 Green 公式結果必有

$$\iint_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0,$$

其中$\frac{\partial u}{\partial n}$為 u 對 S_ρ 之向外法線求導.若以 (ξ,η,ζ) 為流動坐標,以 (x,y,z)為極,應用球面坐標如

$$\xi-x=\rho\cos\phi\sin\theta,\quad \eta-y=\rho\sin\phi\sin\theta,\quad \zeta-z=\rho\cos\theta,$$

則上式一變而為

$$\iint_{S_\rho}\frac{\partial u(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}d\sigma=0$$

復因 S_ρ 之面素 $d\sigma$ 等於 $\rho^2 d\bar\sigma$,$d\bar\sigma$ 為單位球面(半徑為 1 者)元素,則由 $\rho>0$,可知

$$\iint_{S}\frac{\partial u}{\partial\rho}d\bar\sigma=0,$$

其積分變區不復與 ρ 有關.於是遂得

$$\int_0^r d\rho\iint_{S}\frac{\partial u}{\partial\rho}d\bar\sigma=0.$$

然後將積分次序顛倒,並先對 ρ 求積,則

$$\iint_{S}[u(r,\theta,\phi)-u(0,\theta,\phi)]d\bar\sigma=0.$$

因 $u(0,\theta,\phi)=u(x,y,z)$與 θ 及 ϕ 之變無關,遂得

$$\iint_{S}u(r,\theta,\phi)d\bar\sigma=u(x,y,z)\iint_{S}d\bar\sigma=4\pi u(x,y,z).$$

惟因 $\iint_{S}u(r,\theta,\phi)d\bar\sigma=\frac{1}{r^2}\iint_{S_r}u(r,\theta,\phi)d\sigma,$

考列於右方之面積分乃就 S_r 而施展者,故欲證之中值定理,已在於是.

據同理,設有一圓,以(x,y)為中心,r 為半徑者,復有一$u(x,y)$為滿足 Laplace 方程式之勢函數,則 $u(x,y)$ 對此亦有中值性可言,其意謂

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\int \bar{u}\,ds$$

其中 $\bar{u}$ 為 u 在圓周上之值,圓之半徑為 r,其弧長以 ds 表之者.

6.5.5. 以圓為變區討論 Laplace 方程式之邊值問題; Poisson 之積分.

茲擬討論一簡單例題,藉明 Laplace 方程式之邊值問題①如何得解.試假定變區之邊界為一圓周;在圓形變區中 $x^2+y^2\leqq R^2$ 自以應用極坐標為便.吾人所欲求索者為一函數 $u(x,y)$,在圓內及圓周上處處連續,其初重及二重導數在圓內亦為連續,復滿足 $\Delta u=0$,在圓周之上並適有指定之值如 $u(R,\theta)=f(\theta)$ 者.又假定 $f(\theta)$ 為連續週期函數,並有按段連續之初重導數.此邊值問題將由如下積分解之:

$$u=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+r^2}d\alpha,$$

是即所謂 Poisson 之積分.

欲證此積分確為上述邊值問題之解,可先設法求 Laplace 方程式之特解,然後一一疊合之(Laplace 方程式為線性而兼有齊性,雖為偏微分方程式,疊合原則依然有效).考 Laplace 方程式轉換於極坐標之後為

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,$$

於此可試求特解之有 $u=\phi(r)\psi(\theta)$ 形式者,其中 $\phi(r)$ 僅隨 r 而變,$\psi(\theta)$ 僅隨 θ 而變.代入上式,即有

$$r\frac{[r\phi'(r)]_r}{\phi(r)}=-\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)},$$

式中左方不復含 θ,右方不復含 r,故兩方必等於同一常數 k.由是得 $\psi''+k\psi=0$ 以規定 $\psi(\theta)$.復因 u 必為一週期函數,故 $\psi(\theta)$亦隨之而

① Laplace 方程式[illegible]

為一週期函數,其週期為 2π 者,於是可知 k 必等於 n^2(n 為一整數). 惟如是,遂得

$$\psi(\theta)=a\cos n\theta+b\sin n\theta.$$

其中 a 及 b 為兩任意常數.

又考規定 $\varphi(r)$ 之條件:

$$r^2\varphi''(r)+r\varphi'(r)-n^2\varphi(r)=0,$$

為一線性微分方程式,其特解為 r^n 及 r^{-n},由一望可知,惟 r^{-n} 在原點無限制趨大,與 u 在原點必須連續之要求不合,故置而不用. 因此吾人僅取 $\varphi=r^n$, 得 Laplace 方程式之特解如

$$r^n(a\cos n\theta+b\sin n\theta).$$

然後據疊合原則,可知

$$\frac{1}{2}a_0+\Sigma r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

亦必滿足 Laplace 方程式,但求無盡級數在圓內勻斂,並可兩次逐項求導足矣.

欲求如是疊合而成之解,在圓周上取得應有之邊值,可在前述關於 $f(\theta)$ 所假定之條件下,將 $f(\theta)$ 展開為一 Fourier 級數

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

此級數自必勻斂且絕對斂(上卷 9.4.1). 因此之故,

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

在圓內之勻斂及絕對斂,自更無疑義. 此級數在 $r<R$ 時又可逐項求導,蓋逐項求導之結果又為勻斂級數(上卷 8.4.2). 由是知此函數必為一勢函數,當 $r\to R$ 時趨於應有之邊值,故為此邊值問題之解,可以識矣.

如是獲得之解,可寫成積分形式. 考 Fourier 係數 a_n 及 b_n 為

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha,$$

因收斂之有勻性，可將求積與疊加互易先後，得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\alpha)\right]d\alpha,$$

故如能證明

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n\tau=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\tau+r^2},$$

則 Poisson 積分之眞確，即可成立．此式可用上卷 9.2.3 之法推之，讀者自求之可矣．

例　題

1．用倒徑構影法於 Poisson 公式，就單位圓之外區求一勢函數，在圓周上取得指定邊值 $f(\theta)$ 者．

*2．設有質量，以恆等於 μ 之密度分佈於一直線線段 $x=0,\ y=0,\ -l\leqq z\leqq l$，求其 (a) 等勢曲面及 (b) 勢函數之力線．

*3．荀已知一勢函數 $u(x,y,z)$ 及其對法線導數 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在一閉合曲面上之值，試證此勢函數在任何內點之值為

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right\}d\sigma.$$

其中 r 為 (x,y,z) 與積分變區中一點之距離（提示：應用 Green 公式於 u 及 $\frac{1}{r}$）．

第六節　波動之微分方程式

6.6.1．單維波之傳播

近代物理學視光、電、聲均為一種波之傳播．茲先討論最簡單且近於理想之所謂單維波，僅隨一個空間坐標而變者．欲明波之傳播現象，必選擇描寫其現象之一種特性 u，如壓力，如質點地位之變動，如電磁場之強度等，然後考其如何隨 x（假定向 x 軸之方向而傳播）及時間 t 而變．據物理學中之假設，此函數 $u(x,t)$ 常滿足一偏微分方程式如

$$u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{tt};$$

其中a為一常數,視傳播時介質之不同而異者.是即所謂波動之微分方程式.

細觀此微分方程式,可知

$$u=f(x-at)$$

必能滿足之,假定$f(\xi)$為ξ之任意函數,其初重及二重導數皆為連續者.蓋令$\xi=x-at$,可知$u_{xx}=f''(\xi)$,又$u_{tt}=a^2f''(\xi)$,故其必為波動方程式之一解,顯而可見.據同理,可於$u=g(x+at)$之中又得其解,假定$g(x+at)$為$x+at$之任意函數,並有連續之初重及二重偏導數.於是根據疊合原則,可知

$$u=f(x-at)+g(x+at)$$

亦必滿足之,故此即為其通解.倒而論之,如以$\xi=x-at$及$\eta=x+at$代替x及t作變數,將波動微分方程式轉換於$u_{\xi\eta}=0$,可知其通解亦非有如是形式不可.

細考$u=f(x-at)$之意義,實描寫一種波浪,以等於a之速度,沿正x軸傳播者.何以言之.如時間為t_1,空間在x_1時,u之值自為$u(x_1,t_1)$,此同一之值將於x及t滿足$x-at=x_1-at_1$時復得之;蓋若$x-at=x_1-at_1$,則有$f(x-at)=f(x_1-at_1)$.然滿足$x-at=x_1-at_1$關係之x及t,其多無限,但令t任意固定,x如$x=x_1+a(t-t_1)$皆是.於是可見$u=f(x-at)$所描寫之現象,以如a之速度,沿x軸之正向進行,周而復始,循環不已.據同理,乃知$u=g(x+at)$實描寫一種以如a之速度沿負x軸傳播之波動.

既明此,可求解波動方程式之始值問題,即由上述可能之解,求得一適應開始條件之解.設已知$t=0$時波動之情形,即假定有兩開始條件如$u(x,0)=\phi(x)$及$u_t(x,0)=\psi(x)$,則欲求其適應,必

$$\phi(x)=f(x)+g(x),$$
$$\frac{1}{a}\psi(x)=-f'(x)+g'(x)$$

成立而後可.觀後一式所要求,無異謂

$$c+\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau = f(x)-g(x),$$

其中 c 爲一任意常數.由是遂得欲求之解如

$$u(x,t)=\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau.$$

6.6.2. 空間波之傳播

如假定波動方程式中之待定函數 u,除隨時間 t 而變外,隨三個空間坐標 x,y,z 而變,則有所謂空間波,其微分方程式爲

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{1}{a^2}u_{tt},$$

或簡寫如
$$\Delta u=\frac{1}{a^2}u_{tt}.$$

任何函數 $f(\xi)$,如其初重及二重導數皆連續者,必能滿足此微分方程式,苟其中 ξ 爲

$$\xi=\alpha x+\beta y+\gamma z\pm at,$$

其係數又滿足
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

據求導結果,既有

$$\Delta u=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)f''(\xi)=f''(\xi),$$

及
$$u_{tt}=a^2f''(\xi),$$

故 $u=f(\alpha x+\beta y+\gamma z\pm at)$ 必爲

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}u_{tt}$$

之解,顯而可見.

明乎是,若以 q 表某一點 (x,y,z) 與一平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 相去之距離,則

$$q=\alpha x+\beta y+\gamma z.$$

於是由
$$u=f(q\pm at),$$

得一重要發見.試作平面,與 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 相平行,而相去距離爲 q 者,在此種平面之中,描寫現象特性之 u 在某一時間 t 必爲一恆量. 此

特性 u 在空間內不論如何傳播，其值在此種平行於 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 之平面中必為一常數，故其傳播速度為 a. 而傳播之方向則垂直於此種平面. 此種現象，即物理學中之所謂**平面波**.

上述波動之週期性，係對空間而言. 波之傳播，同時又為時間之週期函數. 如以 ω 表波動之頻率，則此種現象，可於

$$u=e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}e^{i\omega t}$$

見之. 若以 λ 表波長，則 $k=\frac{1}{\lambda}=\frac{\omega}{a}$.

復次，又有所謂**球面波**者，由一點(假定為原點)出發，向各方向傳播，故 u 之值在同心球面上保持不變. 欲明此，可將 Δu 轉換於極坐標 (r,θ,ϕ)，復假定 u 僅隨 r 及 t 而變，與 θ 及 ϕ 無關. 於是波動微分方程式將隨之而有如下形式：

$$u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=\frac{1}{a^2}u_{tt},$$

或寫如　　$$(ru)_{rr}=\frac{1}{a^2}(ru)_{tt}.$$

若暫令 $ru=w$，則 w 實滿足

$$w_{rr}=\frac{1}{a^2}w_{tt};$$

由是即得　　$$w=f(r-at)+g(r+at),$$

從而得知　　$$u=\frac{1}{r}\left\{f(r-at)+g(r+at)\right\},$$

是乃描寫一種波浪，由中心以如 a 之速度向各方向傳播者，世常以球面波稱之.

6.6.3. Maxwell 電學方程式

Maxwell 方程式為近代電磁學之最後基礎，種種複雜之電磁現象均藉此而得一圓滿之解釋. 本書中自不能對此作詳盡之研討，但借此以闡明前述之數學概念而已.

苟空間內無特殊介質，則電磁現象可由兩矢量描寫之. 其一為電場

矢量 $\boldsymbol{E}$，其矢量部分爲 E_1, E_2, E_3. 其二爲磁場矢量 $\boldsymbol{H}$，其矢量部分爲 H_1, H_2, H_3. 此兩矢量滿足 Maxwell 方程式

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0,$$

其中 c 爲光之速度. 若以矢量部分寫出之，則 Maxwell 方程式爲六個初重偏微分方程式如下：

$$\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t}=0;$$

及

$$\frac{\partial H_3}{\partial y}-\frac{\partial H_2}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}-\frac{\partial H_3}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}-\frac{\partial H_1}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t}=0.$$

根據 Maxwell 方程式，可推得數種重要結果. 試就兩方程式求散度，則因 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$ 及對時間求導與求散度可互易先後，遂得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\text{常數},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=\text{常數};$$

意卽此兩矢量場之散度不隨時間而變，故在 $t=0$ 時如爲零，將始終爲零.

復次，設有一迴合曲面 S，完全處於電磁場之內，試一考下列三重積分

$$\iiint \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, d\tau$$

及

$$\iiint \operatorname{div} \boldsymbol{H}\, d\tau$$

施展於 S 所圍之體積，於此應用 Gauss 定理，此三重積分將變為 E_n 及 H_n（矢量之法線部分）之面積分，施展於 S 之面上者．因此之故，據

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

可以推斷

$$\iint_S E_n\, d\sigma = 0,$$

$$\iint_S H_n\, d\sigma = 0.$$

此兩個面積分在電學理論中常分別以經過曲面 S 之電通量及磁通量稱之．由是以觀，在上述假定之下，經過一閉合曲面之電通量及磁通量必為零．

若以 A_n 表一矢量 $\boldsymbol{A}$ 對曲面法線之矢量部分，則據 Maxwell 方程式必有

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_n = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_n}{\partial t},$$

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{H})_n = +\frac{1}{c}\frac{\partial E_n}{\partial t}.$$

試求其面積分，復據 Stokes 定理轉換於一線積分，沿曲面 S 之邊界 Γ 而積者，則

$$\int_\Gamma E_s\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S H_n\, d\sigma,$$

$$\int_\Gamma H_s\, ds = +\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S E_n\, d\sigma,$$

其中 E_s 及 H_s 乃分別表電場及磁場矢量沿邊界之切線部分，又繞行邊界時，以 s 增大方向為正向，此正向與 n 之方向又成一右手螺旋者．如

是可知上列關係之意，乃謂電磁力沿一曲面元素之線積分，實與經過此曲面元素之電磁通量之變率成比例關係，其比例常數則為 $-\frac{1}{c}$ 或 $+\frac{1}{c}$.

最後吾人擬一論 Maxwell 方程式與波動方程式之關係. 吾人所欲說明者，不論為電場或磁場矢量，皆滿足波動微分方程式. 蓋將Maxwell第二式對 t 求導，復將第一式中之 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ 代入其中，從而消去 $\boldsymbol{H}$，即有

$$c\,\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0.$$

復應用

$$\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{A} = -\Delta\boldsymbol{A} + \mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{A},$$

並注意

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0,$$

即得

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}.$$

據同理，可知 $\boldsymbol{H}$ 亦必滿足

$$\Delta\boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}.$$

例　題

1. 求解下列偏微分方程式:

$$(a)\ u_{xy} = 0;$$

$$(b)\ u_{xyz} = 0;$$

$$(c)\ u_{xy} = u(x, y).$$

*2. 將 $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = e^{x+y}$ 轉換於例題 1(c) 之形式，然後解之.

3. 求下列雙參變球面族之偏微分方程式:

$$z^2 = 1 - (x-a)^2 - (y-b)^2.$$

*4. 設 $u(x, t)$ 為波動方程式

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2}u_{tt} \qquad (a>0)$$

之一解，其初重及二重導數皆連續者. 又設 $\varphi(x)$ 為一已知函數，其導數至二重亦連續，而又滿足

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0.$$

試求一解 u，在 $x \geqq 0$ 及 $t \geqq 0$ 時滿足波動方程式，而又適合下列開始及邊界條件

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0 \qquad 當\ x\geq 0$$

$$u(0,t)=\varphi(t) \qquad 當\ t\geq 0$$

5. 用展開爲冪級數之法,求

$$u_{xy}=u$$

之解,同時適應 $u(x,0)=u(0,y)=1$ 者.

6. (a)求 $u_x^2+u_y^2=1$ 之特解,有 $u=f(x)+g(y)$ 形式者.

(b)求 $u_xu_y=1$ 之特解,其形式爲 $u=f(x)+g(y)$ 及 $u=f(x)g(y)$ 者.

*7. 設 $z=u(x,y,a,b)$ 爲一初重偏微分方程式

$$F(x,y,z,z_x,z_y)=0$$

之解,其中有兩參變數 a,b 者.試由此雙參變曲面族 $z=u(x,y,a,b)$ 任意抽出一單參變族,則其包面亦必爲此微分方程式之解.證之.

8. 以題 7 所得結果求題 6(b) 其他之解,令 $u=ax+\frac{1}{a}y+b$ 而 b 與 a 之間發生一種關係如 $b=ka$ (k 爲常數),其意卽爲由雙參變曲面抽出一單參變族.

第七章　複函數之微積分學

複數爲數學推理之必要工具，吾人無不公認之．因此之故，變數之變化範圍，自不能限於實數，而必擴張於複數．複數之運算原理，與實數完全相同，自無待論．所欲略述者，爲極限與函數定義在複數範圍內之建立．

設有複數組成之數序 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots$；若 $|z_n - z|$ 當 $n\to\infty$ 時趨零，其意自包括 $z_n - z$ 之實部與虛部各趨於零，則 z 謂 z_n 之極限，或謂 z_n 向 z 收斂．複數數序 z_n 向一極限 z 收斂之必要與充分條件爲 Cauchy 審斂法，即 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}|z_n - z_m| = 0$．

設 $z=x+iy$ 在 z 平面中一變區 R 之內任意變化，其中每一點 $z=x+iy$ 必有一複數 $\zeta=u+iv$，據一確定法則以應之，則 ζ 謂 z 之複變函數或簡稱爲複函數．此定義所包函數，異常廣泛，欲據此以研究，自覺無從着手．因此擬設可導性或可積性之條件以限制之，從而創造複函數之微積分學．

第一節　複函數之可導性

7.1.1.　Cauchy-Riemann 之微分方程式

設有一複函數

$$\zeta = u + iv = f(z) = f(x+iy),$$

其自變數 $z=x+iy$ 之變區爲 R．吾人不僅要求其實部與虛部 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$，連同其偏導數 u_x, u_y, v_x, v_y 在 R 之連續，復要求下列極限之存在

$$\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1 - z} = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

式中 z 爲 R 中任何固定之點．苟此極限不論 z_1 如何趨於 z_1 均能存在，

則 $f(z)$ 在 z 謂之可導，其存在之極限謂 $f'(z)$ 之導數，而以

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

表之.

欲求此極限存在，$u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 兩函數之連續可導，顯見不足.考複函數之可導，其所要求遠過於 u 及 v 之連續可導，因 $h=r+is$ 爲一複變數，可任意趨小；不論其爲實値（即 $s=0$）或爲虛値（即 $r=0$）而趨零，或竟沿任何途徑而趨零，必有唯一極限 $f'(z)$ 存在，則 $f(z)$ 始得謂之可導.

例如 $f(z)=f(x+iy)=x$，其中 $u=x$，$v=0$，爲連續可導，自無待言.然令 $h=r$，則

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(z+r)-f(z)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{x+r-x}{r}=1,$$

令 $h=is$，則

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(z+is)-f(z)}{is}=\lim_{s\to 0}\frac{0}{is}=0,$$

於是得兩不同極限，故 $f(z)$ 爲不可導.他如 $\zeta=u+iv=x+2iy$，其導數亦不能存在.

複函數之導數問題，有如下定理以解答之.苟 $\zeta=u(x,y)+iv(x,y)=f(z)=f(x+iy)$，其中 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 爲連續可導，則 $f(z)$ 在其複變區域可導之必要與充分條件爲

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

之成立.此條件世常以 Cauchy-Riemann 微分方程式稱之.如 u 及 v 在一變區內果滿足此條件，則 $f(z)$ 稱之爲複變數 z 之解析函數[1]（或正規函數），其導數爲

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=u_x+iv_x=v_y-iu_y=\frac{1}{i}(u_y+iv_y).$$

請先證 Cauchy-Riemann 微分方程式爲 $f'(z)$ 存在之必要條件.在 $f'(z)$ 存在之假定下，令 h 之値爲實數，$h=r$，其所得極限

(1) analytic function; analytische Funktion

$$f'(z)=\lim_{r\to 0}\frac{u(x+r,y)-u(x,y)}{r}+i\frac{v(x+r,y)-v(x,y)}{r}=u_x+iv_x,$$

必與 $h=is$ 當 $s\to 0$ 時之極限相等.

$$f'(z)=\lim_{s\to 0}\frac{u(x,y+s)-u(x,y)}{is}+i\frac{v(x,y+s)-v(x,y)}{is}$$

$$=\frac{1}{i}(u_y+iv_y).$$

故由
$$u_x+iv_x=\frac{1}{i}(u_y+iv_y)$$
可以推得 Cauchy-Riemann 方程式.

至其亦爲充分條件,可證之如下.由

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

$$=\frac{u(x+r,y+s)-u(x,y)+i[v(x+r,y+s)-v(x,y)]}{r+is},$$

應用中值定理,得

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{ru_x+su_y+irv_x+isv_y+\epsilon_1|h|+\epsilon_2|h|}{r+is},$$

其中 ϵ_1 及 ϵ_2 爲兩實數,隨 $|h|=\sqrt{r^2+s^2}$ 而趨零者.於是在 Cauchy-Riemann 方程式成立之假定下,此可寫爲

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=u_x+iv_x+\epsilon_1\frac{|h|}{r+is}+\epsilon_2\frac{|h|}{r+is}.$$

由是可見,不論 h 如何趨零,其所趨極限必爲 u_x+iv_x, 同時卽爲 $\frac{1}{i}(u_y+iv_y)$, 是卽欲證之理.

此理得證之後, 吾人卽有一簡易之法, 以決定一複函數之是否可導.導數之定義,就其形式計之,與前實函數之導數完全相似.因此從前各種求導之法,在此可一一證明之.如解析函數相加、相減、相乘、相除之結果可依從前所述各種求導法求其導數,因之必仍爲解析函數.如多項式
$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots$$

亦爲解析函數.又解析函數之解析函數可依鏈導法求導,故仍爲解析函數.復次,如一解析函數之導數在一鏈區 R 中處處爲零,則其函數必爲一常數.蓋由 $u_x+iv_x=0$ 處處成立,可知 $u_x=0$, $v_x=0$, 由是復據 Cauchy-Riemann 方程式知 $v_y=0$, $u_y=0$, 故 u 及 v 均爲常數,隨之而 ζ 亦爲常數.

7.1.2. **保角攝影;解析函數之逆函數**

解析函數復可由幾何觀點闡明之.設有一解析函數

$$\zeta=u(x,y)+iv(x,y),$$

其中 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$,據 3.3.1 所論,可有一極簡明之解釋,即 z 平面(或 xy 平面)中之點轉換或攝影於 ζ 平面(或 uv 平面).考其轉換之 Jacobian 適爲導數 $f'(z)$ 之絕對值自乘:

$$D=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=u_xv_y-u_yv_x=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2,$$

故不等於零,且當 $f'(z)\neq 0$ 時必爲正數.因此之故,如 $f'(z)\neq 0$,則 z 平面中一點 z_0 之相當小鄰近必可轉換於 $\zeta_0=f(z_0)$ 之鄰近,且其轉換必爲唯一、連續而又可逆.復次,任何兩曲線間之角,經此攝影之後,仍保持其大小與正負,換言之,其攝影有保角性.其理已詳 3.4.2,故不贅.由是以論,複函數 $f(z)=u+iv$ 之解析性與 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 攝影之保角性,在 $f'(z)\neq 0$ 假定之下,意義完全相同.讀者試將第三章中所舉保角攝影之例由解析函數表達之,其理更可瞭然矣.

據前所論,$\zeta=f(z)$ 之幾何意義,爲保角攝影.此攝影在 $f'(z)\neq 0$ 條件下既爲可逆,其逆攝影必又有保角性.因此之故,$z=x+iy$ 遂可視爲 $\zeta=u+iv$ 之解析函數 $\phi(\zeta)$,是謂 $\zeta=f(z)$ 之逆函數.

逆函數 $z=x+iy=\phi(\zeta)=\phi(u+iv)$ 之存在及其解析性亦可直接證之如次.假定 $f'(z)\neq 0$,則 $D\neq 0$,因之

$$x_u=\frac{v_y}{D},\quad x_v=-\frac{u_y}{D},\quad y_u=-\frac{v_x}{D},\quad y_v=\frac{u_x}{D},$$

於是由 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ 之成立,可以推知

$$x_u = y_v, \quad x_v = -y_u;$$

是即 $z = \phi(\zeta)$ 爲一解析函數之謂. 復考其導數,則有

$$\frac{dz}{d\zeta} = \phi'(\zeta) = \frac{\partial(x+iy)}{\partial u} = x_u + iy_u$$

$$= \frac{u_x - iv_x}{D} = \frac{1}{u_x + iv_x} = \frac{1}{f'(z)}.$$

例 題

1. 試考下列函數在何處有連續性:

$(a)\ \bar{z}$; $\quad (b)\ |z|$; $\quad (c)\ \frac{z+\bar{z}}{1+|z|}$; $\quad (d)\ \frac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}}$.

2. 例題 1 中函數,何者爲可導?

*3. 試證

$$\zeta = \frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}},$$

其中 α 及 β 爲任何複數,滿足 $\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}=1$, 將單位圓周轉換於己,並將圓內區域仍轉於圓內. 又若 $\beta\bar{\beta}-\alpha\bar{\alpha}=1$, 則圓內將轉換於圓外.

4. 經下列轉換

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

圓之中心在原點者及直線之經過原點者將分別轉換於 ζ 平面中同焦點橢圓及雙曲線.

5. 試證四點 z_1, z_2, z_3, z_4 之交率

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

對下列轉換

$$\zeta = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

有不變性.

*6. 試證任何圓可由如下關係

$$\zeta = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

轉換於實軸上之半平面.

7. 試證最普通之線性轉換

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc \neq 0$$

有如下特性:

z 平面中之圓及直線經此關係,仍轉換於 ζ 平面中之圓及直線. 又不受轉換影響,即經轉

換而不變其原位之點 $z=Z$ 謂固定點.此線性變換常有兩固定點. 試證在此情形下,圓之通過兩固定點者及圓之垂直於此兩圓者均轉換成己.

8.證函數 $\zeta=z^n$ 之逆函數在 z_0 點解析,但求之時,必為單值函數,因 nz^{n-1} 在此不等於零.惟 $z_0=0$ 一點為例外,因之遂有 $\sqrt[n]{\zeta}$ 之多值性.

第二節　解析函數之積分

7.2.1.　積分定義

既明何謂導數,則不定積分之義,可隨之而定. 一解析函數 $\zeta=f(z)$ 之不定積分為一如是之函數

$$F(z)=\int f(z)dz,$$

其導數為 $f(z)$ 者.茲欲講明 $f(z)$ 之定積分.

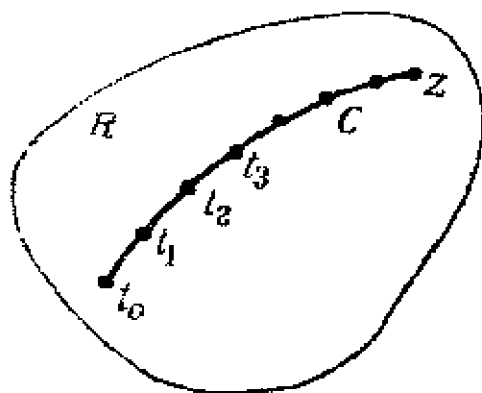


圖 7.1

設 $f(t)$ 為一解析函數,其自變數之變區以 R 名之,又設 $t=t_0$ 及 $t=z$ 為 R 中兩點,由 R 中一按段光滑之有向曲線 C 連結之(圖 7.1). 吾人將 C 由 $t_0, t_1, \cdots\cdots, t_\nu=z$ 諸點分為 n 段,並以 t_ν' 表曲線上介於 $t_{\nu-1}$ 及 t_ν 間之一點,組織

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} f(t_\nu')(t_\nu-t_{\nu-1});$$

然後令其中最大之 $|t_\nu-t_{\nu-1}|$ 趨零,則不論 t_ν 及 t_ν' 如何選擇, S_n 必有一極限可趨. 此極限之存在,可由其虛實兩部之線積分而推知之.蓋令 $t=r+is$, $t_\nu=r_\nu+is_\nu$, $t_\nu'=r_\nu'+is_\nu'$, $\Delta t_\nu=t_\nu-t_{\nu-1}=\Delta r_\nu+i\Delta s_\nu$, $f(t)=u(r,s)+iv(r,s)$, 則 S_n 可寫如:

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} u(r_\nu', s_\nu')\Delta r_\nu-v(r_\nu', s_\nu')\Delta s_\nu$$
$$+i\sum_{\nu=1}^{n} v(r_\nu' s_\nu')\Delta r_\nu+u(r_\nu' s_\nu')\Delta s_\nu.$$

由是知 $n\to\infty$ 時,此式右方必趨於

$$\int_C u\ dx-v\ dy+i\int_C v\ dx+u\ dy.$$

故 S_n 必有一極限，自無疑義．此極限稱之為 $f(t)$ 沿曲線 C 自 t_0 訖 z 之定積分，而以

$$\int_{t_0}^{z} f(t)dt \quad 或 \quad \int_C f(t)dt$$

表之．於是得

$$\int_C f(t)dt = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

故解析函數之定積分可由實函數之線積分表而達之．

據此定義，可得一重要之積分估值法．如以 L 表積分途徑之長，M 為 $f(t)$ 之絕對值在此途徑上所不能超過之上涯：$|f(t)| \leqq M$，則

$$\left|\int_C f(t)dt\right| \leqq ML$$

之眞確，顯而可見．

7.2.2. Cauchy 之基本定理

前論實變數之函數時，曾追求微積分學所以成立之最後關鍵，在乎定積分與不定積分間之相互關係．實函數 $f(x)$ 之定積分當其上界或下界變動時即為 $f(x)$ 之一不定積分．此事成立，微積分學乃有一完整之系統，已詳見於本書上卷矣．所可引以為慰者，今復可證一如是之關係，為複函數理論之最後基礎．其事須先證 Cauchy 之定理而後可以識之．Cauchy 定理之言曰：

苟 $f(t)$ 在一單連區域 R 中為一解析函數，則

$$\int_{t_0}^{z} f(t)dt = \int_C f(t)dt$$

與其所取積分途徑無關．當 t_0 固定，z 變動時，為 z 之解析函數 $F(z)$，

滿足
$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_{t_0}^{z} f(t)dt\right) = f(z),$$

換言之，$F(z)$ 為 $f(z)$ 之一不定積分．推此定理之要旨，謂如上假定之下，一解析函數繞行單連區域中迴含曲線一周必等於零．

此積分對途徑之獨立，可由線積分之基本定理以知之．蓋其虛實兩部線積分與途徑無關之條件適與 Cauchy-Riemann 方程式相符，故可不證而自明．惟如是，當 t_0 固定，z 不定時，此積分為z之函數 $F(z)$:

$$F(z)=U(x,y)+iV(x,y)=\int_{t_0}^{z} f(t)dt$$
$$=\int_C u(r,s)dy-v(r,s)ds+i\int_C v(r,s)dr+u(r,s)ds;$$

由是得知

$$U_x=u,\ U_y=-v,\ V_x=v,\ V_y=u;$$

故
$$U_x=V_y,\ U_y=-V_x,$$

其意卽謂 $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ 為一解析函數，其導數為

$$\frac{dF(z)}{dz}=U_x+iV_x=u+iv=f(z),$$

是卽欲證之理．

所當注意者，此定理有一重要假設，卽積分變區之單連性．例如 $\frac{1}{t}$，在 t 平面中除原點外，自為解析函數．惟其積分繞一迴合曲線之包圍原點者未嘗為零．蓋吾人在此未能獲得一單連區域，其中 $\frac{1}{t}$ 處處有解析性，其故由於 $t=0$ 一點．若沿一圓之以原點為中心，以 r 為半徑者，依正向冒繞行一周，則因 $t=re^{i\theta}$，以 θ 為積分變數，必得

$$\int\frac{1}{t}dt=\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=2\pi i,$$

其值不等於零而等於 $2\pi i$，可以見矣．

然則其變區如為多連，如為一外圍邊線 C 及內圍邊線 C_1, C_2，……所圍而成者，當先作對邊截線Q_1, Q_2，……使其轉為單連區域，而後Cauchy定理始可應用．應用結果，因沿 Q_1, Q_2……部分一往復間

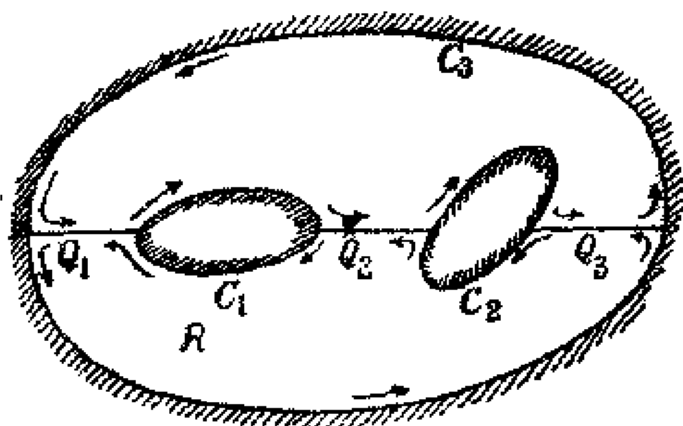


圖 ?.2

兩相抵消,故為

$$\int_C f(t)dt = \sum_\nu \int_{C_\nu} f(t)dt.$$

其線積分均以同一向旨繞行外圍及內圍邊線,觀圖 7.2,可以瞭然.

7.2.3. 對數函數及指數函數

吾人應用 Cauchy 理論, 可為對數函數及其逆函數創一精美之理論,其法與前論實函數時相似,故深得一貫之美.

先立對數函數之定義為 $\frac{1}{t}$ 之定積分,惟必求其積分途徑完全處於一單連區域之內,因此將 t 平面自原點起依實軸之負方向剪開之,如是則積分途徑無論如何不能越負實軸而過.精言之,吾人對變數

$$t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

加以如下限制, 即 $-\pi<\theta\leq\pi$. 在此剪開後之 t 平面中, 作任何曲線 C, 起自 $t=1$, 訖於任何 z, 求 $\frac{1}{t}$ 之定積分,沿 C 而行,起 1 訖 z 者, 據 Cauchy 定理,必與途徑無關.此積分為 z 之解析函數,以 $\log z$ 名之:

$$\zeta = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = f(z),$$

並稱之為對數函數.

據定義,可知對數函數必滿足

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

其導數既無處為零, 故必有一逆函數 $z=g(\zeta)$. 此函數當 $\zeta=0$ 時必為 1, 即 $g(0)=1$, 而其導數,據逆函數定理,可知其為

$$g'(\zeta) = \frac{1}{f'(z)} = z = g(\zeta).$$

由是知 $g(\zeta)$ 必為指數函數①, $g(\zeta)=e^{\zeta}$.

考對數函數之義, $f(z)=\log z$ 除可加一常數外, 完全由其導數決定之.設有一其他函數 $g(z)$, 其導數同為 $\frac{1}{z}$ 者,則 $g(z)$ 與 $f(z)=\log z$

①吾人不難證明任何複函數 $g(z)$ 之滿足 $g'=g$ 而又 $g(0)=1$ 者必為指數函數 e^z.

之差必為一常數．如 $g(z)=\log(az)$ 之導數可為 $\frac{1}{z}$，蓋由

$$g'(z)=\frac{d\log(az)}{dz}=\frac{a}{az}=\frac{1}{z}$$

可以見之．因此遂得 $\log(az)-\log z=c$，c 為一常數，與 z 無關者．令 $z=1$，即知 $c=\log a$．由是得

$$\log(az)=\log a+\log z,$$

是為對數函數之加法定理．

欲求
$$\log z=\int_1^z\frac{dt}{t}$$

之值，其最易途徑可沿正實軸由 $t=1$ 直達 $t=|z|$，然後沿圓弧 $|t|=|z|$ 以達 z(見圖 7.3)，如是即有

$$\log z=\log|z|+i\theta.$$

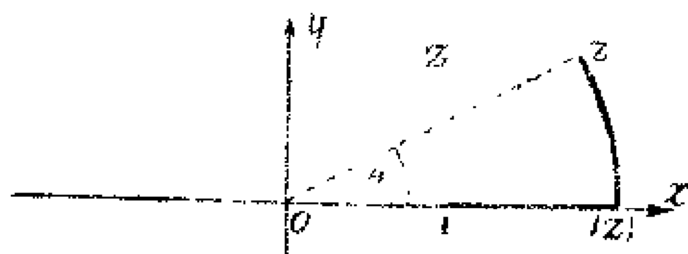


圖 7.3

而複對數與實對數之關係，至是可以瞭然矣①．循是求得複對數之值，其中 θ 受制於 $-\pi<\theta\leqq\pi$ 者，謂之對數之主值．其意謂對數其他之值可藉取消越過負實軸之禁令，由是而獲得之．如無此限制，則自 $t=1$ 點至 $t=z$ 點，可取一途徑，包圍原點一周，θ 將隨之而增 2π，於是得對數之值如
$$\log z=\log|z|+i\theta+2\pi i$$

據是以推，若依正負向旨包圍原點任意次，則有

$$\log z=\log|z|+i\theta+2n\pi i.$$

---

①若令其中 $|z|=1$，則得 $\log z=i\theta$．然後據指數函數之定義，可以推知 Euler 關係：

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}.$$

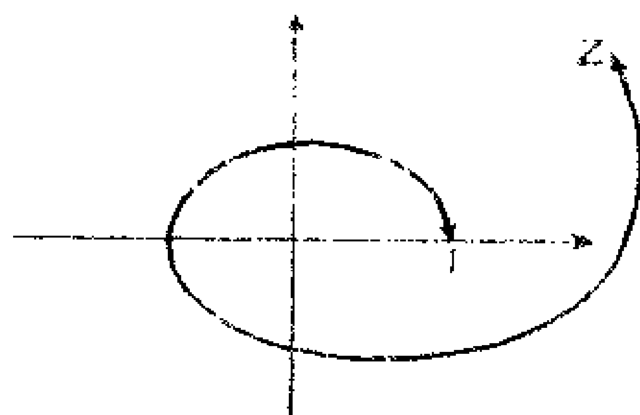


圖 7.4

其中 n 爲任何整數.於此可見**對數函數之多值性**.

由對數函數之多值性,可以推指數函數之週期性.何以言之.考對數多值之義,謂同一 z 有無限多之對數值以應之,其間每兩者之差爲 $2\pi i$.惟如是,就對數之逆函數,即指數函數言之,其自變數若有 $2\pi i$ 之變量,必不影響其因變數之值,換言之,對數函數之逆函數必滿足 $g(\zeta+2\pi i)=g(\zeta)$,故 $e^{\zeta+2\pi i}=e^{\zeta}$.由是知 $\zeta=0$ 時必有 $e^{2\pi i}=1$.於此可見指數函數爲一週期函數,惟其週期爲一虛數.此爲複函數理論之新收獲,不可不三復思之.

自對數函數及其逆函數之理既明,其他初等函數皆可隨之而定.如三角函數 $\sin z$ 及 $\cos z$ 當由

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

以定之.於此可知其亦爲週期函數,其週期仍爲一實數 2π.

他如 a^z,假定 a 爲一常數,其定義爲

$$a^z=e^{z\log a},$$

其中 $\log a$,自指其主值而言.故 a^z 隨其 $\log a$ 之主值而定,爲一單值函數.至於 z^α,假定 α 爲一常數,當由

$$z^\alpha=e^{\alpha\log z}$$

以定之;如是則 z^α 將隨 $\log z$ 之多值性而爲多值函數,既得其任何一値 z^α,其他之値可由是乘 $e^{2n\pi i\alpha}$ 而得之,其中 n 爲任何正負整數.若 α 爲

一有理數如 $\alpha=\frac{p}{q}$（p 及 q 爲互素），則其 [illegible] 得有限個不同之值（其 q 次冪爲 1 者）．若 α 爲無理數，則於此得無限個不同之值．於是可見 z^{α} 爲一多值函數

例　題

1．試證下列積分

$$[illegible]$$

（其中 t^{z-1} 指其主值而言），當 z 爲任何[illegible]，[illegible]之一解析函數（即 $\Gamma(z)$ 可對 z 求導）．又證此 Gamma 函數滿足下列函數方程：

$$\Gamma(z+1) \quad \Gamma(z)$$

*2．取 n^{z} 之主值，組織下列無窮級數：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z}} = \zeta(z)$$

證此級數在 $x>1$ 時之收斂，並代表一可導函數．此函數常稱之爲 Riemann 之 Zeta 函數．其證法略與上卷 8.2.3 論冪級數時相仿．

第三節　解析函數展開爲冪級數

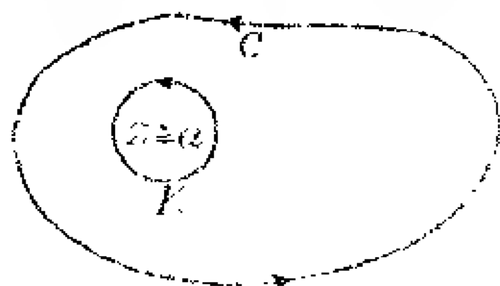
7.3.1.　Cauchy 公式

根據 Cauchy 定理，可將一解析函數 $f(z)$ 在一閉區 R 中任何一點 $z=a$ 之值，由其在邊界 C 上之值表而達之．此表達關係即世所習稱之 Cauchy 公式．

設 R 爲一單連區，其邊界爲一曲線 C，$f(z)$ 在 R 中及其邊界上爲一解析函數．如是則

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-a}$$

在 R 中，連同邊界 C 之上，惟 $z=a$ 一點除外，處處有解析性．因此以 $z=a$ 爲中心，作一小圓，完全處於 R 之中，半徑爲 ρ 者，將 $z=a$ 一點除於 R 之外，自可應用 Cauchy 定理於 $g(z)$．若以 K 表小圓依正向旨環繞之圓周，C 表 R 之邊界，其向旨亦正者，則



$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_K \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

惟在 K 之上，可令 $z=a+\rho e^{i\theta}$，以 θ 作變數，則有

$$\int_K \frac{f(z)}{z-a}dz = i\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

復據 $f(z)$ 在 a 之連續性，可知 ρ 相當小時，必有 η 可尋，其絕對值 $|\eta|$ 小於任意指定之正數 ϵ，而滿足

$$f(a+\rho e^{i\theta}) = f(a)+\eta;$$

於是即有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta - \int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi}\eta\, d\theta\right| \leqq 2\pi\epsilon,$$

因之

$$\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta = 2\pi f(a)+\kappa,$$

其中 $|\kappa|\leqq 2\pi\epsilon$. 由是以論，當 ρ 相當小時，必有

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\, f(a)+\kappa i.$$

其中 $|\kappa i|<\epsilon$. 然後令 $\rho\to 0$，隨之而 $\epsilon\to 0$，即得 Cauchy 公式如

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

或以 t 作積分變數，變化於 C 之上，以 z 代 a，表 R 中任何一點，此式亦可寫如

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt,$$

其意即將一解析函數在一內點之值由其在邊點之值表而出之.

如 C 爲一圓，以 z 爲中心，r 爲半徑者，則可令 $t=z+re^{i\theta}$，$dt=ire^{i\theta}d\theta$，此公式將有如下特殊形式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})\,d\theta,$$

意謂一解析函數在圓中心之值必等於圓周上諸值之平均值。不過自必假定其函數在圓周上仍不失其解析性。

7.3.2. 解析函數之展開

任何解析函數可展開爲一冪級數，其理可由 Cauchy 公式推知之。**苟 $f(z)$ 在一圓如 $|z-z_0|\leqq R$ 之內及其邊界之上有解析性，則可展爲 $z-z_0$ 之冪級數，收斂於該圓之內者**

欲證此重要定理，自不妨取 $z_0=0$（否則可以 $z'=z-z_0$ 作新變數，一切推理仍如其舊，故此假定不影響討論之普遍性）。應用 Cauchy 公式於此，以圓爲變區，圓之中心爲 $z_0=0$，半徑爲 $|z|=R$ 者，先將欲積之函數寫如

$$\frac{f(t)}{t-z}=\frac{f(t)}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}$$

$$=\frac{f(t)}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{t^n}\right)+\frac{f(t)}{t}\left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}.$$

因 z 爲圓中之內點，故 $\left|\frac{z}{t}\right|=q$ 爲一正數，小於 1 者，因此可爲上列幾何級數之餘項

$$r_n=\frac{1}{t}\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}$$

得一估值如

$$|r_n|\leqq\frac{1}{R}q^{n+1}\frac{1}{1-q}$$

然後代入於 Cauchy 公式，逐項求積分之結果，得

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+R_n,$$

其中係數 c_ν 爲

$$c_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt,$$

而餘項 R_n 則爲

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_l f(t)r_n dt.$$

若以 M 表 $|f(t)|$ 在圓周上所不能超過之上界，則據(7.2.1)可知

$$|R_n|\leqq\frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{q^{n+1}}{1-q}2\pi RM=\frac{q^{n+1}}{1-q}M;$$

復因 q 爲小於 1 之分數，故此餘項將隨 $n\to\infty$ 而趨零. 由是遂得 $f(z)$ 之展開式

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu,$$

其中 $$c_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt,$$

是爲一冪級數. 於是解析函數得展開爲一冪級數，已得證矣.

一收歛之複冪級數在其所歛圓內可任意求導，蓋如是導得之級數又勻歛於同一圓內. 其證與前證實變數之冪級數時完全相同. 惟如是，解析函數既可展開爲一冪級數，則其導數又爲可導，故又爲一解析函數. 據是以推，解析函數之任何高重導數無不存在. 復次，解析函數之積分仍爲解析. 由是以論，在解析函數範圍之內，求積與求導可施行無阻. 此爲一極可滿意之收穫，在實函數理論中所不敢希冀者①.

更有進者，冪級數之表達解析函數，亦有其唯一性可言，換言之，一解析函數 $f(z)$ 苟可以用 z 之冪級數表達之者，僅有唯一冪級數以表達之. 其證與上卷 8.4.4 完全相同. 因此之故，任何表達解析函數之冪級數必爲 Taylor 級數. 由是言之，任何解析函數在其變區 R 中一點 $z=z_0$ 之鄰近必可展開爲

---

①吾人可直接由 Cauchy 公式，討論在積分符號下對 z 求導之可能，以證高重導數爲

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi}\int_l\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu,$$

其係數由如下關係以知之：

$$c_\nu=\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt$$

此級數之斂圓半徑，亦不難估計．如以 z_0 為中心，作無論如何大之圓，但求其完全處於 $f(z)$ 所規定為解析區域之內，則其收斂，可以斷言．

論至此，吾人可將各種初等函數依 Taylor 展開．所得級數在形式上與前完全無異，此其結果，亦殊足令人滿意．

例如二項級數

$$(1+z)^\alpha=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu}z^\nu$$

當為複導數，又 $|z|<1$ 時亦為有效，惟

$$(1+z)^\alpha=e^{\alpha\log(1+z)}$$

中必取 $\log(1+z)$ 之主值．試考其收斂半徑為 1 之故，實由於 $(1+z)^\alpha$ 在 $z=-1$ 不復有解析性，蓋其導數在此不復存在．故以 $z=0$ 為中心，欲作一圓，完全處於解析區域之內，則其半徑至多為 1．

又考慮柯級數

$$\frac{1}{1+z^2}$$

在單位圓之圓周上不能收斂之故，實由於此函數在 $z=+i$ 及 $z=-i$ 失其解析性．此理既明，則實變數級數之斂散情形亦可恍然大悟，前在上卷 310 頁已略及之，讀者深思而自得之可也．

更觀上卷第八章附錄中($A8.5.2$)論 Bernoulli 數時，有如下級數

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum\frac{B_\nu}{\nu!}z^\nu;$$

其斂圓為 $|z|=2\pi$，因 $z=2\pi i$ 時，其分母為 0，而在 $|z|\leq 2\pi$ 圓內，除原點外，處處皆有解析性．

7.3.3. Cauchy 定理之逆定理

吾人研究複函數，以解析函數為限；蓋有鑒於複函數之定義過於寬泛，無從討論，乃要求可導性以限制之．解析函數之一種基本特性，由

Cauchy 定理說明之. 自此定理成立之後，解析函數之理論基礎即告完成，種種層出不窮之理皆可由是而推. 誠可謂執簡馭繁，得其會通者矣.

所當注意者，Cauchy 基本定理之逆定理亦為真確，其詞曰：**苟有一連續函數** $\zeta=u+iv=f(z)$，**就其變區 R 中任何迴合曲線 C 繞行一週之積分如等於零，則 $f(z)$ 為 R 中之一解析函數.** 其證甚易. 蓋假定 $\int_{t_0}^{z} f(t)dt$ 沿一途徑起自固定點 t_0，迄於變動點 z 之積分，為僅隨 z 而變之一函數 $F(z)$，滿足 $F'(z)=f(z)$ 者，則 $F(z)$ 之為解析，自無待言. 據上所述，一解析函數之導數復為解析，故 $f(z)$ 必為一解析函數無疑.

自此逆定理得證之後，吾人可要求複函數之可積性而證其可導性，與前之以可導性為定義，而證其可積性者適相對峙. 惟如是，可導與可積兩種要求乃可互相替代而發揮其能事. 此又為複函數理論之一種特色，求之實函數中而不可得者.

7.3.4. 解析函數與勢函數

既證解析函數之任意高重導數皆有可求，則其虛實部 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 之可導，為勢所必至. 因此之故，吾人可將 Cauchy-Riemann 方程式分別對 x 及 y 求導，消去 v，得

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0;$$

或於其間消去 u，得

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0.$$

由是知解析函數之虛實部必滿足 Laplace 方程式，故為勢函數無疑. 若 u,v 為兩個勢函數，滿足 Cauchy-Riemann 方程式者，則 v 謂與 u 共軛；而 $-u$ 與 v 共軛.

論至此，解析函數與平面中之勢函數可同歸於一貫理論矣.

例　題

1. 試直接由 Cauchy 公式(不用級數推理)證一解析函數之導數又為解析.

2. 試寫一勢函數 u 求一共軛函數 v，除可加一常數外僅有唯一如是之 v.

第四節 解析函數之異點

7.4.1. 零點與孤異點

一解析函數 $f(z)$ 在一點 $z=z_0$ 如偶失其解析性,則此點常以 $f(z)$ 之**異點**稱之.無論何種函數不能無異點.倘其在整個平面中包括無窮遠點(函數論中假設有唯一無窮遠點,經 $z=\frac{1}{z'}$ 而轉換於 $z'=0$ 者)處處皆爲解析,其值皆爲有涯,則據 Cauchy 公式可證其必非常數不可.惟如是,任何解析函數各有其異點以描寫其特性,其所以異於其他函數者即在於是,因以異點[1]稱之.

異點之最簡單者爲**孤異點**[2].欲明孤異點,須先講零點.若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 之值爲零,其導數直至 $n-1$ 重之值在 $z=z_0$ 亦爲零,其 n 重不復爲零,則其在 $z=z_0$ 點鄰近展開之 Taylor 級數

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\cdots\cdots$$

將有如下形式:

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z),$$

其中 $g(z_0)\neq 0$.如是則 z_0 稱之爲 $f(z)$ 之 n 重零點.

試一考

$$q(z)=\frac{1}{f(z)},$$

此函數將 $f(z)$ 爲零處除外,自爲一解析函數.惟 $f(z)$ 在 z_0 如有一 n 重零點,則 $g(z)$ 在 z_0 鄰近當爲

$$q(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=z_0$ 點鄰近亦爲解析.由是可見 $q(z)$ 在 $z=z_0$ 點忽失其解析性,此一異點謂之 n **重孤異點**.試設想 $h(z)$ 展開爲 $z-z_0$ 之冪級數,則 $q(z)$ 在其異點鄰近將有一展開式如下:

---

(1) singularity, Singularitaet (2) Pole, Pol.

$$q(z)=c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\cdots,$$

於此見一尋常冪級之前，尚有 n 項冪出現，其指數爲負整數，其係數因以 $c_{-n}, c_{-n+1}, \cdots\cdots, c_{-1}$ 名之．由是以論，若 z_0 爲一解析函數之 n 重孤異點，則其在 z_0 鄰近之展開式中有 n 項負冪．是爲此種異點之特徵．且孤立於 $z=z_0$，在其相當鄰近，不復有其他異點，故名之如是．

據是推之，設 z_0 爲 $q(z)$ 之初重孤異點，卽 $n=1$，則此展開式中僅有一項負冪出現，其係數 c_{-1} 必爲

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)q(z).$$

復因
$$\frac{1}{q(z)(z-z_0)}=\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

可知
$$c_{-1}=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

據同理，若有 $q(z)=\frac{r(z)}{\phi(z)}$，其中 $\phi(z)$ 在 $z=z_0$ 時有一初重零點而 $r(z_0)\neq 0$，則 $q(z)$ 在此有一初重孤異點，其 c_{-1} 必爲

$$c_{-1}=\frac{r(z_0)}{\phi'(z_0)},$$

自爲顯而易見之理．

苟 z_0 爲 $q(z)$ 之異點，換言之，$q(z)$ 在 z_0 失其解析性，惟在 z_0 鄰近處處解析（此種異點，謂之孤立，蓋必有一相當鄰近，其中不復有他異點），則其積分繞行任何圓周之包圍 z_0 者自不能爲零．惟據 Cauchy 定理，此積分之值與圓之半徑無關．無論如何作一迴合曲線，包圍 z_0 於其中，其積分沿此曲線之值必始終不變．以正向旨繞行任何包圍 z_0 之迴合曲線一週之積分，常稱之爲 **$q(z)$ 在異點 z_0 之剩餘**．

剩餘之義既明，吾人可就其在 n 重孤異點上之剩餘而細考之．如 z_0 爲 $q(z)$ 之 n 重孤異點，則展開於 z_0 鄰近，得

$$q(z)=c_{-1}(z-z_0)^{-n}+\cdots\cdots$$
$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\cdots,$$

如是據上之定義以求剩餘,則右方正冪之積分均為零,而 $(z-z_0)^{-\nu}$ 當 $\nu>1$ 時之不定積分為 $\frac{(z-z_0)^{-\nu+1}}{1-\nu}$, 繞行閉合曲線一周亦均為零,結果得 $2\pi ic_{-1}$. 於是知一函數在其孤異點之剩餘為 $2\pi ic_{-1}$.

既明以上所述,則如下定理之真確,亦顯而可見:

苟 $f(z)$ 在一變區 R 之內,連同其邊界 C,除 C 所包圍有盡個孤異點外,處處有解析性,則其積分,以正向旨繞行 C 一週,必等於其孤異點上剩餘之和. 是即所謂剩餘定理,其實即為 Cauchy 定理之必然結果.

例 題

*1. 試證

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{z^n}{\zeta^n}d\zeta$$

環繞一週合曲線之包圍 $\zeta=0$ 及 $\zeta=z$ 者,為一 $n-1$ 次多項式 $g(z)$, 滿足

$$g^{(m)}(0)=f^{(m)}(0),\qquad m=0,1,2,\cdots,n-1.$$

2. 設 $f(z)$ 在 $|z|\leqq\rho$ 為一解析函數,以 M 表 $|f(z)|$ 在圓周 $|z|=\rho$ 上之最大值,則其展開冪級數

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

中之係數必滿足下列不列式:

$$|a_\nu|\leqq\frac{M}{\rho^\nu}.$$

*3. 設有一變區,為唯一週合曲線 C 所圍而成,苟 $f(z)$ 在 C 之內,及在 C 之上為解析函數,在 C 之上復不等於零,則其 C 之內所有零點之個數由

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

可以定之(n 重零點作 n 個零點算).

4. (a) 兩多項式 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在一週合曲線 C 之每點上均滿足

$$|Q(z)|<|P(z)|,$$

則 $P(z)=0$ 及 $P(z)+Q(z)=0$ 兩方程式在 C 內所有根之個數相等(試討論 $P(z)+\theta Q(z)$ 一族函數,其中 θ 為一補變數,自 0 變 1 者).

(b) 證 a 若滿足

$$|a| < r^2 - \frac{1}{r},$$

則

$$z^3 + az + 1 = 0$$

之根均在圓 $|z| = r$ 之內

5. 若 $f(z)$ 有一單根 a 在一閉合曲線 C 之內，則此根 a 為

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$$

7.4.2.　複徑求積法

吾人應用 Cauchy 定理及剩餘定理，可以求實變函數之定積分，但在複數變區中取一適當途徑，令其中一段與實軸相合即可．如用之果得其道，則貌甚繁瑣之定積分，得以極簡潔之方式出之，不必先求不定積分而可知其值為何如．是即所謂**複徑求積法**[1]．略舉數例於後，觀此即可明其要旨所在．

［例一］
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

此積分已數見於前（上卷 174 頁，316 頁，543 頁，及下卷 4.4.3），茲擬用複徑求積法再求之．試將 $\frac{e^{iz}}{z}$ 沿一複徑 C 而求積．C 係一大半圓 H_R、一小半圓 H_r（其半徑分別為 R 及 r，其中心同在原點者）及實軸上兩對稱線段 I_1 及 I_2 所連成者，如圖 7.6 所示．考 $\frac{e^{iz}}{z}$ 在 C

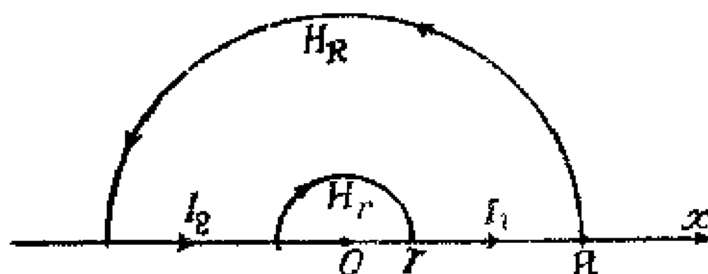


圖 7.6

所圍之圍線中既有解析性，故其沿 C 之積分必為零．於是將其沿實軸線段 I_1 及 I_2 之積分合併後，必有

$$\int_{H_R}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{H_r}\frac{e^{iz}}{z}dz + 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = 0.$$

然後令 R 無限制增大．在此 H_R 半圓之上，既有 $z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$，因之 $e^{iz} = e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}$，故其積分為

(1) contour integration, Integration auf dem komplexen Wege.

$$i\int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta;$$

惟 $e^{iR\cos\theta}$ 之絕對值為1，而 $e^{-R\sin\theta}$ 之絕對值小於1，且不論 θ 在 $\epsilon\leqq\theta\leqq\pi-\epsilon$ 內如何變化，必隨 $R\to\infty$ 而趨零.由是可知沿 H_R 之積分必隨 $R\to\infty$ 而趨零.至其沿 H_r 之積分，則因 $r\to 0$ 而趨於 $-\pi i$，亦不難見之.故令 $r\to 0$，$R\to\infty$，即得欲證之關係

［例二］　　$$\int_0^{\infty}\cos ax\, e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}a^2}$$

試將 e^{-z^2} 沿一長方形之邊界 $ABB'A'$（圖7.7）而求積，其垂直於實軸之兩邊 AA' 及 BB'，長各 $\frac{a}{2}$，其他兩邊 AB 及 $A'B'$ 之長則各為 $2R$. 此積分據 Cauchy 定理必為零，自無疑義.

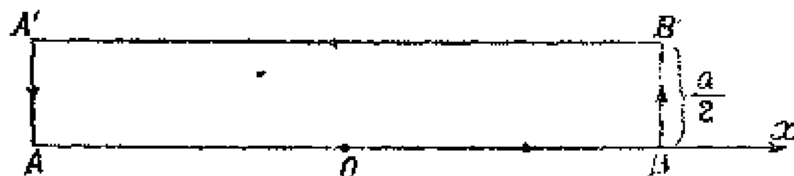


圖 7.7

惟就垂直於實軸之兩邊而言，必有

$$|e^{-z^2}|=|e^{-(x^2-y^2)}e^{-2ixy}|=e^{-R^2}e^{y^2}<e^{-R^2}e^{\frac{1}{4}a^2},$$

此必隨 $R\to\infty$ 而趨於零，不論 a 為任何正數.故沿此兩線段之積分，當 $R\to\infty$ 時必趨於零，可以斷言.復考在 $A'B'$ 之上，既有 $dz=d(x+\frac{1}{2}ia)=dx$，故應用 Cauchy 定理之結果，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+\frac{1}{2}ia)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx.$$

其意即謂可將沿實軸之途徑任意平移.惟列於右方之積分為 $\sqrt{\pi}$，列於左方者可簡寫如

$$e^{\frac{1}{4}a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(\cos ax-i\sin ax)dx=2e^{\frac{1}{4}a^2}\int_0^{\infty}\cos ax\cdot e^{-x^2}dx,$$

但注意 $\sin ax$ 為奇函數，$\cos ax$ 為偶函數即可.於是上式即隨之而證.

［例三］　　$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

此積分亦已數見於前，且在例二中已假定之.茲擬應用複徑求積法以求之，雖其出發點不甚自然，亦可見剩餘定理之用.

試以 $/\frac{1}{2}$ 符號表一直線 $z=\frac{1}{2}+\rho e^{\frac{i\pi}{4}}$　$(-\infty<\rho<\infty)$，為 z 平面中一直線，與實軸交於 $\frac{1}{2}$，且與之成一等於 $45°$ 之角.他如 $/-\frac{1}{2}$ 或 $/0$ 之意義亦可想而知.設 u 為一實補變數，以下列積分作出發點：

$$f(u)=\int_{/\frac{1}{2}}\frac{e^{\pi iz^2+2\pi iuz}}{e^{2\pi iz}-1}dz.$$

此積分自當作旁義積分觀，蓋起自 $\rho=-R$，訖於 $\rho=R$，而後令 R 無限制趨大；至其收斂，自

不難見之.由是可得

$$f(u+1)-f(u)=\int_{/-\frac{1}{2}}\frac{e^{\pi i z^2+2\pi i u z}}{e^{2\pi i z}-1}(e^{2\pi i z}-1)dz$$

$$=\int_{/-\frac{1}{2}}e^{\pi i z^2+2\pi i u z}dz=e^{-\pi i u^2}\int_{/-\frac{1}{2}}e^{\pi i(z+u)^2}dz.$$

因 $e^{\pi i(z+u)^2}$ 處處有解析性,故可將積分途徑隨意平移,如例二中所曾現者,故

$$f(u+1)-f(u)=e^{-\pi i u^2}\int_{/0}e^{\pi i z^2}dz=e^{-\pi i u^2}I.$$

在平移後之途徑上,其變數為 $z=\rho e^{\frac{i\pi}{4}}$.因之遂有

$$I=e^{\frac{i\pi}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\rho^2}d\rho;$$

復令其中 $\sqrt{\pi}\rho=t$, 以 t 作變數,則

$$I=e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

復次,如令 $z=\lambda+1$, 並以 λ 作新變數,則最初之 $f(u)$ 可轉換於如下形式,惟須注意 $e^{2\pi i}=1$ 及 $e^{\pi i}=-1$:

$$f(u)=-\int_{/-\frac{1}{2}}\frac{e^{\pi i\lambda^2+2\pi i\lambda u}}{e^{2\pi i\lambda}-1}\cdot e^{2\pi i u}e^{2\pi i\lambda}d\lambda$$

或

$$-e^{-2\pi i u}f(u)=\int_{/-\frac{1}{2}}e^{\pi i\lambda^2+2\pi i\lambda u}d\lambda+\int_{/-\frac{1}{2}}\frac{e^{\pi i\lambda^2+2\pi i\lambda u}}{e^{2\pi i\lambda}-1}d\lambda.$$

據此結果,吾人復可將積分途徑平移.細觀上式,列於右方之第一積分實為 $e^{-\pi i u^2}I$. 至第二積分則為 $f(u)$, 惟其途徑須向右平移如 1 之遠,而此兩平行途徑之間,發見有一孤異點 $\lambda=0$ 存在.然後應用剩餘定理於此,因其函數在此孤異點之剩餘為 1(至兩途徑), $/-\frac{1}{2}$ 及 $/\frac{1}{2}$ 直達無窮,不致有何困難,其理與例二所論同),故由上式可得

$$-f(u)e^{-2\pi i u}=e^{-\pi i u^2}I+f(u)-1.$$

惜此式中 $f(u)$ 尚未明悉,故不能由是以求 I. 惟令 $u=\frac{1}{2}$, 則由是可得

$$e^{-\frac{\pi i}{4}}I=1,$$

復因 I 據上所述為

$$I=e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

故欲證之理即在於是.

〔例四〕　設有一有理函數如

$$Q(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}$$

其分母無實根，又 $n-m$ 至少為2. 如是則

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx$$

可用複徑求積法求之如下. 所欲取為積分途徑者，為一以原點為中心之半圓，其半徑 R 如是大，使 Q 之無限點無一在圓周之上及圓周之外(在此半圓上自必 $z=Re^{i\theta}$，$0\leqq\theta\leqq\pi$)，復以實軸上自 $-R$ 至 $+R$ 一段連結之而成一閉合曲綫. 若沿此途徑自 $z=-R$ 點起以正向旨繞行，則先有一實函數之積分：

$$I_R=\int_{-R}^{R}Q(x)dx.$$

繼之為一複函數之積分，沿半圓圓周而施行者. 此兩積分相加，必等於 $Q(z)$ 在圓周內所有剩餘之和. 據上所假設，必有一固定正數 M，當 R 相當大時如此

$$|Q(z)|<\frac{M}{R^2},$$

而半圓圓周之長為 πR. 惟如是，此沿半圓圓周之積分，就其絕對值言之，必小於 $\pi R\cdot\frac{M}{R^2}=\frac{\pi M}{R}$，故隨 $R\to\infty$ 而趨零. 由是遂知

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx$$

必等於 $Q(z)$ 在上半平面所有剩餘之總和.

例如　　$$Q(z)=\frac{1}{az^2+bz+c}=\frac{1}{f(z)},$$

假定其中 a,b,c 為實數，又 $a>0$，$b^2-4ac<0$. 如是則 $Q(z)$ 僅有一個一重孤異點

$$z=z_1=\frac{1}{2a}\left(-b+i\sqrt{4ac-b^2}\right),$$

其中平方根當假定為正，蓋欲取其在上半面之根. 據前述求索剩餘之法，知 $Q(z)$ 在 z_1 之剩餘為 $2\pi i\frac{1}{f'(z_1)}$；因

$$f'(z_1)=2az_1+b=i\sqrt{4ac-b^2},$$

遂得　　$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

又如　　$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

---

①由於對 $Q(z)$ 之假設，可知 $Q(z)$ 必有如下形式：$Q(z)=\frac{1}{z^2}R(z)$，其中 $R(z)$ 在 $n>m+2$ 時隨 $z\to\infty$ 而趨零，至 $n=m+2$ 時，則 $R(z)$ 將隨 $z\to\infty$ 而趨於 $\frac{a_m}{b_n}$.

亦可依此法求之(參閱上卷 143 頁). 考 $1+z^4$ 之四根, 其虛部爲正者有二, 爲 $z_1=\epsilon=e^{\frac{1}{4}\pi i}$, $z_2=-\epsilon^{-1}$, 於是 $\frac{1}{1+z^4}$ 在此之剩餘和

$$2\pi i\left[\frac{1}{f'(z_1)}+\frac{1}{f'(z_2)}\right]=2\pi i\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_1^3}+\frac{1}{z_2^3}\right)=\frac{\pi i}{2}(\epsilon^{-3}-\epsilon^{3})$$

$$=\pi\sin\frac{3\pi}{4}=\pi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2},$$

即得如上關係.

最後可一證
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{\pi}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

考 $\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ 在 $z=+i$ 有一 $n+1$ 重孤異點, 欲求其剩餘, 當由

$$\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}}=\frac{1}{(z-i)^{n+1}(z-i+2i)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^{-n-1},$$

將右方依二項定理展開, 求其中 $(z-i)^n$ 一項之係數, 得

$$\frac{1}{(2i)^n}\binom{-n-1}{n}=\frac{1}{(2i)^n}(-1)^n\frac{(n+1)\cdots\cdots 2n}{1\cdot 2\cdots\cdots n}=\frac{i^n}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

故就 $\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ 在 $z=+i$ 鄰近之展開式觀之, 其中 c_{-1} 實等於 $\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, 由是知欲求之剩餘 $2\pi i c_{-1}$ 爲 $\frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, 而上式即隨之得證.

例　題

1. 證
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

2. 證
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+c^2}dx=\frac{1}{2}\pi e^{-|c|}.$$

3. 若 n, m 爲正整數, 又 $n>m$, 試證

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right).$$

4. 設 $f(x)$ 爲一 n 次多項式, 有單根 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$, 試證

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu^{\,k}}{f'(a_\nu)}=0\qquad(k=0,1,\cdots\cdots,n-2).$$

(試考 $\int\frac{z^k}{f(z)}dz$ 沿一適合曲線包圍一切 a_ν 者).

7.4.3. 剩餘定理與線性微分方程式

線性微分方程式，前在第六章中已暢論之．茲專就其有齊性而係數 $a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 均爲常數者：

$$L[u]=a_0u+a_1u'+a_2u''+\cdots\cdots+a_nu^{(n)},$$

由複函數理論之觀點，請略述略以闡明其解法之要旨．試以$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 作一多項式之係數，創造一 n 次多項式如

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n,$$

復以 t 爲實輔變數，令

$$u(t)=\int_C\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz,$$

其中 C 爲一迴合複徑，不經過 $P(z)$ 之零點者．$f(z)$ 爲一常數，或爲 z 之多項式，其次數小於 n．如是 $u(t)$ 由一含有實輔變數之複積分表而達之，其爲 t 之連續函數，且可在積分符號下任意求其對 t 之高重導數，自顯而可見．惟如是，若將 $u(t)$ 及其導數直至 n 重代入於 $L[u]$，必有

$$L(u)=\int_C e^{tz}f(z)dz.$$

列於右方之積分據 Cauchy 定理應爲零．於是可見 u 實爲 $L[u]=0$ 之解．若 $f(z)$ 爲一 $n-1$ 次多項式，則 $u(t)$ 中有 n 個任意常數，故依此方法可於 $u(t)$ 中求得 $L[u]=0$ 之通解．

吾人試一回憶前在第六章中所述解法，考其要旨所在，而後加以說明．先假定 $P(z)=a_n(z-z_0)(z-z_1)\cdots\cdots(z-z_n)$ 所有零點均爲初重零點，而 C 爲一迴合複徑，包圍所有 n 個零點於其內．於是由今之說，如欲求 $u(t)$，無異欲求

$$\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}$$

在其孤異點上所有剩餘之總和．惟據上所論，其在 a_v 之剩餘當爲

$$2\pi i\frac{f(z_\nu)}{P'(z_\nu)}e^{z_\nu t},$$

故將 $f(z)$ 選擇適當，$\frac{f(z_\nu)}{P'(z_\nu)}$ 自可作任意常數，因之遂得其通解如

$$u(t)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{z_\nu t},$$

與前所得結果完全相符.

至 $P(z)$ 如有重根時，如有一 r 重根，則 $\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}$ 將隨之而有一 r 重孤異點. 欲知其在此 r 重孤異點上之剩餘，當設想其分子 $e^{tz}f(z)=e^{tz_\nu}e^{t(z-z_\nu)}f(z)$ 同時亦展開為 $z-z_\nu$ 之冪級數而後求其 c_{-1}. 如是則除 e^{tz_ν} 外，復有 $te^{tz_\nu},\cdots\cdots,t^{\nu-1}e^{tz_\nu}$，亦必滿足 $L[u]=0$，其證較繁，故從略；讀者幸自體會之可矣.

例題

1. 求三點 z_1,z_2,z_3 共在一直線上之條件為何如.

*2. 求四點 z_1,z_2,z_3,z_4 共在一圓周上之條件.

*3. 設 A,B,C,D 為 z 平面中四點，依此排列於一圓周之上，其坐標分別為 z_1,z_2,z_3,z_4. 試用複數坐標，證 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

4. 證 $\cos z=c$ 不論 c 為何數皆有解.

5. 問 c 為何數時，方程式 $\tan z=c$ 不可解.

6. 問 z 必如何而後 (a) $\cos z$, (b) $\sin z$ 為實數?

7. 求 $\Sigma a_n z^n$ 之收斂半徑，若

(a) $a_n=\frac{1}{n^s}$, s 為一複數，其實部為正者；

(b) $a_n=n^n$;

(c) $a_n=\log n$.

8. 假定 z 為複變數，試證

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

9. 以圍線求積法求

(a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}dx$, (b) $\int_0^\infty \frac{x^2\cos x}{1+x^4}dx$,

(c) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{q^2+x^2}dx$, (d) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(x+1)(x+2)}dx$, $1<a<2$.

10. 求下列函數之孤異點及其剩餘：

$$\frac{1}{\sin z},\quad \frac{1}{\cos z},\quad \text{[illegible]}$$

*11. 求 $\int_{C_n}\frac{\cot \pi t}{t-z}dt$ 當 $n\to\infty$ 時之極限，其積分途徑 C_n 為正方形，其邊平行於兩軸，離原點遠如 $n\pm\frac{1}{2}$. 應用剩餘定理釋 $\cot \pi z$ 求一分解式以表達之.

*12. 用 $\log(1+z)=\int_0^z\frac{dt}{1+t}$ 證 $\log(1+z)$ 之冪級數在單位圓周 $|z|=1$ 上，除 $z=-1$ 一點外，處處收斂. 令此級數之虛部與 $\log(1+e^{i\theta})$ 之虛部相等，可得下列 Fourier 級數(上卷 9.3.2 例一)

$$\frac{1}{2}\theta=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta-\cdots\qquad(-\pi<\theta<\pi)$$

得一新證.

第五節　回顧與前瞻

複函數理論，可謂精矣. 其作始甚簡，而收穫之巨，有非初料所能及者. 自 Cauchy 定理奠定基礎之後，錯綜繁複之理皆可由是而推. 就其成就而論，以視實變函數之微積分學，有過之無不及： 如對數函數之多值性，解析級數之收斂圓，皆足以闡發前所未發之精理，類是之例，不一而足. 故謂微積分學至此始完成一完美之系統，亦不爲過. 至其理論本身結構之精嚴，氣魄之雄偉，尤爲近代理論科學之模範，壯哉盛哉，誠極人類思想界之大觀.

本章討論範圍，以複函數之微積分學爲主. 惟解析函數之特性，足資研討者甚多，其最著者有單值性及多值性之問題. 最初討論實變函數時，即以單值函數爲限； 惟單值函數之逆函數未必爲單值，於是不得不對其變程有所限制，藉得若干單值支，而分別討論之. 在複變數區域之內，其情形亦復相似. 如 Cauchy 基本定理，必假設解析函數之單值性，他如求積求導法之運用，亦以單值函數爲條件. 雖然，多值之出現，爲不可避免之事. 如 $\log z$，爲其最著之例；吾人乃自原點起，沿實軸之負向，將平面剪開，使 z 不能越負實軸而過，從而得對數之主值，主值既明，其

他之值，從可推矣.他如 $z=\zeta^2$ 之逆函數 $\zeta=\sqrt{z}$.其中 z 之每一值，有 $z=\zeta^2$ 之兩根，卽 ζ 及 $-\zeta$ 兩值以應之.試令 $z=re^{i\theta}$，則 $\zeta=f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 在每一單連區 R 之不含原點者處處皆有解析性（所以必須將原點除外，因 $f(z)$ 在原點不復可導之故）在此單連區域內，ζ 自爲一單值函數.但若令 z 沿一同心圓 K 以正向旨環繞原點，則 $\zeta=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 隨之而連續變化，當其環繞一周復返原點時，θ 將得一增量如 2π，而與之相應之値爲 $\sqrt{r}\,e^{\frac{i\theta}{2}}e^{\frac{2\pi i}{2}}=-\zeta$ 而非原値 $\zeta=\sqrt{r}\,e^{\frac{i\theta}{2}}$，於此可見 z 若沿一迴合曲線 K 連續進展，重返原點時，$f(z)$ 顯無單值性可言.又 n 若爲一整數，$\sqrt[n]{z}$ 之性質亦如之；當 z 每次環繞原點一周，$\sqrt[n]{z}$ 之値將隨之而乘以 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$，待 n 次環繞後，始重返其原値，至 z^{α} 亦復類是，z 每次環繞原點之結果，使其値得一因子 $e^{2\pi i\alpha}$ 以乘之.此種現象，皆由於函數之多値性.因此吾人在 z 平面中作適當直線，禁止 z 之越此而過，如是則環繞原點，不復可能，而函數之單値性，遂得實現.

解析函數之單値及多値性，又可由其幾何意義闡明之.考 $\zeta=f(z)$ 之意，爲 z 平面中一變區攝影於 ζ 平面，其單値性及其逆函數之單値性可由攝影之一一相應以識之.今設有 $\zeta=f(z)=z^n$，如令 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$，$z=re^{i\theta}$，則 $\rho=r^n$，$\varphi=n\theta$.於此可見 φ 之變，其速 n 倍於 θ，當 θ 自 0 變至 2π，φ 將自 0 變至 $2n\pi$.吾人欲求函數之單値性，不得不對 θ 有所限制，令 θ 之變，限於 $0\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{n}$.於是得一區域，與整個 ζ 平面一一相應.惟此種限制，似覺不甚自然.與其限制 θ，不如放任 φ，其結果必殊致而同歸.何以言之.如對 θ 放棄限制，任其在 z 平面中自由變化，$0\leqq\theta\leqq2\pi$，同時令 φ 不必拘束於一個平面之中，而設法爲 $\zeta=re^{i\varphi}$ 求得一如是之曲面，與整個 z 平面一一相應者，則函數之單値性亦將隨之而實現.此種曲面，卽世所盛稱之 **Riemann 曲面**.果能創造一如是之曲面，則函數之研討，將有長足之進步，其詳當求之專書.

復次，函數之異點，爲研討函數最要之工具.無論何種函數，不能無異點，其異點卽所以示其與衆獨異之處，能將函數本有特性發揮盡致，

描寫無遺．蓋無論何種函數必有其異點，而有此異點者亦惟此函數，如是則其函數之特性，可以大明．如本章所述孤異點卽爲異點之一種．孤異點之外，又有所謂**超異點**[1]者，爲超越函數所常有，其性質之錯綜複雜遠過於孤異點．例如 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 時卽有一超異點，當 z 沿正實軸趨零時其値無限制趨大，沿負實軸趨零時忽趨於零；且在 $z=0$ 鄰近可獲得任何不等於零之値．如有一常數 $\alpha+i\beta=e^{p+iq}\neq0$，則

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+iy}}=\alpha+i\beta$$

在 $z=0$ 鄰近之實現，不難見之．蓋由

$$\frac{1}{x+iy}=p+iq+2k\pi i.\qquad k=\text{整數},$$

或
$$x+iy=\frac{1}{p+i(q+2k\pi)},$$

得
$$x=\frac{p}{p^2+(q+2k\pi)^2},\quad y=\frac{-(q+2k\pi)}{p^2+(q+2k\pi)^2};$$

但令其中 k 相當大，則 $|x|$ 及 $|y|$，隨之而 $|z|$ 將爲任意小．要而論之，明異點而後可以明函數之特性，旣有函數，自可考其異點；倒之，試假設一種異點，當如何設法創造一函數，適有此異點者．以是爲研討之題材，新函數之產生，將方興而未艾．函數理論，因此遂有一燦爛之將來，橫於其前．

(1) essentially singular point, wesentliche Singularität

定理及公式撮要

1. 導數公式

一　鏈導法　設 $u=f(\xi,\eta,\zeta,\cdots\cdots);\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(\xi,\eta),\cdots\cdots,$

$$u_x=f_\xi\xi_x+f_\eta\eta_x+\cdots\cdots,$$

$$\begin{aligned}u_{xx}=&f_{\xi\xi}\xi_x{}^2+f_{\eta\eta}\eta_x{}^2+\cdots\cdots\\&+2f_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+2f_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x+\cdots\cdots\\&+\cdots\cdots\\&+f_\xi\xi_{xx}+f_\eta\eta_{xx}+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

餘如 u_{xy},u_{yy} 可類推.

二　隱函數　設 $F(x,y)=0$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3}.$$

三　Jacobians　設 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\psi_y}{D},\quad \frac{\partial x}{\partial \eta}=-\frac{\varphi_y}{D},\quad \frac{\partial y}{\partial \xi}=-\frac{\psi_x}{D},\quad \frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{\varphi_x}{D},$$

$$D=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\varphi_x\psi_y-\psi_x\varphi_y.$$

(1) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}}$$

(2) 設 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$, 又 $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\cdot\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

2. 兩重數序之審歛法

兩重數序 a_{nm} 收歛

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=a$$

之必要與充分條件,不論 ϵ 為任何正數,必有一 N 可求,使 $n>N$, $m>N$, $n'>N$, $m'>N$ 時皆足致

$$|a_{nm}-a_{n'm'}|<\epsilon.$$

如是則 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$ 分別存在時必有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{nm}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nm}\right).$$

3. 匀歛性暨無盡運算之互易先後

一 Dini定理 設 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots$ 在一閉區內為連續而又為正;苟此函數數序歛於一連續函數,則其歛有匀性.

二 求導與求積互易先後(在積分符號下對輔變數求導) 若 $f(x,y)$ 及 $f_x(x,y)$ 在規定變區中連續,

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy=\int_a^b f_x(x,y)dy.$$

三 旁義積分中求導與求積之互易先後 若 $f_x(x,y)$ 在規定變區中有連續性,又 $\int_0^\infty f(x,y)dy$ 及 $\int_0^\infty f_x(x,y)dy$ 在同一變區中為匀歛,

$$\frac{d}{dx}\int_c^\infty f(x,y)dy=\int_c^\infty f_x(x,y)dy.$$

四 對兩變數求積之互易先後 若 $f(x,y)$ 為連續函數，又 a,b,α,β 為常數，

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

若上下界非常數，而求積係施于整個範圍，則上下界規定後，求積次序，亦可互易.

五 旁義積分中對兩變數求積之互易先後 若 $\int_0^\infty f(x,y)dy$ 在 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 有勻斂性，

$$\int_\alpha^\beta dx\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty dy\int_\alpha^\beta f(x,y)dx.$$

4. 特殊定積分

一 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$； $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\pi$.

二 Fresnel 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\tau^2)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\tau^2)d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

三 Fourier 積分定理 設 $f(x)$ 為按段光滑，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 為斂積分，又 $f(x+0)+f(x-0)=2f(x)$，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)e^{ix\tau}d\tau,$$

$$g(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-it\tau}dt.$$

四 Γ 函數 若 $x>0$，Γ 函數之定義為

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2x-1}dt,$$

滿足 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；

故 x 為正整數時， $\Gamma(n)=(n-1)!$

若 x 不等於 $0,-1,-2\cdots\cdots$，而為其他任何數時，

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x=\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}},$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}.$$

其中 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\log n\right)$為 Euler 常數，又 m 若為不小於 2 之整數($m\geqq 2$)，

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^m}=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{d^m}{dx^m}\log\Gamma(x).$$

又
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

故
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

五 Beta 函數 設 $x>0$ 及 $y>0$, Beta 函數之定義為

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+t\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{y-1}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\phi\cos^{2y-1}\phi\,d\phi.$$

其與 Γ 函數之關係為

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

5. 中値定理

一 兩個自變數之中値定理

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)$$
$$+kf_y(x+\theta h,y+\theta k),\quad 0<\theta<1.$$

二 兩個自變數之 Taylor 定理

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x+kf_y$$
$$+\frac{1}{2!}[h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}]$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[h^n f_{x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}kf_{x^{n-1}y}+\cdots\cdots+k^n f_{y^n}\right]$$

$$+R_n,$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)\right]^{n+1},$$

$$0<\theta<1.$$

三　兩個自變數之 Taylor 級數

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}[hf_x+kf_y]$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}]$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left[h^nf_{x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}kf_{x^{n-1}y}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+k^nf_{y^n}\right]+\cdots\cdots$$

四　重積分之中值定理　若 ΔR 為變區 R 之面積，μ 為 $f(x,y)$ 之值，介於其最大及最小值之間者，

$$\iint_R f(x,y)\,dS=\mu\,\Delta R.$$

又設 $p(x,y)\geqq 0$，復有

$$\iint_R f(x,y)p(x,y)\,dS=\mu\iint_R p(x,y)\,dS.$$

6. 矢量運算公式

設 v 為三維空間中之矢量，其沿直角坐標軸部分分別為 v_1,v_2,v_3.

矢量之長　$|v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$.

矢量相加　$z=u+v$　為一矢量，其矢量部分為

$$z_1=u_1+v_1,\quad z_2=u_2+v_2,\quad z_3=u_3+v_3.$$

矢量之標積　$uv=|u|\,|v|\cos\delta=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$,

其中 δ 為 u 及 v 間之角.

矢量之矢積 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{uv}]$ 爲一矢量，其沿坐標軸部分爲

$$z_1=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix},\quad z_2=\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix},\quad z_3=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

矢量求導 $$\frac{d(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

$$\frac{d(\boldsymbol{uv})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

$$\frac{d[\boldsymbol{uv}]}{dt}=\left[\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{v}\right]+\left[\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right].$$

當坐標軸轉動時，矢量部分與 x,y,z 依同一法則轉換.

設有一單位矢量 $\boldsymbol{n}$，其矢量部分爲 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$，所謂一函數 $f(x,y)$ 對矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向之導數爲

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\sin\alpha)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial n}.$$

因之 $$\frac{\partial}{\partial n}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}.$$

復因 $$\frac{\partial x}{\partial n}=\cos\alpha,\quad \frac{\partial y}{\partial n}=\sin\alpha,$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}.$$

據同理，設 $\boldsymbol{n}$ 爲三維空間中之一單位矢量，其部分爲 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，則

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}.$$

設 $f(x_1,x_2,x_3)$ 爲一函數，其陡量爲一矢量 $\operatorname{grad} f=(f_x,f_y,f_z)$；$f$ 對單位矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向之導數爲 $\boldsymbol{n}\operatorname{grad} f$.

設 $\boldsymbol{u}(x_1,x_2,x_3)$ 爲一矢量場，其旋量爲一矢量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ 如

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

其散度為一標量如

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

以∇(nabla)作一矢量,其部分為$\frac{\partial}{\partial x_1}$、$\frac{\partial}{\partial x_2}$,$\frac{\partial}{\partial x_3}$者,則

$$\operatorname{grad} f=\nabla f, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}=[\nabla \boldsymbol{u}], \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}=\nabla \boldsymbol{u}.$$

又 $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f=0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}=0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f=\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3{}^2}.$$

7. 重積分

一 重積分之轉換式 若 xy 平面中一有向區域 R 攝影於 uv 平面中有向區域 R',其間關係可逆而一一相應,其 Jacobian

$$D=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不處處為零,

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy=\iint_{R'} f(x,y)D\cdot du\,dv.$$

在多維區域中亦有一相似公式.轉換於極坐標

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta,$$

或 $$x=r\cos\phi\sin\theta, \quad y=r\sin\phi\sin\theta, \quad z=r\cos\theta$$

之公式,因之為

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy=\iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta,$$

$$\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\iiint_{R'} f(x,y,z)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

二 重積分之分解 設 $\alpha\leqq y\leqq\beta$,又不論任何 y,設 $a=a(y)\leqq x\leqq b(y)=b$,

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

8. Gauss, Stokes 及 Green 積分定理

一 平面中定理 若 R 爲單連區域，C 爲其中連接任何兩點之曲線，則線積分

$$\int_C (a\,dx + b\,dy) = \int_C \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{x},$$

與途徑無關之必要與充分條件爲

$$a_y = b_x,$$

是即可積條件．如是則其途徑之起點固定時，爲其終點(ξ,η)之一函數$U(\xi,\eta)$而矢量$\boldsymbol{A}(a,b)$必滿足

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U.$$

Gauss 定理 設 R 爲一單連區域，其邊界爲 C，

$$\iint_R [f_x(x,y) + g_y(x,y)]\,dx\,dy = \int_{+C} [f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx],$$

或以矢量表之，

$$\iint_R \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,dx\,dy = \int_C \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{n}\,ds = \int_C A_n\,ds,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 爲一單位矢量，其方向爲向外之法線方向．A_n 爲 $\boldsymbol{A}(f,g)$之法線部分而 s 爲邊界之弧長．

Green 公式

$$\begin{aligned}
&\iint_R (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy \\
&= -\iint_R u\,\Delta v\,dx\,dy + \int_{+C} (-u\,v_y\,dx + u\,v_x\,dy) \\
&= -\iint_R v\,\Delta u\,dx\,dy + \int_{+C} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_R (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy &= \int_{+C} [(v u_y - u v_y)\,dx - (v u_x - u v_x)\,dy] \\
&= \int_{+C} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds;
\end{aligned}$$

或以矢量表其第一式，

$$\iint_R (\text{grad}\, u \ \text{grad}\, v)\, dx\, dy$$

$$= -\iint_R v \ \text{div grad}\, u \ dx\, dy + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

其中 $$\Delta u = \text{div grad}\, u = u_{xx} + u_{yy},$$

而$\frac{\partial}{\partial n}$則對向外線之方向求導.

二 空間中定理 若R為一單連區域,C為連結其中兩點之曲線,

則 $$\int_C (a\,dx + b\,dy + c\,dz) = \int_C A\,dx,$$

與途徑無關之必要與充分條件為

$$\text{rot}\, A = 0,$$

或 $$a_y = b_x, \quad b_z = c_y, \quad c_x = a_z.$$

面積分 設有一曲面S,其方程式為$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, 投影於uv平面,得一有向旨區域B,

$$\iint_S [a(x,y,z)dy\,dz + b(x,y,z)dz\,dx + c(x,y,z)dx\,dy]$$

或 $$\iint_B \Big[a(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + b(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + c(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big] du\,dv.$$

Gauss 定理 設n為一單位矢量,其方向為向外法線之方向,A_n為$A(a,b,c)$之法線部分,又$\frac{\partial}{\partial n}$表對向外法線方向之求導,

$$\iiint_R (a_x + b_y + c_z)dx\,dy\,dz = \iint_S \Big(a\frac{\partial x}{\partial n} + b\frac{\partial y}{\partial n} + c\frac{\partial z}{\partial n}\Big)dS,$$

或以矢量表之,

$$\iiint_R \text{div}\, A\, dx\,dy\,dz = \iint_S A n\, dS = \iint_S A_n\, dS,$$

右列之面積分乃施展於R之邊界,為一迴合曲面S.

Green 公式

$$\iiint_R (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\iiint_R u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz + \iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS,$$

$$\iiint_R (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

其中 S 及 $\frac{\partial}{\partial n}$ 之意義仍如上，而

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Stokes 定理 設 S 爲一有向曲面，其邊界爲一有向曲線 C，$\boldsymbol{A}$ 爲一矢量如 $\boldsymbol{A}=(\phi,\psi,\chi)$，其沿切線之部分爲 A_t，又以 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_n$ 表 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 之向外法線部分，s 爲邊線之弧長，依正向爲增者，

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dx\,dy\right]$$
$$= \int_C (\phi\,dx + \psi\,dy + \chi\,dz),$$

或
$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_n\,dS = \int_C A_t\,ds.$$

9. 莫大及莫小値

下法僅可用以審定變區以內之莫大及莫小値.

$u=f(x,y)$ 得其莫大及莫小値之必要條件

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

在此條件下，如

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

則有一莫大或莫小値，以 f_{xx}（隨之而 f_{yy}）之正或負定莫小或莫大. 若

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

則無莫大及莫小.

若 $u=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 中 n 個復受 m 個條件限制($m<n$)，

$$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0, \cdots\cdots, \varphi_m(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0,$$

則有待定因子法,以

$$F=f+\lambda_1\phi_1+\cdots+\lambda_m\phi_m.$$

除 m 個條件外,復有

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\cdots\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}=0,$$

合而為 $(m+n)$ 個必要條件以定 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_m,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$.

10. 曲線及曲面

本節中以 (ξ,η) 或 (ξ,η,ζ) 表流動坐標.

一 平面曲線

曲線方程式:(a) $y=f(x)$, (b) $F(x,y)=0$,

(c) $x=\phi(t),y=\psi(t)$

切線方程式:(a) $\eta-y=(\xi-x)f'(x)$,

(b) $(\xi-x)F_x+(\eta-y)F_y=0$,

(c) $\{\xi-\phi(t)\}\psi'(t)-\{\eta-\psi(t)\}\phi'(t)=0$.

法線方程式:(a) $(\xi-x)+(\eta-y)f'(x)=0$,

(b) $(\xi-x)F_y-(\eta-y)F_x=0$,

(c) $\{\xi-\phi(t)\}\phi'(t)+\{\eta-\psi(t)\}\psi'(t)=0$.

曲率: (a) $k=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(b) $k=-\dfrac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(c) $k=\dfrac{\dot\phi\ddot\psi-\ddot\phi\dot\psi}{(\dot\phi^2+\dot\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$.

曲率半徑: $\rho=\dfrac{1}{|k|}$.

法包線: (a) $\xi=x-y'\dfrac{1+y'^2}{y''}$, $\eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}$.

(b) $\xi=x+F_x\dfrac{F_x^2+F_y^2}{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}$,

$\eta=y+F_y\dfrac{F_x^2+F_y^2}{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}$.

$$(c)\quad \xi=\phi-\dot\psi\frac{\dot\phi^2+\dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi-\ddot\phi\dot\psi},\quad \eta=\psi+\dot\phi\frac{\dot\phi^2+\dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi-\ddot\phi\dot\psi}.$$

切展線：　$\xi=x+(a-s)x_s$,　$\eta=y+(a-s)y_s$,

其中 a 為一任意常數，而 s 為由一點起量之弧長.

反凹點：必要條件為

$$(a)\ y''=0,\quad (b)\ F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2=0,$$

$$(c)\quad \dot x\ddot y-\ddot x\dot y=0.$$

兩曲線間之角：

$$(b)\quad \cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\sqrt{G_x^2+G_y^2}},$$

$$(c)\quad \cos\omega=\frac{\dot x\dot x_1+\dot y\dot y_1}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\sqrt{\dot x_1^2+\dot y_1^2}}.$$

兩曲線相垂直之條件：

$$(b)\quad F_xG_x+F_yG_y=0,\quad (c)\quad \dot x\dot x_1+\dot y\dot y_1=0.$$

兩曲線相切之條件：

$$(b)\quad F_xG_y-F_yG_x=0,\quad (c)\quad \dot x\dot y_1-\dot x_1\dot y=0.$$

兩曲線在一點有 n 重接觸：

$$f(x)=g(x),\ f'(x)=g'(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x),$$
$$f^{(n+1)}(x)\neq g^{(n+1)}(x).$$

二　空間曲線

曲線方程式：$x=\phi(t)$,　$y=\psi(t)$,　$z=\chi(t)$.

切線之方向餘弦：

$$\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}},\quad \frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}},\quad \frac{\dot z}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}.$$

曲率：　$|k|=\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$, s 為曲線之弧長.

三　曲面

曲面方程式：(a) $z=f(x,y)$，(b) $F(x,y,z)=0$，

(c) $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$.

切面方程式：(a) $\zeta-z=(\xi-x)f_x+(\eta-y)f_y$，

(b) $(\xi-x)F_x+(\eta-y)F_y+(\zeta-z)F_z=0$，

(c) $$(\xi-x)\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}+(\eta-y)\frac{\partial(\chi,\phi)}{\partial(u,v)}+(\zeta-z)\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}=0.$$

法線之方向餘弦：

(a) $$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{+1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

(b) $$\cos\alpha=\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}.$$

(c) $$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$A=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(\chi,\phi)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}.$$

兩曲面間之角：

$$\cos\omega=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

兩曲面垂直之條件：

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0.$$

四　包線及包面曲線族

$f(x,y,c)=0$ 或一曲面族　$f(x,y,z,c)=0$ 之包線或包面當於

$$f=0,\quad f_c=0$$

中消去 c 而得之.此兩方程式包含包線(或包面)及其奇點.

若一曲線族之方程式為 $x=\phi(t,c)$, $y=\psi(t,c)$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial c}-\frac{\partial\phi}{\partial c}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0.$$

兩參變曲面族 $f(x,y,z,c_1,c_2)=0$ 之包面由

$$f=0,\quad f_{c_1}=0,\quad f_{c_2}=0,$$

消去 c_1 及 c_2 而得之.

11. 弧長、面積及體積

一 弧長 平面曲線 (a) $y=f(x)$, (b) $F(x,y)=0$,

(c) $x=\phi(t), y=\psi(t)$, (d) (極坐標) $r=r(\theta)$.

弧長為 (a) $s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, (b) $s=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2+F_y^2}\,dx$,

(c) $s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, (d) $s=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$.

空間曲線 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$,

弧長為 $$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt.$$

二 平面中之面積

(a) $\int_{x_0}^{x_1}y\,dx$, (b) (極坐標) $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}r^2d\theta$,

(c) $\iint_R dx\,dy=-\int_C y\,dx=\int_C x\,dy=\frac{1}{2}\int_C(x\,dy-y\,dx)$.

三 曲面之面積 設曲面之方程式為

(a) $z=f(x,y)$, (b) $F(x,y,z)=0$,

(c) $x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$.

又設 $$F=\phi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2,$$

$$F=\phi_u\phi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v,$$

$$G=\phi_v^2+\psi_v^2+\chi_v^2$$

$$EG-F^2=(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)^2+(\psi_u\chi_v-\psi_v\chi_u)^2+(\chi_u\varphi_v-\chi_v\varphi_u)^2,$$

則在曲面上作一曲線 $u=u(t)$, $v=v(t)$, 其弧長爲

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt.$$

又高懸於 xy 平面一變區 R 上之曲面面積爲

$$A=\iint d\sigma$$

(a) $$A=\iint_R\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy.$$

(b) $$A=\iint_R\frac{1}{F_z}\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\,dx\,dy,$$

(c) $$A=\iint_R\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

四 轉成曲面之面積 設有一轉成曲面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\phi(u),$$

由 $z=\phi(x)$ 以 z 軸爲轉軸而轉成者，其面積爲

$$A=2\pi\int_{u_0}^{u_1}u\sqrt{1+\phi'^2(u)}\,du=2\pi\int_{s_0}^{s_1}u\,ds.$$

設有一 n 維空間中之單位球面

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=1,$$

其面積爲

$$\omega_n=\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

五 體積 介於一曲面 $z=f(x,y)$ 及 xy 平面中一變區 R 之體積爲

$$V=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

若 V 爲一迴合曲面 S 所圍成，其體積爲

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz=-\iint_S z\,dx\,dy$$

$$=-\iint_S x\,dy\,dz=-\iint_S y\,dz\,dx.$$

用球面坐標表之，

$$V=\iiint_B r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

若有一轉成曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=\phi(u)$，其體積爲

$$V=\pi\int_{z_0}^{z_1} u^2 \, dz.$$

設有一 n 維空間中之單位球，其體積爲

$$v_n=\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

12. 解析函數

複函數　$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ 可導條件即爲解析函數之條件爲 Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x=v_y,\quad v_x=-u_y.$$

Cauchy 定理　若 $f(t)$ 爲單連區 R 中之解析函數，C 爲 R 中一迴合曲線，則

$$\int_C f(t)\,dt=0.$$

Cauchy 公式　在如上同一條件下

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

其中 z 爲 R 中之點.設 $f(t)$ 在 $|z-z_0|\leqq R$ 爲解析，

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (z-z_0)^\nu,$$

$$c_\nu=\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{\nu+1}}\,dt.$$

雜 題

1.設有兩個矢量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{y}$(或三個矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$); 若無不等於零之數 a 及 b(或 a,b,c)使如下條件成立,或如下條件惟有 $a=b=0$(或 $a=b=c=0$) 時能成立者:

$$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}=0 \quad (\text{或 } a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}=0),$$

則 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{y}$ 間(或 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 間)無線性關聯或謂線性獨立. 若其有不等於零之數 a 及 b(或 a,b,c),使如上條件成立者,則謂有線性關聯. 試證下列各題:

(a)三個矢 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 中如有任何兩者互相垂直,必無線性關聯.

(b)二個矢量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{y}$(或三個矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$)無線性關聯之必要與充分條件為

$$[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}]\neq 0,$$

或

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

(c)平面中兩矢量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{y}$ 如無線性關聯,則平面中任何其他矢量 $\boldsymbol{v}$ 得以 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}$ 表之. 據同理,如 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 無線性關聯,則任何矢量 $\boldsymbol{v}$ 可寫如 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}$.

2.設 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 為三個矢量,則吾人已知

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]=\boldsymbol{y}[\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z});$$

試證下列恆等式:

$$(a)\quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')=\begin{vmatrix} xx' & xy' & xz' \\ yx' & yy' & yz' \\ zx' & zy' & zz' \end{vmatrix}.$$

$$(b)\quad [\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}']=(xx')(yy')-(xy')(yx').$$

$$(c)\quad [\boldsymbol{x}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]]=(xz)y-(xy)z.$$

$$(d)\quad ([\boldsymbol{x}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}]],[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}]],[\boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}]])=0.$$

以最後一式如下之理,若有三條共點直線,其中每一條如垂直於其他兩條所規定之平面,則經過此每一條作一平面,所得三個平面必相交於一直線.

3.設 Ox,Oy 為平面中垂直坐標軸.如 Ox',Oy' 為另一垂直坐標系,而以 φ 表 xOx' 一角,

則兩坐標系間之轉換式爲

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

4. 由題 3 所得結果證

$$\cos(\varphi+\psi) = \mathrm{sos}\,\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \quad \sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.$$

5. 設 Ox, Oy, Oz 及 Ox', Oy', Oz' 爲兩坐標系，有同一向背者，其角之方向餘弦如下表：

	x'	y'	z'
x	α_1	β_1	γ_1
y	α_2	β_2	γ_2
z	α_3	β_3	γ_3

如是則

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, \qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0,$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1, \qquad \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0,$$

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1, \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

前已證之．凡三行行列式 Δ，其元素滿足上列條件者，謂有垂直性．試證

(a) 無論何種垂直行列式 Δ，其値等於 1 者，必有兩坐標系 Ox, Oy, Oz 及 Ox', Oy', Oz' 可求，有同一向背，其坐標軸間之方向餘弦適爲 Δ 之元素．

(b) 任何垂直行列式必同時滿足下列關係：

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=0, \qquad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,$$

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=0, \qquad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,$$

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=0, \qquad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

*6. 設 Ox, Oy, Oz 及 Ox', Oy', Oz' 爲兩坐標系如題 5．假定 Oz 與 Oz' 不相合，其間之角 zOz' 爲 $\theta (0<\theta<\pi)$．作半矢徑 Ox_1 與 Oz 及 Oz' 各垂直，使 Ox_1, Oz, Oz' 與 Ox, Oy, Oz 有同一向背．如是則 Ox_1 爲 Oxy 及 $Ox'y'$ 兩平面相交之處．試以 φ 表 xOx_1 之角，以 ψ 表 x_1Ox'，並分別在其 Oxy 及 $Ox'y'$ 平面中以尋常正向計算之．試證此兩坐標系間之轉換式爲

	x'	y'	z'
x	$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta$	$-\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta$	$\sin\varphi\sin\theta$
y	$\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\theta$	$-\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi\cos\theta$	$-\cos\varphi\sin\theta$
z	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

(此結果當 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，即 φ 及 ψ 不定而為 $\varphi+\psi=\angle xOx'$, $\varphi-\psi=\angle xOx'$ 時仍為有效．此三種坐標角 φ,ψ,θ 常稱之為 Euler 角．據此結果及題5結果，可知最普遍之垂直行列式 Δ，其值為1者，可由此 Euler 角以輔變數形式表達之，惟必受制於下列不等式耳：

$$0\leqq\theta\leqq\pi,\quad 0\leqq\varphi<2\pi,\quad 0\leqq\psi<2\pi.)$$

7．設 ABC 為單位球面（球面之半徑為1者）上一球面三角形，其邊為 a,b,c 而角為 A,B,C．由題6證"餘弦定理"：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

8．求下列平面　　$Ax+By+Cz+D=0$

與一直線　　$x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t,\quad z=z_0+\gamma t$

間之角．

9．解下列聯立線性方程式：

$$2x-3y+4z=4,$$

$$4x-9y+16z=10,$$

$$8x-27y+64z=34.$$

10．證下列恆等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2,$$

先求　$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix}$ 兩行列式之積．

*11．證下列行列式之值與 θ 無關：

$$D=\begin{vmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\beta) & \cos(\theta+\gamma) \\ \sin(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\beta) & \sin(\theta+\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix}.$$

12．若 $A=x^2+y^2+z^2$，$B=xy+yz+zx$，證

$$D=\begin{vmatrix} B & A & C\\ C & B & A\\ A & C & B\end{vmatrix}=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

13. 證

$$\Delta=\begin{vmatrix} t_1+x & a+x & a+x & a+x\\ b+x & t_2+x & a+x & a+x\\ b+x & b+x & t_3+x & a+x\\ b+x & b+x & b+x & t_4+x\end{vmatrix}$$

可化爲 $A+Bx$，其中 A 及 B 不隨 x 而變．故令 x 有特殊之値．可證

$$A=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b},\qquad B=\frac{f(b)-f(a)}{a-b},$$

其中

$$f(t)=(t_1-t)(t_2-t)(t_3-t)(t_4-t).$$

*14. 若 u 及 v 爲 x 之函數，又 $v=\frac{1}{u}$，試證 $v'''=\frac{D}{u^4}$，其中 D 爲

$$D=\begin{vmatrix} u''' & 3u'' & 3u'\\ u'' & 2u' & u\\ u' & u & 0\end{vmatrix}.$$

15. (a) 凡函數 u 之有 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 形式者必滿足一個微分方程如

$$uu_{xy}-u_xu_y=0.$$

*(b) 證本題(a)之逆．

16. 證　$u(x,y,z)=\dfrac{f(t+r)}{r}+\dfrac{g(t-r)}{r}$　$(r^2=x^2+y^2+z^2)$

必滿足　$\Delta u=u_{tt}$．

17. 若 u 之初重偏導數 u_x, u_y 滿足一關係如 $F(u_x,u_y)=0$，則必有

$$u_{xx}u_{yy}-u^2_{xy}=0.$$

*18. 一曲面 $u=f(x,y)$ 被平面 $y=cx$ 相交於直線者必滿足

$$x^2u_{xx}+2xyu_xu_y+y^2u_{yy}=0.$$

19. 試爲下列連續函數求一 $\delta=\delta(\epsilon,x,y)$，

(a) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+2y^2}$，

(b) $f(x,y)=\sqrt{1+e^{xy}}$．

20. 證下列函數

$$f(x,y)=\text{[illegible]},\qquad g(x,y)=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2-x}$$

當(x,y)沿任何直線趨於原點時必趨於零，惟 f 及 g 在原點無連續性.

21. 設 C 為一光滑曲線，其切線作連續轉動，d 為曲線上兩點間之最短距離，l 為兩點間之弧長，證 $d-l=o(d)$ 以如 d 趨零之數量級趨零.

22. 求
$$S=\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\,\frac{1}{x^a y^b},$$

假定其中$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<1, x>0, y>0$.

23. 應用 Euler 關係，證一 n 次之齊次函數 $S_n(x,y,z)$ 如滿足 Laplace 方程式，亦必滿足

$$\Delta(r^{2m}S_n)=2m(2n+2m+1)r^{2m-2}S_n,$$

其中
$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

24. 證一曲線 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$　（t 為任意輔變數）之曲率為

$$k=\pm\frac{[\mathbf{x}'^2\mathbf{x}''^2-(\mathbf{x}'\mathbf{x}'')^2]^{\frac{1}{2}}}{(\mathbf{x}'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

25. 設有一空間曲線 C 如 $x=x(s), y=y(s), z=as$，其中 s 為平面曲線 $x=x(s), y=y(s)$ 之弧長. 證其在任何一點 P 之密吻面必含有柱面 $x=x(s), y=y(s)$ 在 P 之法線. 又 C 之曲率及扭率分別為

$$k=\frac{x'y''-x''y'}{1+a},\qquad \tau=\frac{a(x'y''-x''y')}{1+a^2}.$$

26. 從曲線　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z=f(\theta)$　在 θ 點上之密吻面求方程式. 若 $f(\theta)=\dfrac{1}{A}\cosh A\theta$，則其每一密吻面必切一球面，以原點為中心，而半徑為$\sqrt{1+\dfrac{1}{A^2}}$者.

27. 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 之上作一曲線，其切線在任何一點 P 與 z 軸間之角，適等於柱面之切面在 P 與 y 軸間之角. 試證 P 之坐標可由一輔變數 θ 以如下方程式表達之：

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=c\pm a\log\sin\theta,$$

復證其曲線之曲率為$\dfrac{1}{a}\sin\theta(1+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$.

28. (a) [illegible]一平面之經過一曲線如

$$x=\frac{1}{3}at^3,\ y=\frac{1}{2}bt^2,\ z=ct$$

上任何三點 t_1, t_2, t_3 必有下列方程式

$$\frac{3x}{a}-2(t_1+t_2+t_3)\frac{y}{b}+(t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)\frac{z}{c}-t_1t_2t_3=0.$$

(b)證其在 t_1, t_2, t_3 三點上之密切面相交於此平面之中

29. 設有一三角形，其邊角為 a, b, c，A, B, C，而其面積爲 s，又以 R 爲其外切圓之半徑，證

$$ds=R(\cos A\,da+\cos B\,db+\cos C\,dc)$$

30. 設 A 爲空間中一固定點，P 爲一動點，其運動由時間之函數表達之．如以 $\dot{\boldsymbol{P}}$ 表 P 點之速度矢量，又以 $\boldsymbol{a}$ 表一單位矢量，自 P 指向 A 者，試證

$$\frac{d}{dt}(AP)=-\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{P}}$$

31. 設 A, B, C 爲三固定點，P 爲一動點．P 之速度矢量 $\dot{\boldsymbol{P}}$ 沿 PA，PB，PC 方向之部分分別以 u, v, w 表之，其沿 PA, PB, PC 三方向之單位矢量以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表之．試證

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\dot{\boldsymbol{a}}=\left(\frac{\cos APB}{PA}v+\frac{\cos APC}{PA}w\right)\boldsymbol{a}-\frac{v}{PA}\boldsymbol{b}-\frac{w}{PA}\boldsymbol{c}.$$

32. 試證 P 之加速度矢量 $\ddot{\boldsymbol{P}}$ 爲

$$\ddot{\boldsymbol{P}}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c},$$

其中
$$\alpha=\dot{u}+uv\left(\frac{\cos APB}{PA}-\frac{1}{PB}\right)+uw\left(\frac{\cos APC}{PA}-\frac{1}{PC}\right),$$

β, γ 可類推．

33. 平面中一動圓如經過一固定點 O，其中心又描寫一以 O 爲中心之兩次曲線．求其包線．

34. 設 Γ 爲一平面曲線，O 爲平面中一點；由 O 垂直投影於 Γ 之各切線所得軌跡常以 Γ 對 O 之趾線 Γ' 稱之．若有一點 M，描寫一曲線 Γ，則其趾線 Γ' 爲一以 OM 爲直徑之動圓之包線．

35. 設有一動球面，以題 34 中之 OM 爲直徑者，其包面爲何如

36. 設題 34 中之 Γ 爲一圓，O 爲圓周上一點，試考題 34 及 35 中之動圓及動球面，其包線及包面爲何如．

37. 設 MM' 爲一橢圓之動弦，平行於其副軸者；考動圓之以 MM' 爲直徑者而求其包線．

38. 設有一平面，與兩拋物線

$$z=0,\quad y^2=4x \quad 及 \quad z=3,\quad y^2=-4x$$

相切之條件下移動;證其包面爲拋物柱面.

39. 試推廣第三章附錄第一節中結果,於 n 個變數,證如下之理. 設 $f(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ 在一駐點 $x_1=x_1^0,\cdots\cdots,x_n=x_n^0$ (即 $f_{x_1}=0,\ f_{x_2}=0,\cdots\cdots,f_{x_n}=0$ 之處)鄰近三重連續可導. 試考 f 在 x^0 之二重全微分

$$d^2f^0=\sum_{i,k=1}^{n} f^0_{x_ix_k}dx_idx_k,$$

是爲 $dx_1,\cdots\cdots,dx_n$ 諸變數之二次齊次式. 若

$$D=\begin{vmatrix} f^0_{x_1x_1} & \cdots\cdots & f^0_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^0_{x_nx_1} & \cdots\cdots & f^0_{x_nx_n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

則 d^2f^0 可有三種主要情形: (1) f 爲正定,於是 f 有一真小值, (2) f 爲負定,有一真大值, (3) f 爲不定, f 無真小及真大值.

40. 若有一函數如 $f=(y-x^2)(y-2x^2)$, 此函數在原點 O (即 $x=y=0$) 有駐值,試證 (1) 就任何經過 O 之直線而論, f 在 O 有一真小值, (2) f 視爲 (x,y) 之函數,無真大及真小值.

41. 設 $P_1P_2P_3$ 爲一平面三角形,其三隻角皆小於 $120°$. 用題39之審定法,證其在 $P_1P_2P_3$ 以內之一點 P 滿足 $\angle P_2PP_3=\angle P_3PP_1=\angle P_1PP_2=120°$ 者, $PP_1+PP_2+PP_3$ 確爲真小值.

42. 設題41中之 $P_2P_1P_3$ 一角如大於或等於 $120°$, 則 $PP_1+PP_2+PP_3$ 何時有一真小值.

43. 欲研討 $f=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ 之駐值,其中變數要求適應 m 附帶條件如

$$\varphi_1(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0,\cdots\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0\quad(m<n) \tag{1}$$

者,可假定已求得 n 個變數及 m 個 λ_μ 之值,滿足

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\cdots\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}=0, \tag{2}$$

其中 $F=f+\lambda_1\varphi_1+\cdots\cdots+\lambda_m\varphi_m$, 而 $\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_m$ 對 $x_1,\cdots\cdots x_m$ 之 Jacobian 不等於零. 於是題 39 之審定法,可依如下程序應用之. 視 $x_{m+1},\cdots\cdots,x_n$ 爲自變數, 將(1)求導結果,得 $x_1,\cdots\cdots,x_m$ 之初重及二重微分爲 $x_{m+1},\cdots\cdots,x_n$ 之函數,然後輸入於

$$d^2f=\sum_{i,k=1}^{n} f_{x_ix_k}dx_idx_k+f_{x_1}d^2x_1+\cdots\cdots+f_{x_m}d^2x_m, \tag{3}$$

於是必須計算 $d^2x_1,\cdots\cdots,d^2x_m$ 而後可．此可以下法避免之．設 $x_1,\cdots\cdots,x_n$ 爲自變數，詳考下列齊次式

$$d^2F=\sum F_{x_ix_k}dx_idx_k=d^2f+\lambda_1d^2\varphi_1+\cdots\cdots+\lambda_md^2\varphi_m.$$

由 $$d\varphi_\mu=\varphi_{\mu x_1}dx_1+\cdots\cdots+\varphi_{\mu x_n}dx_n=0\quad(\mu=1,2,\cdots\cdots,m)$$

求 $dx_1,dx_2,\cdots\cdots,dx_m$ 而代入於 d^2F，得 $dx_{m+1},\cdots\cdots,dx_n$ 諸變數之一齊次式 δ^2F．苟此齊次式之行列式不等於零，則有三種主要情形，視 δ^2F 爲正定、負定或不定，以決定其有莫小值、莫大值或無莫大及莫小值．

44．欲在 $\varphi=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n-a=0\ (a>0)$ 條件下求 $f=x_1x_2\cdots\cdots x_n$ 之莫大值，用 Lagrange 待定因子法，可知 f 之駐值必在 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$ 時獲得之．試用題 43 所述之法，判定其必爲一莫大值．

45．用題 43 審定法，證三角形之周圍相等者，以等邊三角形之面積爲最大．

46．考曲線 $x^3+y^3-3axy=0$ 在原點有一重點，其切線在此果爲何如．

47．描繪 $(y-x^2)^2-x^5=0$ 之曲線，觀其在原點之尖點．在尖點與 $x^2-y^3=0$ 之尖點相比，有何不同．

48．(a)若所有各數均爲正數，試證 $lx+my+nz$ 在 $x^p+y^p+z^p=c^p$ 條件下之駐值爲

$$c(l^q+m^q+n^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$．

(b)證此駐值當 $p>1$ 時爲莫大值，$p<1$ 時爲莫小值．

49．求 $$2x^2+(x-y)^2-6y$$ 得其駐值時之 x 及 y．

50．若 Σ 爲一閉合凸形曲線，ABC 爲其外切三角形中面積最小者，則 Σ 與三角形各邊之接觸點爲其邊之中心．

51．若爲 α 一轉變數，證下列曲線族

$$(x\cos\alpha-y\sin\alpha-b)^3=c(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2$$

中每一曲線均有一尖點，而一切尖點皆在一圓之上．

52．若 $C=f(a,b)$ 確爲 $f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 條件下之莫大或莫小值，則一般言之，

$C' = \varphi(a,b)$ 為 $\varphi(x,y)$ 在 $f(x,y)=0$ 條件下之最大或最小值.

53.一圓之半徑為 a 者沿一固定直線而轉動,注視其中一固定切線. 當此轉動切線與固定直線相合時,取其接觸點為坐標原點,從而證明切線之包線為

$$x = a(\theta + \cos\theta\sin\theta - \sin\theta),$$

$$y = a(\cos^2\theta - \cos\theta).$$

54.若球面上一點之坐標(x,y,z)為

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta,$$

試證 $\theta+\varphi=\alpha$, $\theta-\varphi=\beta$ 兩族中每一曲線之經過(θ,φ)者相交必成一角如 $\arccos\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$.

又此每一曲線之曲率半徑為

$$\frac{a(1+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{(5+3\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

55.若 $$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1-x^2\cos^2\theta)d\theta,$$

試證 $f(x)$ 當 $x^2 \leqq 1$ 時為有限,又 $x^2<1$ 時,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx}[\log(1-x^2\cos^2\theta)]d\theta,$$

並是以求 $f(x)$ 之值.

56.試證 $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = f(\theta)$$

之面積,介於兩平面 $z=z_1$, $z=z_2$ 及一垂直於 xy 平面之柱面以 $r=f'(\theta)$ 為其截面者,與其面積投於 $z=0$ 之垂直投影成如下比例:

$$[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})] : 1.$$

57.假定地球為一球面,半徑為 R,其離中心為 r 處之密度為

$$\rho = A - Br^2,$$

在球面上之密度 $2\frac{1}{2}$ 倍於水之密度,又其平均密度 $5\frac{1}{2}$ 倍於水之密度,試證在一內點上之吸力為

$$\frac{1}{11} g \frac{r}{R}\left(20 - 9\frac{r^2}{R^2}\right).$$

其中 g 為地面上重力常數.

58. 設(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) [illegible] 之向 [illegible] 如上排列，同時即表示正向旨). 證此三角形對 x 軸之轉動慣量 [illegible]

$$\frac{?}{6}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \text{[illegible]})$$

59. 以坐標原點爲中心，在 xy 平面之正面上，有一半球殼，其半徑爲 a，復有恆等密度 ρ，證其在$(0,0,z)$之勢函數，當 $0<z<a$ 時爲

$$\frac{2\pi\rho}{3z}\left[(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 + \text{[illegible]}\right] \text{[illegible]} \pi\rho z^2,$$

當 $z>a$ 時爲

$$\frac{2\pi\rho}{z}\left[(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + a^3 - \frac{1}{?}z^2 \text{[illegible]}\right] \text{[illegible]} \pi\rho z^2$$

60. 作

$$x = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{\lambda-\lambda^3}{1+\lambda^2}, \quad \text{[illegible]}$$

之草圖，並求其所圍之面積

61. 設有一平均密度之橢圓體，密度爲 ρ，其半軸爲 a, b, c. 證其在極之吸力爲

$$2\pi\rho\int_0^{2c} r(1 \text{[illegible]} \theta)\,dr.$$

其中 r 爲

$$r = \frac{2a \text{[illegible]} \theta}{\text{[illegible]}\cos^2\theta \text{[illegible]}}$$

62. 易

$$I = \int_2^{?} dx \int_{?}^{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}$$

之積分先後並求其值.

63. (a) 轉換於極坐標，以證

$$K = \int_0^{a\cos\beta}\left\{\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \text{[illegible]}\right\} \qquad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

之值爲 $a^2\beta\left(\log a - \frac{1}{2}\right)$.

(b) 將 K 之積分先後互易.

64. 一直角錐體

$$x^2+y^2=(h-z)^2\tan^2\alpha, \qquad 0\leqq z\leqq h,$$

被一直角柱面之底爲

$$(h\tan\alpha-r)^3=h^3\tan^3\alpha\sin^4\theta\cos^2\theta$$

者所割去之體積，試求之．z,r,θ 爲柱面極坐標，欲算之體積，在柱面之外，錐體之內．

65．設以雙曲拋物面 $z=xy$ 爲變區，證

$$I=\iint\frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}\,dS$$

之值施展於經過原點及(ξ,η,ζ)之創造線者，等於

$$-\arc\tan\frac{\xi^2\eta^2}{(\eta^2\zeta^2+\zeta^2\xi^2+\xi^2\eta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

66．若 $-1<a<1$，又 $-\frac{\pi}{2}<\arc\sin a<\frac{\pi}{2}$，證

$$K(a)=\int_0^\pi\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx=\pi\arc\sin a.$$

67．在正象限中爲 $x^3=a^2y$，$x^3=b^2y$，$y^2=cx$，$y^2=dx$ 所圍之面積爲

$$\frac{5}{12}(a^{\frac{6}{5}}-b^{\frac{6}{5}})(c^{\frac{4}{5}}-d^{\frac{4}{5}})$$

*68．設 Γ 爲空間中一閉合曲線，有一確定向旨．試證必有一矢量 $\boldsymbol{a}$，有如下特性者．若 $\boldsymbol{n}$ 爲任何單位矢量，Π 爲一平面，垂直於 $\boldsymbol{n}$，則 Γ 投於 Π 之垂直投影所圍之面積由 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{n}$ 之純積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 可以表達之（注意 $\boldsymbol{n}$ 示 Π 之向旨，而 Γ 示其在 Π 上投影之向旨）．又 Π 若與 $\boldsymbol{a}$ 平行，則 Γ 在 Π 投影之面積將爲零．

69．據 Kepler 定理證每單位質量加於行星軌道上之吸力爲

$$p=\frac{h^2}{q^3}\frac{dq}{dr},$$

其中 q 爲軌道上切線離極之距離，h 即爲面積常數．復次，每單位質量加於極之吸力如爲 μr^{-4}，則其軌道將爲 $r=a(1+\cos\theta)$．

*70．設有一質量爲 1 之質點，受兩種力之影響而運動．其一指向原點，且 λ^2 倍其離原點之距離．其二垂直於其運動軌跡，且 2μ 於其速度．若自原點沿 x 軸以等於 u 之速度開始運動，則以極坐標爲

$$x=\frac{u}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin u\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)t}\cos\mu,$$

$$y=\frac{u}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin u\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)t}\sin\mu.$$

71.(a)若 u,v 爲下列方程式

$$f(x)y'''-f'(x)y''+\varphi(x)y'+\lambda(x)y=0$$

之兩獨立解,則其通解爲 $Au+Bv+Cw$, 其中 A,B,C 爲任意常數而

$$w=u\int\frac{v f(x)\,dx}{(uv'-u'v)^2}-v\int\frac{u f(x)\,dx}{(uv'-u'v)^2}.$$

(b)解 $x^2(x^2+5)y'''-x(7x^2+25)y''+(22x^2+40)y'-30xy=0$,

其解有如 x^n 形式者.

72.一曲線在 P 點之切線與 y 軸在原點下相交於 T, 設此曲線滿足 $OP=n\cdot OT$ 關係,則其極坐標方程式爲

$$r=a\frac{(1+\sin\theta)^n}{\cos^{n+1}\theta}.$$

73.求 $z_{tt}=a^2z_{xx}$ 之解,同時滿足 $z_t^2-a^2z_x^2$ 者.

74.若 K 爲 x,y,z 之齊函數,證

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

必有一解,其形式爲 $x^2+y^2+z^2$ 之冪.

75.若 f 爲一解析函數,則 $\frac{d^n}{dx^n}f(\sqrt{x})$ 可由

$$2\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{f(y)}{(y+a)^{n+1}}$$

令 y 及 a 各等於 $\sqrt{x}$ 而得之.

76.若 x 及 y 爲實變數,則

$$|\sinh(x+iy)|\leqq A(x),$$

其中 $A(x)$ 與 y 無關,且隨 $x\to\pm\infty$ 而無限制趨大.試取一適當途徑求

$$\frac{1}{(z-w)\sinh z}$$

之積分以證　$$\frac{1}{\sinh w}=\frac{1}{w}+2w\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{w^2+\nu^2\pi^2}$$

答案及提示

第一章

第一節，第 447 頁．

3. 矢量之起點在 O，終點在 P,Q,R,S 者，分別以 p,q,r,s 表之．如是則矢量之起於 O，終於三角形 PQR 之質量中心者爲 $\frac{1}{3}(p+q+r)$，又矢量之起於 O，終於四面體之質量中心者爲 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}(p+q+r)+\frac{1}{4}s=\frac{1}{4}(p+q+r+s)$；此結果式與各點之先後次序無關．

4. 矢量 $\frac{1}{2}(p+q)$，$\frac{1}{2}(r+s)$，……，$\frac{1}{2}(q+r)$ 之終點爲 $A',B',\cdots,C'$ 而 AA',BB' 及 CC' 三直線有一共同平分點，即矢量 $\frac{1}{4}(p+q+r+s)$ 之終點，此點即爲四面體之質量中心．

第二節，第 451 頁．

1. 沿 l 取一單位矢量，又作一矢量，連結 P 及 l 上一點 $A(b,d,f)$ 求兩者之矢積，其長即爲欲求之距離：

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sqrt{\begin{vmatrix}x_0-b & y_0-d\\ a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_0-d & z_0-f\\ c & e\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_0-f & x_0-b\\ e & a\end{vmatrix}^2}.$$

2. 空間中兩直線 l 及 l' 之最短距離必與 l 及 l' 垂直，即平行於沿 l 及 l' 兩矢量之矢積．又 l 及 l' 之最短距離亦可將連結 l 及 l' 任何兩點之直線投影於 h 而得之．

$$\frac{1}{\sqrt{(ac'-a'c)^2+(ae'-a'e)^2+(ce'-c'e)^2}}\begin{vmatrix}a & c & e\\ a' & c' & e'\\ b-b' & d-d' & f-f'\end{vmatrix}.$$

3. 式之左方亦可作四面體之體積觀．

4. 矢量 $(\omega\alpha,\omega\beta,\omega\gamma)$ 及 (x,y,z) 之矢積之長

$$\omega\sqrt{(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2}.$$

6. 可假定原點在多邊形之內而證之已足，蓋行列式之和不受坐標系平移之影響．若原點在多邊形之內，則所有行列式將同正或同負，而爲 $OP_1P_2,OP_2P_3,\cdots\cdots,OP_nP_1$ 諸三角形之面積．

第三節，第 456 頁．

2. 如寫爲 $-d=d(-1),-e=e(-1),-f=f(-1)$，此三方程式可視爲 $x,y,-1$ 三變數之齊次方程式，其解存在之必要條件爲 $D=0$．若 $D=0$ 而 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq0$，則第三式爲前兩式之結果，而前兩式因行列式不等於零，故有解答．

3.若能求得 t,τ 使滿足

$$a_1t+b_1=c_1\tau+d_1,$$

$$a_2t+b_2=c_2\tau+d_2,$$

$$a_3t+b_3=c_3\tau+d_3.$$

則相交,其條件爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1-b_1 \\ a_2 & c_2 & d_2-b_2 \\ a_3 & c_3 & d_3-b_3 \end{vmatrix}=0.$$

4.將行列式中最後一列由前三列減去之.

第四節,第 466 頁.

1.(a) 0, (b) 2, (c) 12, (d) $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

2.$a+c=2b$.

3.(a)應用三矢量如 $\boldsymbol{x}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{y}=(a',b',c')$, $\boldsymbol{z}=(a'',b'',c'')$, 如是則 $D=[\boldsymbol{xy}]\boldsymbol{z}$, 又任何兩矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 必滿足

$$|[\boldsymbol{ab}]|\leqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|, \text{及} |\boldsymbol{ab}|\leqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|, \text{故} |D|\leqq|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|.$$

(b)當且祇當每行所代表之矢量互相垂直之時.

4. $ab+cd=0$, $a^2+c^2=b^2+d^2=1$.

6.但需有一點(x_0,y_0,z_0)始終在經過零點之一射線上即足,即有四個數 x_0,y_0,z_0,λ(前三個不全爲零)滿足

$$\lambda x_0=ax_0+by_0+cz_0,$$

$$\lambda y_0=dx_0+ey_0+fz_0,$$

$$\lambda z_0=gx_0+hy_0+kz_0,$$

故僅需選擇 λ, 使此三齊次方程式之行列式爲零(此爲規定 λ 之一三次方程式, 故必有一實根.

7. $x'=\frac{1}{2}(1+\cos\phi)x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\phi\cdot y+\frac{1}{2}(1-\cos\phi)z,$

$y'=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\phi\cdot x+\cos\phi\cdot y+\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\phi\cdot z,$

$z'=\frac{1}{2}(\cos\phi-1)x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\phi\cdot y+\frac{1}{2}(\cos\phi+1)z.$

9. 由第一節題 1 及行列式相乘法，知此行列式之平方爲 1.

第　二　章

第二節，第 476 頁.

2. $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.　4. $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$.

5. (a) 否. (b) 否. (c) 否. (d) 否. (e) 是. (f) 否. (g) 是. (h) 否.

第三節，第 483 頁.

1. 見本章第二節題 2: $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

3. $6x+2(a+c+k)$.

第五節，第 496 頁.

2. 可將錐體之頂置於坐標原點，則其方程式有 $u=\varphi($[illegible]$)$之形式.

4. (a) $g_{rr}+\frac{2}{r}g_r$.　5. $g_{rr}+\frac{n-1}{r}g_r$.

6. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{f_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(f_\theta\sin\theta)\right]$.

第六節，第 499 頁.

1. xy.

2. 應用 Taylor 定理，將 $f(2h, e^{-\frac{1}{2h}})$ 及 $f(0,0)$ 由 f 在 $(h, e^{-\frac{1}{h}})$ 之值及其初重二重導數之值表達之；相加復以 h^2 除之.

4. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^m y^n$；$|x|+|y|<1$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}$；對於一切 x 及 y 皆斂.

第七節，第 508 頁.

1. 應用 Taylor 定理，將曲線上一點之坐標由 f, g, h 及其初二重導數在 t_0 之值表之，復應用第一章第二節題 3，得

$$\begin{vmatrix} x-f(t_0) & f'(t_0) & f''(t_0) \\ y-g(t_0) & g'(t_0) & g''(t_0) \\ z-h(t_0) & h'(t_0) & h''(t_0) \end{vmatrix}=0.$$

3.若 y 爲球體中心,則 $\sqrt{(x-y)^2}$ [illegible] 必停於零,應用 $x^2=1$ 及 $\dot{x}\ddot{x}=0$, 得 $(y-x)\dot{x}=0$, $(y-x)\ddot{x}=1$, [illegible] 因之 [illegible]

5.參考第一章第二節題 [illegible]

7.據 ξ_1,ξ_2,ξ_3 之定義,可知 [illegible] $\pm\sqrt{\xi_3^2}=\frac{1}{\tau}$. 如是則 $\dot{\xi}_1=k\xi_2$, 欲定 $\dot{\xi}_2,\dot{\xi}_3$, 當求其沿 [illegible] 之矢量 [illegible]

$$\xi_2^2=1,\ \xi_3^2=1,\ [illegible]$$

求導,得

$$\dot{\xi}_3\xi_1=-\xi_1\dot{\xi}_3 [illegible]$$

故 $\dot{\xi}_3$ 必垂直於 ξ_1 及 ξ_3, 因之 $\dot{\xi}_3=\pm\sqrt{\dot{\xi}_3^2}$ [illegible] 今人以 $\dot{\xi}_3=-\frac{\xi_2}{\tau}$ 決定扭率 τ 之正負,如是在密吻面中之運動依 s 增加方向前進 [illegible] 螺旋,則 τ 爲正,否則爲負.欲證第二公式,但注意

$$\dot{\xi}_2\xi_1=-\xi_1\dot{\xi}_2 [illegible] \frac{1}{\tau}$$

8.參考題 6 及題 3.(a) $k\xi_2-k^2\xi_1+\frac{k}{\tau}\xi_3$, [illegible] $\frac{\xi_2}{\tau}$.

9.$\frac{1}{|\tau|}=\sqrt{\dot{\xi}_3^2}=0$, 則 ξ_3 爲一恆等矢量 [illegible] $\dot{x}\eta$ [illegible] $\xi_1\xi_3=0$,
從而知 $x\eta=$ 常數, 其中 η 爲固定,故曲線必在一 [illegible] 平面中

10.(b)若曲線之方程式爲 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, 則曲面得以輔變數方程式表之,如

$$x=f(t)+sf'(t),$$

$$y=g(t)+sg'(t),$$

$$z=h(t)+sh'(t),$$

然後將 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 由其對 t 及 s 之導數表而達之.

附錄第一節,第 513 頁.

1.(a) 因 R 有閉性,在 R 中必可求得一點 B, 其與 A 相去之距離小於 R 中任何其他之點.試以 n 表 AB 在 B 點之法線.如是則 R 必無一點 C, 與 A 同處於 n 之一邊;倘其有一如是之 C,則不但 B 及 C,即整個線段 BC 將屬於 R,在此線段之上,必有點可尋,較 B 更近於 A, 是乃不可能之事.故經過 A 作一平行於 n 之直線,可知其與 R 必無共同點.

(b) 有一點序 $P_1,P_2,\cdots\cdots$ 不在 R 之 [illegible] 試以 [illegible] $\cdots\cdots$ 表直線,分別經過

$P_1, P_2, \cdots\cdots$ 而將 [illegible] 分為兩半 [illegible]，[illegible] 線，[illegible] 有共同 [illegible]（參閱(a)）由此種直線之方向將有斂性，而其極限即為經過 [illegible] 之支持線。

(c) 倘 [illegible] 不在 [illegible] 之中，則據 [illegible] 一支持線 [illegible]，將 [illegible] 分離。

(d) 設 [illegible] 為 [illegible] 之質量中心。[illegible] 任何 [illegible] 支持線。則 [illegible] 中所有一切點之 y 坐標將同正或同負，據質量中心之定義 [illegible] 之 [illegible] 坐標應與此同正負，故 [illegible] 及 R 在任何支持線之同一面，然後應用 [illegible]。

(f) 所謂曲率，即 $\frac{d\varphi}{ds}$ 之謂，其中 [illegible] 為切線與 [illegible] 軸所成之角，s 為弧長，φ 為 [illegible] 之連續函數，故 φ 自 $\varphi(0)$ 獨升至 φ[illegible]，因此 [illegible] 在兩 [illegible] 不能有同一之值，倘曲線與一直線 $l\,(ax+by$[illegible]$)$ 交於三點 [illegible]，則

$$F(\;)=a(\;\;)\cdots(\;)$$

將有三個根，如是 $F'(\;)$ 將至少有 [illegible] 平行；其中兩條將有同向旨，即 φ 在此之值將相同，與適所述者抵觸。

2.(a) 一切凸形變域之含 S 者，其中之點均有 [illegible] 特性

(b) 若 P 在 E 之內，則不能有一直線，將 [illegible] 分離，否則可有一大平方形 Q，其一邊為 l 而又含 S；如是則 Q 將為一凸形變域，含 S 而不含 [illegible]。

若 P 不在 E 之內，則至少有一凸形變域 Q，含 S 而不含 P；於是（據題 1(a)）有一直線，將 P 由 Q 分離，因之亦將 S 由 P 分離（因 Q 含 S）。

(c) 參考題 1(d)。

附錄第二節，第 519 頁.

1.(a) 否，(b) 否，(c) 是（參閱上卷 [illegible] 2,3）

第 三 章

第一節，第 530 頁.

2. (a) $-\frac{4}{5}$; (b) $-\frac{\pi}{2}$; (c) -1; (d) -1.

3. (a) $-\frac{21}{32}$; (b) π; (c) 2; (d) $-\frac{19}{5}$.

4. 莫大值 $+6$，莫小值 -6。

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$。

第二節，第 538 頁.

1.(a) $5x+7y-21z+9=0$; (b) [illegible] $-z+\frac{\pi}{6}=0$.

2.1.

3.在原點之切線方程式為 [illegible] 及 [illegible]，其曲率為 [illegible]，

又

$$\frac{2(a^4-a^2 \ldots)}{a(a^2 \ldots)} \text{[illegible]}.$$

4.將方程式寫如 $0=F=$ [illegible]：

$$k=\frac{2r'^2-rr''+r^2}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}，\text{其中 [illegible]}\quad r''=\frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

6.$x(y+z)=ay$.

8.(a) 重點.

(b) 兩支相切.

(c) 角.

(d) 尖點.

(e) 尖點.

9.將 $F=0$ 兩重對 x 求導，並注意 $F_y=0$.

$$\varphi=\frac{\arctan 2\sqrt{F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}}}{F_{xx}+F_{yy}};$$

(a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$.

10. $a=1, b=-\frac{1}{2}$.

12.三個圓 K, K', K'' 之方程式為

$$K\equiv x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

$$K'\equiv x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0,$$

$$K''\equiv x^2+y^2+a''x+b''y+c''=0.$$

經過 A 及 B 兩點之圓必滿足 $K'+\lambda K''=0$。欲求 K 與 K' 及 K'' 垂直，其條件為

$aa'+bb'-2(c+c')=0$, $aa''+bb''-2(c+c'')=0$. 由此可推 K 垂直於 $K'+\lambda K''=0$ 之條件.

13. $\quad z_x=\frac{y^2-x^2}{2^2-\ldots}$ [illegible]

第三節，第 [illegible] 頁．

2．(c) $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}$ [illegible]

3．以 O 爲坐標原點而倒徑變換，[illegible]成之三角形[illegible]變換於一普通三角形，其角仍不變。

5．(b)將方程式之左方，用以規定 t_1 及 t_2 者，以 $F(x, y, t)$ 表之，則 t_1 = 常數，及 t_2 = 常數，兩族曲線之方程式分別爲 $F(x, y, t_1) = 1$，$F(x, y, t_2) = 1$．此兩族曲線互相垂直之條件爲

$$0 = F_x(x, y, t_1) F_x(x, y, t_2) + F_y(x, y, t_1) F_y(x, y, t_2)$$

$$= \frac{4x^2}{(a-t_1)(a-t_2)} + \frac{4y^2}{(b-t_1)(b-t_2)}.$$

考此關係，爲 $F(x, y, t_1) - F(x, y, t_2) = 0$ 之必然結果．

(c)視規定 t_1 及 t_2 之二次方程式，其係數分别爲 $t_1 t_2$ 及 $-(t_1+t_2)$，故得兩一次方程式以規定 x^2 及 y^2，因之遂有

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a-t_1)(a-t_2)}{a-b}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{(b-t_1)(b-t_2)}{b-a}}.$$

(d) $\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(x, y)} = $ [illegible] $(x^2+y^2)^2$.

(e) $\frac{f_1 \, g_1}{(a-t_1)(b-t_1)} = \frac{f_2 \, g_2}{(a-t_2)(b-t_2)}$.

6．(a)將方程式之左方，用以規定 t 者，以 $F(t)$ 表之．F 在 $-\infty<t<c$ 變程中爲一連續函數，復有 $F(-\infty)=0$，$F(c-0)=+\infty$，因之在該變程中必至少有一點，使 $F=1$．在其他變程中，亦可依此推論．

(b)參考題 5(b)．

(c)參考題 5(c)：$x = \pm\sqrt{\frac{(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3)}{(a-b)(a-c)}}$，

y 及 z 與此相似．

7．令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$．於是直線 θ = 常數，將轉換於 $t_1 = \frac{1}{2} - \cos^2\theta$，而 r = 常數，轉於 $t_2 = -\frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$．

9． $\frac{\partial(u, x^2+y^2)}{\partial(x, y)} = 2\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ x & y \end{vmatrix} = 0$.

第四節，第 565 頁．

1．(b)球面上之圓爲 x, y, z 間之一線性方程式．

(c) uv 平面中之[illegible].

(d) $ds^2 = $ [illegible]

2. (a) $ds^2 = $ [illegible]

(b) $ds^2 = $ [illegible]

(c) $ds^2 = (1 + $ [illegible]

(d) $ds^2 = $ [illegible] dt_2^2.

3. $EG - F^2 = $ [illegible] 之轉換式.

4. 轉換坐標軸，使 P 為原點，P 點上之切平面為 [illegible] 平面，[illegible] 軸. 如是則 S 之方程式將為 $z = f(x, y)$。其中 $f($[illegible]$)$ [illegible] 之平面 Σ 將有如下方程式 $z = ay$。然後用 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 z 作為 [illegible]，則 [illegible] 相交於

$$\frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} \quad [illegible]$$

此相交線在 $x = 0,\ r = 0$ 之曲率為

$$k = f_{xx} \frac{[illegible]}{a}$$

其曲率中心之坐標為

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{k\sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{f_{xx}(1+a^2)}, \quad z = \frac{a}{k\sqrt{1+a^2}} = \frac{a^2}{f_{xx}(1+a^2)},$$

故在一圓之上　　　$f_{xx}(y^2 + z^2) - z = 0$.

5. 取 P 點上之切面為 xy 平面，S 之方程式為 $z = f(x, y)$，其法面為 $x = ay$。以 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 z 作平面中之坐標，則相交線為

$$z = f\left(\frac{ar}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{r}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

其在 $r = 0$ 之曲率為

$$k = f_{xx}(0,0)\frac{a^2}{1+a^2} + 2f_{xy}(0,0)\frac{a}{1+a^2} + f_{yy}(0,0)\frac{1}{1+a^2}.$$

於是矢量之方向為 l，長為 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 者，其終點之坐標為

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad z = 0;$$

故滿足　　　$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 1$.

6.(a)將兩方程式對 t 求導,得

$$xx' + yy' + [illegible]$$

由是可得 $x':y':z'$,即切線之方向.若以 (ξ, η, ζ) 爲流動坐標,則切線之方程式爲

$$(\xi - x):(\eta - y):(\zeta - [illegible]) = [illegible]$$

(b)將方程式再求導,並注意[illegible],所得結果爲

$$xx'' + yy'' + zz'' = -(x'^2 + y'^2 + [illegible]) = \lambda\left[[illegible] + \frac{(a-c)^2}{[illegible]^2} + \frac{(b-a)^2}{[illegible]^2}\right]$$

及

$$axx'' + byy'' + c[illegible] = \lambda\left[[illegible] + [illegible] + \frac{(c-[illegible])^2}{z^2}\right],$$

其中 λ 爲一比例常數.將 λ 消去,得

$$(xx'' + yy'' + zz'')\left[\frac{a(c-[illegible])^2}{x^2} + [illegible] + \frac{[illegible](b-a)^2}{[illegible]^2}\right]$$

$$= (axx'' + byy'' + [illegible])\left[[illegible] + [illegible] + \frac{[illegible](b-a)^2}{[illegible]^2}\right].$$

此 x'', y'', z'' 間之一種線性關係,若將[illegible]代之,依然成立.因此,若將 x'', y'', z'' 分別以 $\lambda x' + \mu x''$, $\lambda y' + \mu y''$, $\lambda z' + \mu z''$ 替代之,其關係仍如故.若 (ξ, η, ζ) 如在密吻面之中,$\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ 即有如是形式(參考第[illegible]章第[illegible]節題 6).密吻面之方程式爲

$$\frac{ax^3}{c-b}(\xi - x) + \frac{b[illegible]^3}{a-c}(\eta - [illegible]) + \frac{cz^3}{b-a}(\zeta - z) = 0.$$

第五節,第 577 頁.

1.設 P 爲曲面 Σ 上之一點,S 爲球面族中之一球,與 Σ 有一共同點 P 者.如是則 S 及 Σ 在 P 點上有同一切面,意即 x, y, z, z_x, z_y 之值在此點上彼此相等.因此,但證此關係對於任何單位球之中心在 xy 平面者已足,即 $u(x, [illegible]) = \sqrt{1 - (x-a)^2 + (y-b)^2}$.

2.(a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$;　(b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$.

4.可用 t 作參變數,使曲線之方程式爲 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,其切線在 t 點必滿足

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad [illegible]x' + e[illegible]' + f[illegible]' = 0;$$

將直線方程式對 t 求導,則

$$a'x + b'y + c'z = 0, \quad [illegible]'x + e'y + f'z = 0,$$

復因

$$ax + by + [illegible] = [illegible] + [illegible] + fz,$$

還有三個齊次線性方程式以定 x,y,z，故其行列式必等於零.

5.包線之方程式為

[illegible]

[illegible]

此兩方程式代表一族直線，其中 t 為參數 [illegible] 其切線者，則必滿足由此再求導數後所得之關係.

(a) [illegible]

(b) 曲線為 $z=0$ [illegible]

7.用倒徑攝影.因 S_1, S_2, S_3 經過原點，故轉換[illegible]平面[illegible]球面之與三平面相切者，求其包面即可，是為一圓錐體，再度倒徑攝影，得

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)+ [illegible] -2xz-2yz)=0.$$

8.(b) $\xi^2(1-a^2)+\eta^2(1-b^2)-2ab\xi\eta+2a\xi+2b\eta=1;$

(c) $a^2\xi^2+b^2\eta^2=1.$

第六節，第 593 頁.

1. $\frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，$\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

2. $\frac{a}{20}$，$\frac{a}{10}$，$\frac{a}{10}$.

3.在 $x=0$，$y=\pm1$ 有莫大值，在 $x=y=0$ 有莫小值.

4.莫大值與 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在 $ex^2+2fxy+gy^2=1$ 條件下之莫大值相同.

5.參考題 4.(a) $\frac{14}{3}+\frac{2\sqrt{67}}{3}$；(b) 當 $\frac{y}{x}=0.64$ 時有一[illegible]莫小值$=1.95$.

6.駐值而非莫大莫小：$y=0$，$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{7\pi}{3}$，$\frac{13\pi}{3}$，……

莫小值：$y=0$，$x=\frac{5\pi}{3}$，$\frac{11\pi}{3}$，$\frac{17\pi}{3}$，……

7.此橢圓須與圓相切，換言之，此兩方程式必有一重根，故接觸之條件為

$$a^2(b^2-1)=b^4;\ a=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad b=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

8.以 a,b 間及 c,d 間之角作變數.

9. $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

10. 確有一莫小在 [illegible] 先證 [illegible] 必為 [illegible] 之交點. 復注意四單位矢量之和為零者，其終點必成一長方形. 然後將其對角線之交點與四點之總和為莫小.

11. $A=\frac{a^2}{x}$, $B=\frac{b^2}{y}$, $C=\frac{c^2}{z}$, 又條件

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(a) $x=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}}$, [illegible] $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a+b+c}$, ...

12. 頂點為 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}$

13. 頂點為 $x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

14. $x=1, y=1$.

15. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 之莫大值為最長軸，惟附有一條件，即 x,y,z 在橢圓體之上. 因此有三方程式如

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{l}=\lambda(ax+hy+gz), \cdots\cdots$$

試分別以 x,y,z 乘之，然後相加，則 $\lambda=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=l$. 惟就他方面觀之，此方程式可視為對 x,y,z 之聯立線性齊次方程式，其行列式因之為零.

附錄第一節，第 599 頁.

1. $f(x)+f(y)+f(z)=3f(a)$

$$+[(x-a)+(y-a)+(z-a)]f'(a)+\frac{1}{2}\rho^2\ [f''(a)+\epsilon],$$

其中 $\rho^2=(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2$. 惟據所附條件，

$$(x-a)+(y-a)+(z-a)=\rho^2\left(-\frac{\phi''(a)}{2\phi'(a)}+\epsilon\right)$$

$$-\frac{\phi'(a)}{\phi'(a)}[(x-a)(y-a)+(x-a)(z-a)+(y-a)(z-a)]$$

$$=\left[-\frac{\phi''(a)}{2\phi'(a)}+\frac{\phi'(a)}{2\phi(a)}+\epsilon\right]\rho^2,$$

其中 $\lim\limits_{x,y,z\to a}\epsilon=0$.

第 四 章

第一節,第 610 頁.

1. $y>0$ 時, $I=0$.

2. 用如下關係

$$\frac{1}{r}(f_x\cos\phi+f_y\sin\phi)=f_{xx}\sin^2\phi-2f_{xy}\sin\phi\cos\phi+f_{yy}\cos^2\phi$$

$$+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\ldots\sin\phi-\ldots\cos\phi).$$

3. 就 u_{xx} 部分積分兩次(特別注意 $t<\frac{1}{2}$ 時情況).

4. 就 $\int_0^1$ 用部分積分法.

第三節,第 631 頁.

1. $\frac{\pi}{24}$. 2. 0. 3. 0.

4. 若積分域區限於 $z>0$, 則 $\frac{\pi}{3}$ 否則為 0.

5. $\frac{1}{50400}$. 6. $\pi(2-\frac{3}{2}\log 3)$.

7. 用極坐標, 先對 ϕ 及 θ 求積分: $\pi(2+\frac{3}{9}\log 3)$.

8. $4\log(1+\sqrt{2})$.

9. 將積分變程分為 $-1\leqq x\leqq-\sqrt[3]{h}$, $-\sqrt[3]{h}\leqq x\leqq\sqrt[3]{h}$, $\sqrt[3]{h}\leqq x\leqq 1$ 諸段, 求每段之上下界.

第四節,第 638 頁.

1. 以下法轉換 $x+y=\xi$, $x-y=\eta$. $\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

2. 改用極坐標: (a) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

3. 以下法轉換, $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$: $\frac{1}{6}a^2b^2c^2$.

7. 用新直角坐標 (ξ',η',ζ') 如 $\xi'=\frac{a\xi+b\eta+c\zeta}{r}$ 如是則 $d\xi\,d\eta\,d\zeta=d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'$,

$$I=\iiint\cos(r\xi')\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'.$$

其變區為 $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\leqq 1$ 故對 η' 及 ζ' 求積分 [illegible]

$$I=\pi\int_{-1}^{+1}[illegible]$$

答案: $\frac{4\pi}{r^2}\left(\frac{\sin r}{r}-\cos r\right)$, $r^2=x^2+[illegible]$

8. 以下法轉換 $\xi'=\frac{a\xi+b\eta}{r}$, $\eta'=[illegible]$, 先對 η' 求積分。

第六節，第 655 頁

1. 應用 Guldin 公式，注意橢圓之中心距為其質量中心，$2\pi^2 [illegible]$.

2. $\frac{\pi abh^2}{2}$.

3. 如下轉換 $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=[illegible]$

$$\frac{1}{3}\pi abc\left(1-\frac{[illegible]}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}\right)^2\left([illegible]\right)$$

4. (a) 比較對應之面素.

(b) $a^2\int_0^{2\pi}[1-\cos f(\phi)]d\phi$,　(c) $2\pi(1-\frac{1}{2}[illegible])a^2$

5. $2\pi a^2\left\{1+(1-\varepsilon^2)\frac{[illegible]}{\varepsilon}\right\}$, 其中 $2a$ 為正軸.

6. 體積 $=\frac{1}{3}\pi cp^2$, 曲面面積 $=\pi(a+b)p$, 其中 a, b, c 為三角形之邊，而 p 則為自 C 至 AB 之垂直線.

7. 由管面 $u=u(x,y)$ 之微分方程式（第三章第五節題 1），得

$$A=2\iint\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy=2\iint\frac{dx\,dy}{u}.$$

若以 L 之弧長 s 及沿法線之距離 t 作輔變數（參考上卷第 213 頁題 22）則據本卷第三章第五節題 3,

$$A=2\int_L ds\int_{-1}^{+1}\frac{1+kt}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\pi\int_L ds,$$

其中 k 為 L 之曲率.

8. 先對 x 及 y 求積分：(a) $\frac{16r^3}{9}$; (b) $8r^2$.

9. $\frac{\pi}{2}\left\{R\sqrt{R^2+h^2}-r\sqrt{r^2+h^2}+h^2\log\frac{R+\sqrt{R^2+h^2}}{r+\sqrt{r^2+h^2}}\right\}$.

10. 改用極坐標：$\frac{\pi^2}{2}$

第七節，第 664 頁.

1. 在錐體之軸上，由頂點至底之 [illegible] 處 [illegible]

2. $x=\frac{2x_0}{3}, y=z=0$

3. 參考本章第六節題 7 及第三章第五節 [illegible]

4. (a) $\pi h(R^4-R'^4)$ [illegible]

5. 例如 $A+B-C=2\iiint \mu z^2\,dx\,dy\,dz$，其値爲正.

6. 以 $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$ 轉換，並應用本章之轉動慣量及橢圓體之對稱性：

(a) $\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)$； (b) $\frac{4}{15}\pi abc\left\{(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right\}$.

7. (x,y,z) 與 $lx+my+nz=1$ 相距之距離爲

$$\frac{lx+my+nz-1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

橢圓體對此平面之轉動慣量因之爲

$$\frac{Al^2+Bm^2+Cn^2+V}{l^2+m^2+n^2},$$

其中 A,B,C 爲對坐標面之轉動慣量，而 V 則爲橢圓體之體積，故

$A=\frac{4a^3bc}{15}$, $B=\frac{4ab^3c}{15}$, $C=\frac{4abc^3}{15}$, $V=\frac{4abc}{3}$. 然後就一切平面之使上式等於 h 者，求其包面；包面之方程式爲

$$(A-h)l=\lambda x,\quad (B-h)m=\lambda y,\quad (C-h)n=\lambda z,$$

其中 λ 可證其爲 V（由上列轉動慣量公式及平面方程式證之）將此三方程式平方，即得包面方程式

$$\frac{x^2}{h-A}+\frac{y^2}{h-B}+\frac{z^2}{h-C}=\frac{1}{V}.$$

9. $a^2(x-\xi)^2+b^2(y-\eta)^2+c^2(z-\zeta)^2$

$$=[a^2+b^2+c^2+5(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)][(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2].$$

10. $\left(\frac{1}{3},0,0\right)$.

11. $x=\frac{5a}{16}\cdot\frac{2a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

13. $\frac{2\pi a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$.

14. 先對 x 及 y 求積分:

$$2\pi\int_a^b \sqrt{\cdots}\;(\cdots)^2\,dz \quad \cdots \quad \cdots|,$$

其中 $|b^2 \mp a^2|$ 當原點在體內時,負號有效,在體外時為正.

附錄第二節,第678頁.

1. 用如下替代 $x_1 = a_1\xi_1, \cdots\cdots, x_n = a_n\xi_n$:

$$\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

2. 據本節所述,以 $n-1$ 維單位球作範圍,則有

$$I = \int\cdots\cdots\int \frac{f(x_1)+f(-x_1)}{\sqrt{1-x_2^2-\cdots-x_n^2}}\,dx_2\cdots dx_n.$$

改用極坐標,得

$$I = \int_0^1 dr \int_{S(r)} \frac{f(\sqrt{1-r^2})+f(-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}\,d\sigma;$$

其中 $S(r)$ 表一球面,以原點為中心,以 r 為半徑者.因其中函數僅隨 r 而變,故

$$I = \omega_{n-1}\int_0^1 \frac{f(\sqrt{1-r^2})+f(-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}\,r^{n-2}\,dr;$$

令 $y = \sqrt{1-r^2}$,即有

$$I = \omega_{n-1}\int_{-1}^{+1} f(y)(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy.$$

附錄第三節,第687頁.

1. 令 $I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx$,則 $I_n(a) = -I'_{n-2}(a)$,然後用部分積分法;當 n 為奇數時得 $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ 為偶數時得 $\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(n-1)}{2^{\frac{n+2}{2}}}$.

2. 以如下替代

$$\xi = \alpha x + \beta y,$$

$$\eta = \gamma x + \delta y,$$

並選擇其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,使 $\xi^2+\eta^2 = ax^2+2bxy+cy^2$;於是 $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 = ac-b^2$,而此積分即轉換於

$$\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\,d\xi\,d\eta. \quad (ac-b^2=\pi^2, a>0).$$

3.應用題 2 中替代，求轉換後之積分，(a)應用[illegible]結果，(b)[illegible]改用極坐標。

$$(a)\ \frac{\pi(aC+cA-2bB)}{(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad (b)\ [illegible]$$

4.(a)先求 $K'(a)$（對 a 求導），再次用部分積分法（用 [illegible] 作一因子），得

$K'(a)=-\frac{K(a)}{2a}+\frac{K(a)}{4a^2}$，即

$$K(a)=Ca^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4a}},$$

其中 C 為 $C=\lim_{a\to\infty}\sqrt{a}\,K(a)=\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\frac{t}{\sqrt{a}}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$，$K(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{1}{4a}}$.

(b) 將 $\frac{t}{1+t^2}=\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx$ 對 t 求積分，自 t 至 s，

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+s^2}{1+t^2}.$$

* (c)就 $I'(a)$ 中以 $x=\frac{1}{t}$ 替代，證 $I'=-2I$，即 $I=Ce^{-2a}$，

其中 $C=\lim_{a\to 0}I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$；$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2a}$.

(d)以 J_0 之積分代入，將積分次序互易，並用如下關係

$$2\sin ax\cos bxt=\sin(a+bt)x+\sin(a-bt)x,$$

又注意 $\int_0^\infty\frac{\sin xy}{y}dy$，各種性質如本節所述者，結果為

當 $a>b$ 時得 $\frac{\pi}{2}$，$a<b$ 時得 $\arcsin\frac{a}{b}$.

6.必有一 $\epsilon>0$，使 A 之小於 A' 者，$A'>A$，對於相當 x 者是致

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)\,dy\right|\geq\epsilon.$$

附錄第五節，第 705 頁.

1.用 $x^m=a^m\xi$，$y^m=b^m\eta$.

3.先對 y 及 z 求積分：

$$v=\frac{3}{4}a\,\frac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)}.$$

4. $2R^4B\left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right)=\frac{21\pi}{2^9}R^4$.

5.先證 $\Gamma_{2n}(2x)=\frac{1}{2}2^{2n}$ [illegible] $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ [illegible]

然後令 $n\to\infty$ 並應用 Wallis 公式(上卷 4.3.4).

第五章

第一節,第 723 頁.

1. $e^{\xi}\sin\eta$.

2. 令
$$u=\frac{e^{x}}{x^2+y^2}(x\cos y+y\sin y),$$
$$v=\frac{e^{x}}{x^2+y^2}(-x\sin y+y\cos y),$$

復以如下方程式引用 u_1 及 v_1:
$$u=\frac{x}{x^2+y^2}+u_1,\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}+v_1.$$

如是 u_1 及 v_1 爲兩重連續可導(在原點亦如之),又 $(u_1)_y=(v_1)_x$,因之 $\int_C u_1dx+v_1dy=0$,

故
$$\int_C u\,dy-v\,dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx=2\pi.$$

第五節,第 749 頁.

1. (a) 參考第一章第四節題 3.

(c) 設 R 爲任何變區,v 爲一函數,在 R 之邊界上等於零者,則應用 Green 第一公式:
$$\iiint_R[u_{x_1}v_{x_1}+u_{x_2}v_{x_2}+u_{x_3}v_{x_3}]dx_1dx_2dx_3=-\iiint_R v\Delta u\,dx_1dx_2dx_3$$
$$=-\iiint_R v\Delta u\sqrt{e_1e_2e_3}\,dp_1dp_2dp_3.$$

但若
$$u_{x_i}=u_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i}+u_{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i}+u_{p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_i}$$
$$=u_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1}+u_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2}+u_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3}$$

及
$$v_{x_i}=v_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1}+v_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2}+v_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3};$$

因之 $\iiint_R[u_{x_1}v_{x_1}+u_{x_2}v_{x_2}+u_{x_3}v_{x_3}]dx_1dx_2dx_3$
$$=\iiint\left[\frac{1}{e_1}u_{p_1}v_{p_1}+\frac{1}{e_2}u_{p_2}v_{p_2}+\frac{1}{e_3}u_{p_3}v_{p_3}\right]dx_1dx_2dx_3$$

$$=\iiint\left[\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}u_{p_1}v_{p_1}+\sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}u_{p_2}v_{p_2}+\sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}u_{p_3}v_{p_3}\right]dp_1dp_2dp_3$$

$$=\iiint\left(U_1v_{p_1}+U_2v_{p_2}+U_3v_{p_3}\right)dp_1dp_2dp_3.$$

其中 $U_i=\frac{\sqrt{e_1e_2e_3}}{e_i}u_{p_i}$，復用 Gauss 定理於矢量$(U_1,U_2,U_3)$，

則有 $$-\iiint\left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1}+\frac{\partial U_2}{\partial p_2}+\frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right)v\,dp_1dp_2dp_3,$$

故對於任何 v 在 R 之邊界爲零者必有

$$\iiint v\Delta u\sqrt{e_1e_2e_3}\,dp_1dp_2dp_3=\iiint v\left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1}+\frac{\partial U_2}{\partial p_2}+\frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right)dp_1dp_2dp_3.$$

故 $$\Delta u=\left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1}+\frac{\partial U_2}{\partial p_2}+\frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right)\Big/\sqrt{e_1e_2e_3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e_1e_2e_3}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}\frac{\partial u}{\partial p_1}+\frac{\partial}{\partial p_2}\sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}\frac{\partial u}{\partial p_2}+\frac{\partial}{\partial p_3}\sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}\frac{\partial u}{\partial p_3}\right].$$

(d)用第三章第三節題 5(c) 結果

$$\frac{1}{4}(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\Delta u=(t_3-t_2)\sqrt{\phi(t_1)}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sqrt{\phi(t_1)}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)$$

$$+(t_3-t_1)\sqrt{-\phi(t_2)}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\sqrt{-\phi(t_2)}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)+(t_2-t_1)\sqrt{\phi(t_3)}\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\sqrt{\phi(t_3)}\frac{\partial u}{\partial t_3}\right),$$

其中 $\phi(x)=(a-x)(b-x)(c-x)$.

第七節，第 757 頁.

1. $$\iint\frac{z}{p}dS=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\iiint z\,dx\,dy\,dz,$$

其右方之體積分施展於橢圓體之上半(此半橢圓體之底對面積分之值不能有所增益)：

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)abc^2.$$

2. 因 H 既爲一四次之齊性函數，

$$4\iint HdS=\iint(xH_x+yH_y+zH_z)dS$$

$$=\iint\frac{\partial H}{\partial n}dS=\iiint\Delta H\,dx\,dy\,dz$$

$$=6\iiint[x^2(2a_1+a_4+a_6)+y^2(2a_2+a_4+a_5)+z^2(2a_3+a_5+a_6)]dx\,dy\,dz$$

$$\frac{4\pi}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$$

附錄第二節,第 762 頁

1. $u=f_x$, $v=f_y$ 兩方程式因 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 可對 x 及 y 解開.設其解爲 $x=\sigma(u,v)$, $y=\tau(u,v)$, 因 $u_y=v_x$, 故 $x_v=y_u$, 故必有一函數 g, 滿足 $x=g_u(u,v)$, $y=g_v(u,v)$.

2.
$$u=\frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$v=\frac{-xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$w=0.$$

第　六　章

第一節,第 775 頁.

1. 應用能量不滅原則,證 $t\to\infty$ 時, $\epsilon\to\infty$.

2. $\xi=a\cos\omega-x+\epsilon a$,

$\eta=b\sin\omega=y$

爲橢圓方程式.據 Kepler 面積定理,

$$h(t-t_0)=\int_0^\omega\left(x\frac{\partial y}{\partial\omega}-y\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)d\omega=ab\int_0^\omega(1-\epsilon\cos\omega)d\omega.$$

3,4. 應用能量不滅原則,及 Kepler 面積定理.

第二節,第 778 頁.

1.(a) $y=\frac{\tan\log c}{\sqrt{1+x^2}}$.　　(b) $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$.

2.(a) $y=ce^{\frac{y}{x}}$,

(b) $y^2(2x^2+y^2)=c^2$.

(c) $x^2-2cx+y^2=0$(爲一族圓).

(d) $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c=\log\sqrt{x^2+y^2}$,或用極坐標 $r=e^{\phi+c}$(爲一族極螺旋).

(e) $c+\log|x|=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}$.

3. 若 $ab_1-a_1b\neq0$, 則

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}=\frac{a+b\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a_1+b_1\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}$$

若 $ab_1-a_1b=0$ 或 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, 則

$$\frac{d\eta}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}=a+bf\left(\frac{\eta+c}{\lambda\eta+c_1}\right)$$

4. (a) $4x+8y+5=ce^{4x-8y}$.

(b) $x=c-\frac{1}{4}(3y-7x)-\frac{3}{4}\log(3y-7x)$.

5. (a) $y=ce^{-\sin x}+\sin x-1$.

(b) $y=(x+1)^n(e^x+c)$.

(c) $y=cx(x-1)+x$.

(d) $y=\frac{1}{3}x^5+cx^2$.

(e) $y=\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})}$

6. 以$\frac{1}{y}$作特定函數:

$$\frac{1}{x}+\frac{1-cx^{\sqrt{5}}}{cx^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

第三節, 第 787 頁.

1. 用數學歸納法. 設有一線性關係如 $c_1e^{\alpha_1x}+\cdots+c_ke^{\alpha_kx}=0$ 以 e^{α_kx} 除之, 又如 $P_k(x)$ 爲(ρ_k)次多項式, 求其(ρ_k+1)重導數. 就其他 e^{α_ix} 之係數論, 其次數仍不變, 故不等於零.

2. 方程式之兩邊均以$(1-n)y^{-n}$乘之:

(a) $y^{-1}=cx+\log x+1$;

(b) $y^3=cx^{-3}+\frac{3a^2}{2x}$;

(c) $(y^{-1}+a)^2=c(x^2-1)$.

3. 令 $y=y_1+u^{-1}$, 方程式將歸於線性 $u'+(2Py_1+Q)u+P=0$

$$y = \frac{e^{\frac{1}{2}x^{2}}}{c+\int_{0} x^{2} e^{\frac{x^{2}}{2}} \, [illegible]}$$

4. 令(a)及(b)之右邊相等，得其共同解 $y=x^2$.

5. $$y = x^{2} - \frac{e^{\frac{2}{3}x^{3}}}{c+\int_{x}^{\infty} e^{\frac{2}{3}x^{3}}\, dx} = f(x, c)$$

欲繪其草圖，先標繪下列曲線之兩支：

$$[illegible] \quad (y = \pm\sqrt{(x^{2} - 2)x});$$

此將平面劃分為兩區，$y'<0$ 時為一區，$y'>0$ 時又為一區．其兩支伸展至無窮遠時，漸近於兩抛物線 $y=\pm x^2$．試證下列兩關係：

$$f(x,c) = -x^{2} + o(1), \quad 當 \quad x \to +\infty \quad (-\infty < c < \infty),$$

及 $$f(x,c) = x^{2} + o(1), \quad 當 \quad x \to -\infty \quad (c \neq 0).$$

以見所有積分族中曲線皆漸近於此兩抛物線．$o(1)$為趨向零之函數．

6. 令 $y_1-y_3=a$, $y_1-y_4=b$, $y_2-y_3=c$, $y_2-y_4=d$;

於是 $$a' + Pa(y_1+y_3) + Qa = 0,$$

$$P(y_1+y_3) = -Q - \frac{a'}{a},$$

$$P(y_1-y_3) = aP,$$

或 $$2Py_1 = aP - Q - \frac{a'}{a}.$$

據同理 $$2Py_1 = bP - Q - \frac{b'}{b}.$$

因之 $$\frac{d\left(\log\frac{a}{b}\right)}{dx} = P(a-b) = -P(y_3-y_4),$$

$$\frac{d\left(\log\frac{c}{d}\right)}{dx} = -P(y_3-y_4);$$

兩式相減，得 $$\log\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) = 常數.$$

7. 參考題6中 $$\frac{d\log\left(\frac{a}{b}\right)}{dx} = [illegible](y_1 - y_3).$$

特解爲　　$y_1=\frac{1}{\cos x}$, [illegible]

8. 由(a)及(b)消去 y''，得其共軛微分爲：

(a) $c_1e^{x}+c_2x$；

(b) $c_1e^{x}+c_2\sqrt{x}$.

第三節，第 791 頁.

1. 據代數學中基本定理，$f(z)$可化成如下形式：

$$f(z)=(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\cdots(z-a_k)^{\mu_k}$$

其中 μ_k 均爲正整數，其和又爲 n 者；於是對於 $\nu=1,2,\cdots,k$ 有

$$f(a_\nu)=f'(a_\nu)=\cdots=f^{(\mu_\nu-1)}(a_\nu)=0.$$

復因　　$L(e^{\lambda x})=f(\lambda)e^{\lambda x}$,

將此$(\mu_\nu-1)$重求導，所得結果中令 $\lambda=a_\nu$，則有

$$L(e^{a_\nu x})=f(a_\nu)e^{a_\nu x}=0,$$

$$L(xe^{a_\nu x})=[f'(a_\nu)+xf(a_\nu)]e^{a_\nu x}=0,$$

$$L(x^2e^{a_\nu x})=[f''(a_\nu)+2xf'(a_\nu)+x^2f(a_\nu)]e^{a_\nu x}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L(x^{\mu_\nu-1}e^{a_\nu x})=\Big[\binom{\mu_\nu-1}{0}f^{(\mu_\nu-1)}(a_\nu)+\binom{\mu_\nu-1}{1}f^{(\mu_\nu-2)}(a_\nu)x$$

$$+\cdots\cdots+\binom{\mu_\nu-1}{\mu_\nu-1}f(a_\nu)x^{\mu_\nu-1}\Big]e^{a_\nu x}=0.$$

因此遂有 n 個線性獨立之特解如：

$$e^{a_1x},\ xe^{a_1x},\cdots\cdots,x^{\mu_1-1}e^{a_1x},$$

$$e^{a_2x},\ xe^{a_2x},\cdots\cdots,x^{\mu_2-1}e^{a_2x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{a_kx},\ xe^{a_kx},\cdots\cdots,x^{\mu_k-1}e^{a_kx}.$$

2. (a) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$

(b) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{-x}$

(c) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$.

(d) $y=c_1e^x+c_2e^{[illegible]}+c_3e^{[illegible]}$ [illegible]

(e) 先以 $x=e^t$ 轉換;

$$y=c_1 [illegible]$$

3. 代入微分方程式,得

$$(a_0b_0-1)P(x)+(a_0b_1+a_1b_0)P'(x)+(\cdots+a_2b_0)P''(x)+\cdots=0,$$

觀此,若 $a_0b_0=1$, $a_0a_1+a_1b_0=0$ [illegible],則為一恆等式.若以 y' 代之,則第二種情形即歸於第一種.

4. (a) $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots$, 而 [illegible] $5x-6$,

(b) $\frac{1}{t+t^2}=\frac{1}{t}-1+t-t^2+\cdots$, 故

$$y=\int P(x)dx-P(x)+P'(x)-P''(x)+\cdots [illegible] x^3.$$

5. (a) $y=\frac{3}{8}e^x$; (b) $y=\frac{1}{6}x^{[illegible]}$.

6. $y=e^x\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right)+c_1e^{[illegible]}+c_2e^{[illegible]}$

第四節,第 804 頁.

1. (a) 應用下列線積分

$$\int(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy$$

與途徑無關之事實.由 $(0,0)$ 至 (x,y) 沿一折線 $(0,0)$——$(x,0)$——(x,y) 求積分,得

$$\int_{0,0}^{x,y}(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=x^3+3x^2y^2+y^4=c.$$

(b) $\sqrt{1+x^2+y^2}-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=c$. 可由事實觀察而知之.

2. $\frac{dy}{dx}$ 在此僅隨 $\frac{y}{x}$ 而變.

3. $x^2y-2xy^2-2cy-2=0$ (求全因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$).

4. 方程式對 x 有線性,其通解為 $(xy^2+1)^2=cy$.但由下列恆等式

$$d\frac{(xy^2+1)^2}{y}=\frac{xy^2+1}{y^2}[2y^3dx+(3xy^2-1)dy]$$

可見一求全因子.

5.(a) x^2+y^2+ [illegible]

(b) x^2+ [illegible] r^2.

(c) 此族 [illegible]

[illegible]

試將其中 y' 易 [illegible] 於雙曲線族

[illegible]

(d) $y=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ [illegible]

(e) $x=c\pm$ [illegible]

及由是以 x 軸爲反射軸而反射之曲線

6.(a)拋物線族 $y=cx^2$

(b)雙曲線族 $xy=c$.

7.(a) $y=x^2$, (b) y [illegible]

8. $y=xp+a\sqrt{1+p^2}$ [illegible] p

9. $x=be^{-\frac{p}{a}}$ [illegible]

$y=c(p+a)e^{-\frac{p}{a}}+\frac{1}{2}$ [illegible]

注意 $c=0$ 時,此爲一拋物線 $y=x^2-\frac{x^2}{2}$ [illegible]

10.(a) $y=\sin(x+c)$,奇解 $y=\pm1$

(b) $x=\pm\frac{1}{2}(\arcsin y+y\sqrt{1-y^2})+c$

(c) $x=+\mp\left(\sqrt{(2a-y)y}-\right.$ [illegible] $\left.\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\right)+c$,

是爲一族圓滾線,可由 $x=c+a(\phi-\sin\phi)$

$y=a(1-\cos\phi)$

表達之.奇解 $y=0$

(d) $x=\pm\int_0^y\sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}dy+c$ [illegible]

試並其決非 sine 曲線

11. $MN = y\sqrt{1+y'^2}$，$M($ [illegible] $)^{\frac{3}{2}}$ [illegible] 微分方程式為

$$([illegible] + y'^2)^2 [illegible] k [illegible]$$

用所述方法，此可歸於

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [illegible] \quad ([illegible] 任意常數)$$

各種不同情形，在微分幾何學中頗見重要[illegible]，約有如下各種。

(1) $k=\rho^2(>0)$，$c=$ [illegible] $\gamma^2(<0$ [illegible] ρ^2 [illegible] 此曲線處處光滑，作波動狀，與直線 $y=\pm\sqrt{\rho^2-\gamma^2}$ 上下相切，頗似 [illegible] 曲線，其[illegible] [illegible] 曲線。

(2) $k=\rho^2, c=0$，為一圓，以 ρ 為半徑，其中心在 [illegible] 之上。

(3) $k=\rho^2, c=\gamma^2(>0)$ 為相同線弧[illegible] [illegible] 尖點[illegible]所成，又為 $y=\sqrt{\rho^2+\gamma^2}$ 所切，頗似圓滾線。

(4) $k=-\rho^2(<0)$，$c=\gamma^2>\rho^2$，亦為相同線弧所合成，其尖點在 $y=\gamma$ 之上，又為 $y=\sqrt{\gamma^2-\rho^2}$ 所切。

(5) $k=-\rho^2, c=\gamma^2=\rho^2$。

(6) $k=-\rho^2, c=\gamma^2<\rho^2$。有尖點無限多，與 [illegible] 及 [illegible] γ 交相垂直。

12. 將圓之方程式求[illegible]，並消去 b，$(1+y'^2)$ [illegible] $3y'$ [illegible] 0。

13. $y=x\sin ax$；奇解 $y=x$ 及 $y=-x$。

14. 若 $y(x)=\Sigma c_\nu x^\nu$，則

$$c_{\nu+2} = -\frac{c_\nu}{(\nu+2)^2}, \quad c_0=1, c_1=0;$$

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}(\nu!)^2} x^{2\nu}$$

試將 $\cos xt$ 之冪級數代入於 $J_0(x)$（第四章第一節題5），復互易積分與疊加之先後（例以許可），則

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}(-1)^\nu\int_{-1}^{+1}\frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}dt;$$

復因

$$\int_{-1}^{+1}\frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{(2\nu)!\,\pi}{(\nu!)^2 2^{2\nu}},$$

但令 $t=\sin\tau$ 並參考上卷第 154 頁可以知之。由是即知 $y(x)$ 及 $J_0(x)$ 之冪級數實相同。

第五節，第 817 頁。

1.據 Poisson 公式,可得一個單位圓內之勢函數 $u(r,\theta)$ 在圓周上有指定邊值 $f(\theta)$ 者.惟吾人不難證明 $u\left(\frac{1}{r},\theta\right)$ 亦為一勢函數, [illegible] 此函數在單位圓之外必為有涯,因之欲求之解答為

$$\frac{r^2-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\ [illegible]$$

2.勢函數為

$$[illegible]$$

惟在橢圓體上 $x=la\cos\varphi$, $\sqrt{y^2+z^2}=$ [illegible],則勢函數為

$$[illegible]\log\frac{a+1}{a-1}$$

故同焦點之橢圓體

$$\frac{x^2}{l^2a^2}+\frac{y^2+z^2}{l^2(a^2-1)}=1\quad(1\leqq a\leqq\infty)$$

即為等勢曲面,其垂直交軌即為力線.故為同焦點雙曲線(參看第四節 5c),$0\leqq a\leqq 1$,而 x 對 y 之比例為常數.

3.設 Σ 為一球體,半徑為 ρ,中心為 (x,y,z) 在 S 之內.在一變域之被 Σ 及 S 所圍者,旣有 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$ 及 $\Delta u=0$,應用 Green 公式,得

$$0=\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma-\iint_\Sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma,$$

前一積分中之 n 為 S 之向外法線,而後一積分中之 n 則為 Σ 之向外法線.惟在球面上

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{\rho^2},\quad r=\rho,$$

故
$$\iint_\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{\rho}\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0,$$

復因
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_\Sigma u\,d\sigma,$$

令其中 $\rho\to0$, 此即趨於 $u(x,y,z)$, 即為欲證之式.

第六節,第 823 頁.

1.(a) $u=f(x)+g(y)$ （f 及 g 爲任意函數）

(b) $u=f(x,y)+g(x,z)+$ [illegible] （f, [illegible] 爲任意函數）

(c) $u=\int_0^x d\xi\int_0^y a(\xi,\eta)d\eta$ [illegible] 任意函數）

2.應用如下轉換：

$$x=\xi+\eta,$$

$$y=5\xi+2\eta,$$

$$u=f(y-2x)+g(3x-y)+\text{[illegible]}$$

3. $z^2(z_x^2+z_y^2+1)=1$

4. $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$；如此當 $x\geqq0$ 時，

$$0=u(x,0)=f(x)+g(x),$$

$$0=u_t(x,0)=-af'(x)+ag'(x);$$

將前一式求導，與後一式比較，則

$$f'(x)=0,\quad g'(x)=0,$$

或 $$f(x)=c,\quad g(x)=-c\quad 當\ x\geqq0.$$

其次，當 $t\geqq0$ 時，

$$\phi(t)=u(0,t)=f(-at)+g(at)=f(-at)-c,$$

即 $f(\xi)=c+\phi\left(\frac{\xi}{-a}\right)$，若 $\xi<0$. 惟 $x+at\geqq0$, 故 $g(x+at)=-c$，由是知

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & 當\ x-at\geqq0\\ \phi\left(\frac{x-at}{-a}\right) & 當\ x-at\leqq0\end{cases}$$

若 $x>0,\quad t>0.$

5.若 $u(x,y)=\Sigma a_{\nu\mu}x^\nu y^\mu$，則

$$a_{\nu+1,\mu+1}=\frac{a_{\nu\mu}}{(\nu+1)(\mu+1)},\quad 又\ a_{\nu0}=a_{0\nu}=0,\ 因\nu\geqq0,\ a_{00}=1,$$

故 $$u(x,y)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu y^\nu}{\nu!^2}=J_0(2i\sqrt{xy}),\quad J_0\ 爲\ \text{Bessel 函數}.$$

6.(a) $f'^2(x)+g'^2(y)=1,$

$$f'^2(x)=1-g'^2(y),$$

由是知 $f'^2=c^2$, $1-c'^2=$ [illegible]

故 $u=(x+\sqrt{1-c^2}$ [illegible]

(b) $u=f(x)+g($ [illegible]$)$.

[illegible] 常數 [illegible]

若 [illegible]

[illegible]

如是對 $u=\sqrt{(2cx+c($ [illegible] 任意常數

7. 由雙參變族 [illegible]

[illegible]

此單參變族之包面為 [illegible] 代入於 [illegible] $f(t), g(t))$ 可證其適為 $F(x,y,z,z_x,z_y)=0$ 之解 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

又 $z=u(x,y,a,b)$ 滿足 $F($ [illegible] 之 [illegible]

8. $u=x\sqrt{\frac{y}{x+k}}+y\sqrt{\frac{x+k}{y}}+k\sqrt{\frac{y}{x+k}}$

第十[illegible]章

第一節, 第 829 頁.

1. (a),(b),(c) 處處連續; (d)在 [illegible] 0 有一斷點.

2. 無.

3. $|\zeta|^2=\zeta\bar{\zeta}=\frac{\alpha\bar{\alpha}z\bar{z}+\beta\bar{\beta}+(\alpha\bar{\beta}z+\bar{\alpha}\beta\bar{z})}{\beta\bar{\beta}z\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}+(\alpha\bar{\beta}z+\bar{\alpha}\beta\bar{z})}$;

如是當 $\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}=1$ 時, 分子與分母之差為

[illegible]

故 $|z|>1$ 時,分子大於分母,[illegible],分母大於分子,[illegible] $\alpha\bar{\alpha}=1$,適得其逆.

4. 令 $z=re^{i\phi}$,$\zeta=\xi+i\eta$,則有

$$\xi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\phi$$

$$\eta=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\phi$$

若 $r=c$,則

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\frac{1}{4}\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}=1;$$

若 $\phi=c$,則

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 c}-\frac{\eta^2}{\sin^2 c}=1$$

6. 先令 $\zeta=az+b$,轉換於單位圓,復用 [illegible]

7. ζ 平面中圓或直線方程式爲(α 及 β 爲實數)

$$\alpha\zeta\bar{\zeta}+\bar{\beta}\zeta+\beta\bar{\zeta}+\gamma=0.$$

試將 ζ 代入其中,得一 z 之方程式,其形式如前

  固定點之方程式爲 $cz^2+dz-az-b=0$,

尋常有兩不同之根,經過固定點之圓轉換後復爲一圓,依然經過固定點,至一族互相垂直之圓必轉換於己,因圓轉換於圓,而此轉換復有保角性故也

第二節,第 836 頁.

2. 級數絕對收斂(參考上卷 285 頁)

第三節,第 841 頁.

2. 據 Cauchy-Riemann 方程式,已知 v 之偏導數 v_x 及 v_y,因可積條件 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 成立,故如是之 v 必存在:

$$v(x,y)=\int_{x_0,y_0}^{x,y}(v_y dy+v_x dx)+c;$$

其中 c 爲一常數.又據 Cauchy-Riemann 方程式可知 v 必爲一勢函數.

第四節,第 844 頁.

1. 觀 $h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int$ [illegible]

顯爲 z 之解析函數．因之，[illegible]數公式([illegible] 2)，得 $h^{(\mu)}(z)$ 如

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\nu!\,[illegible]$$

$$\frac{\mu!}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\mu}[illegible]$$

其中各項惟 $\mu-\nu\leqq$ [illegible] 時，有一項在 $z=0$ 爲零；若 $\mu<n$，無其他之項[illegible]一項，故

$$h^{(\mu)}(0)=\frac{\mu!}{2\pi i}[illegible]$$

2. $|a_\nu|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{[illegible]}\right|$ [illegible] 圓，以原點爲中心，ρ 爲半徑者．

3. $\int_c\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 等於 [illegible] 在 c 以內剩餘之總和．若 f 在 [illegible] z_0 有一 n 重零點：

$$f(z)=[illegible]$$

則

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=[illegible]$$

故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=z_0$ 之剩餘爲 $2\pi i n$．

4.(a)考方程式 $P(z)+\theta Q(z)=0$ 之根，除雖 θ，其個數當爲

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{P'(z)+\theta Q'(z)}{P(z)+\theta Q(z)}dz$$

其分母不論 θ 在 $0\leqq\theta\leqq1$ 如何變化，在 c 之上不能爲零．因之，此函數爲 θ 之連續函數．惟其爲一整數，故爲一常數，故其值在 $\theta=0$ 及 $\theta=1$ 時相等．

(b)若 $|a|<r^4-\frac{1}{r}$，則 $r>1$．故 $z^5+1=0$ 在 $|z|=r$ 之內有五個根；若令 $P(z)=z^5+1$，$Q(z)=az$，則在 $|z|=r$ 之上有

$$|Q(z)|=|az|<[illegible]<|z^5+1|=|P(z)|$$

5.參考題 3 證法

第四節，第 849 頁．

4.式之左方爲 $\frac{z^k}{f(z)}$ 之剩餘總和，故等於 $\frac{1}{2\pi i}\int[illegible]$，沿一圓之包圍所有根 a_ν 而積者．惟此積分當圓之半徑無限制增大時，[illegible]

第四節，第 851 頁

1. $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$ 必為實數.

2. $\Delta=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ 必為實數. 何則，設 C 為一經過 z_1, z_2, z_3 之圓，可將 C 由一線性關係 $\zeta=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ 轉換於實軸（本章第一節題 6）；但據同節題 5，Δ 不因此而變，故轉換後 z_4 之影如與 z_1, z_2, z_3 之影同在一圓之上，則必非實數 [illegible]，故 Δ 必不實數.

3. 欲證之等式為

$$\sqrt{|z_1-z_2||z_3-z_4|}+\sqrt{|z_2-z_3||z_1-z_4|}=\sqrt{|z_1-z_3||z_2-z_4|}$$

或

$$1+\sqrt{\left|\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right|}=\sqrt{\left|\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right|}.$$

惟平方根號下之數不因轉換而變，已見本章第一節題 5。今用一適當轉換，將圓轉為實軸，則但對直線上四點證 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$ 即可，其事自顯而可見.

4. $\zeta=e^{iz}$ 除 $\zeta=0$ 一值外，可取得任何值，此可由 $e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$ 見之. 然後選擇 ζ，使滿足

$$c=\cos z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

此為一二次方程式，必有一根如

$$\zeta=c\pm\sqrt{c^2-1},$$

又此根不等於零，故必有一 z.

5. 參考題 4. 若令 $\zeta=e^{iz}$，則

$$\tan z=\frac{1}{i}\cdot\frac{\zeta-\dfrac{1}{\zeta}}{\zeta+\dfrac{1}{\zeta}}=c$$

或

$$\zeta=\sqrt{\frac{1+ic}{1-ic}},$$

由此可見惟有 $c\neq\pm i$ 時，ζ 有一有窮值不等於零. 故 c 不等於 $+i$，又不等於 $-i$ 時，$\tan z=c$ 始可解.

6. 令 $z=x+iy$，可知 $x=n\pi$ 或 $y=0$ 時，$\cos z$ 為實數；又 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 或 $y=0$（n 為一整數）時，$\sin z$ 為實數.

7. (a) $r=1$（因 $|z|>1$ 時，各項將無限增大；如 $|z|<1$，可與幾何級數比較）.

(b) $r=0$,

(c) $r=1$.

8. 參考上卷 §3·5·4.

9. (a) 將 $\frac{e^{iz}}{1+z^4}$ 沿上半圓求積分:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(b) 將 $\frac{z^2e^{iz}}{1+z^4}$ 沿上半圓求積分.

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) 將 $\frac{e^{iz}}{q^2+z^2}$ 沿上半圓求積分: $\frac{\pi}{q}e^{-q}$

(d) $\frac{\pi(2^{a-1}-1)}{\sin\pi a}$.

10. (a) 在 $z=2n\pi$ 之剩餘為 $+2\pi i$

在 $z=(2n+1)\pi$ 之剩餘為 $-2\pi i$.

(b) 在 $z=2n\pi+\frac{3\pi}{2}$ 之剩餘為 $+2\pi i$;

在 $z=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 之剩餘為 $-2\pi i$.

(c) 應用 $\Gamma(z)=\Gamma(z+\nu+1)/z(z+1)\cdots(z+\nu)$. 在 $z=-\nu$ 之剩餘為

$$\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}2\pi i.$$

(d) 在 $z=n\pi i$ 之剩餘為 $2\pi i$.

11. 應用 $\frac{\cot\pi t}{t-z}=\frac{\cot\pi t}{t}+\frac{z\cot\pi t}{t(t-z)}$; $\cot\pi t$ 在平方 C_n 之值有界, 而 $\frac{\cot\pi t}{t}$ 沿平方對邊之積分兩相抵消, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\cot\pi t}{t-z}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{z\cot\pi t}{t(t-z)}dt.$$

由此可得

$$\cot\pi x=\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2-1^2}+\frac{1}{x^2-2^2}+\cdots\cdots\right).$$

(參閱上卷第 338 頁).

12. $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$

因之
$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+R_n,$$

$$R_n=(-1)^n\int_0^z \frac{t^n}{1+t}dt.$$

若令 $z=e^{i\theta}$，又以自 0 至 $e^{i\theta}$ 之直線而求積分值，[illegible]

$$|R_n|=\left|\int_0^1 \frac{z^{n+1}t^n}{1+zt}dt\right|\leqq\frac{1}{m}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{m(n+1)},$$

其中 m 爲 $1+e^{i\theta}$ 在 $0\leqq t\leqq 1$ 中之最小值．故若 $z=e^{i\theta}\neq -1$，R_n 必趨於零．

雜題，第 871 頁．

1.(a)倘有一線性關聯如 $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}+c\mathbf{z}=0$，其中 $a\neq 0$，則求其與 $\mathbf{x}$ 之標積，將有 $a\mathbf{x}\mathbf{x}+b\mathbf{y}\mathbf{x}+c\mathbf{z}\mathbf{x}=a\mathbf{x}^2=0$，於是因 $\mathbf{x}^2\neq 0$，將有 $a=0$．

(b)考 $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}+c\mathbf{z}=0$ 之意，無異謂

$$ax_1+by_1+cz_1=0,$$
$$ax_2+by_2+cz_2=0,$$
$$ax_3+by_3+cz_3=0;$$

若其行列式不等於零，則 $a=b=c=0$．

(c) 考矢量方程式 $\mathbf{v}=a\mathbf{x}+b\mathbf{y}+c\mathbf{z}$ 之意，無異謂有三聯立線性方程式以規定 a,b,c．據(b)，其行列式既不等於零，則必有一解 a,b,c．

2.取一坐標系 Ox,Oy,Oz．如是則(a)即爲行列式之乘法定理；(b)即爲如下恆等式：

$$\begin{vmatrix} x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3' & x_1y_1'+x_2y_2'+x_3y_3' \\ y_1x_1'+y_2x_2'+y_3x_3' & y_1y_1'+y_2y_2'+y_3y_3' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_3' & x_1' \\ y_3' & y_1' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

但將左方行列式裂爲九個行列式之和，即可知其眞確．(c)可計算 x,y,z 之部分而驗之；(d)爲(c)及 1(b) 之必然結果，因據(c)

$$[\mathbf{x}[\mathbf{y}\mathbf{z}]]+[\mathbf{y}[\mathbf{z}\mathbf{x}]]+[\mathbf{z}[\mathbf{x}\mathbf{y}]]=0.$$

最後如 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 爲三個矢量，其方向爲三條共點直線，則經過 $\mathbf{x}$ 之平面，垂直於 $\mathbf{y}$ 及 $\mathbf{z}$ 者，必經過 $\mathbf{x}$ 及 $[\mathbf{y}\mathbf{z}]$，故其法線方向必爲 $[\mathbf{x}[\mathbf{y}\mathbf{z}]]$；故如是三法線必在一平面，即三平面必經過一直線．

4. 將 $Ox'y'$ 作一 ψ 角度之旋轉，轉入於一新坐標 [illegible]，則 [illegible] 直接轉換於 $Ox''y''$，即得欲證之結果.

5. (a) 在 Ox, Oy, Oz 坐標系中，設 [illegible] $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$，[illegible] $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$，$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. 若其行列式有垂直性，則此三矢量即成一個直角坐標系.

(b) 由 Ox', Oy', Oz' 隨 [illegible] 之轉換 [illegible]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ \gamma_1 & [illegible] & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

此行列式必有垂直性.

6. 由 Ox, Oy, Oz 以如下三種旋轉總合而轉入 [illegible]：

(1) 將 Oz 軸作 ϕ 角度之旋轉而得一新坐標系 Ox_1, Oy_1, Oz_1 $(Oz = Oz_1)$.

(2) 將 Ox_1 軸作 θ 角度之旋轉，得 Ox_2, Oy_2, Oz_2 $(Ox_1 = Ox_2, Oz_2 = Oz')$.

(3) 將 Oz_2 軸作 ψ 角度之旋轉，而得 Ox', Oy', Oz'. 在每次旋轉中，坐標之轉換，悉依題 3 實施. 最後將 x_1, y_1, z_1 及 x_2, y_2, z_2 消去，但將 [illegible] 之行列式依 [illegible] 之次序乘之可矣.

7. 注意 $\cos xOx' = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta$.

8. 設 a 為一單位矢量，其方向為平面之法線；又 b 為一單位矢量，其方向為題中之已知直線，則 $\frac{\pi}{2} - \phi$ 為 a 及 b 間之角. 如是則

$$\phi = \arcsin\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

9. $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

11.
$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin(\beta-\gamma) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix};$$

右方第一因子等於 1.

12. 試加第三及第二列於第一列，棄去 $A - 2B$，然後由第二及第三行減去第一行，則有

$$D = (A + 2B)(B - A)^2$$
$$= [(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)]^2.$$

13. 欲知此行列式為一一次函數，可將第一列乘 [illegible] 中，$x = -a$ 或

$x=-b$，即得 A 及 B．

14．因 $uv=1$，可知

$$u'v+uv'=0,$$

$$u''v+2u'v'+uv''=0,$$

$$u'''v+3u''v'+3u'v''=-uv'''$$

此方程式可視爲規定 v，v'，v'' 之線性方程式，其行列式爲 D，藉由是求 v，則有

$$v=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 2u' & u \\ -uv''' & 3u'' & 3u' \end{vmatrix}=-u^3v'''\frac{1}{D},$$

故 $v'''=\frac{Dv^4}{u^3}=\frac{D}{u^4}$．

16．(b)令 $z=\log u$，則 $z_{xy}=0$，即 z_x 不隨 y 而變．設 $z_x=\varphi(x)$，則

$$z=\int^x\varphi(x)dx+\psi(y).$$

復令 $$e^{\int^x\varphi(x)dx}=f(x),\quad e^{\psi(y)}=g(y),$$

則 $$u=e^z=f(x)g(y).$$

17．將 $F(u_x,u_y)=0$ 對 x 及 y 求導．

18．$u=xf\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)$.

19．(a) $|f(x+h,y+k)-f(x,y)|=\left|\frac{2hx+4ky+h^2+2k^2}{\sqrt{1+(x+h)^2+2(y+k)^2}+\sqrt{1+x^2+2y^2}}\right|$

$$\leqq|2hx+4ky+h^2+2k^2|$$

$$\leqq2|h^2+k^2+2hx+2ky|$$

$$\leqq2[h^2+k^2+2\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{x^2+y^2}]$$

$$\leqq2\sqrt{h^2+k^2}(1+2\sqrt{x^2+y^2}),\qquad h^2+k^2<1.$$

故 $\sqrt{h^2+k^2}\leqq\frac{\epsilon}{2+4\sqrt{x^2+y^2}}$ 足致 $|f(x+h,y+k)-f(x,y)|<\epsilon$．

20．令 $x=at$，$y=bt$；如是則

$$\lim_{t\to0}f(x,y)=\lim_{t\to0}a^4b^4\frac{t^2}{(a^2+b^4t^2)^3}=0,$$

$$\lim_{t\to0}g(x,y)=\lim_{t\to0}\frac{a^2t^2}{a^2t^2+b^2t^2-at}=0;$$

但(x,y)沿一拋物線 $y^2=x$ 趨近原點,則 [illegible]

21.設 C 之方程式爲 $x=x(t)$, $y=y(t)$, [illegible] 爲連續可導之函數.在 C 上取兩點,與 t_1 及 t_2 相應者,應用中值定理,得

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=(t_2-t_1)\sqrt{\dot{x}(\tau_1)^2+\dot{y}(\tau_1)^2},$$

$$d=\sqrt{[x(t_2)-x(t_1)]^2+[y(t_2)-y(t_1)]^2}=(t_2-t_1)\sqrt{\dot{x}(\tau_2)^2+\dot{y}(\tau_3)^2}.$$

其中 τ_1,τ_2,τ_3 介於 t_1 及 t_2 之間;由是知

$$l-l=O(t_2-t_1),$$

因 $$\sqrt{\dot{x}(\tau_1)^2+\dot{y}(\tau_1)^2}-\sqrt{\dot{x}(\tau_2)^2+\dot{y}(\tau_3)^2}\to 0\quad 當\ t_2-t_1\to 0.$$

22.因級數中均爲正項,故證其收斂並求其和,可不問其項之前後次序.令 $a+b=n$, 則

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\frac{a}{x^a y^{n-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y^n}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}a\left(\frac{y}{x}\right)^a$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y^n}\frac{y}{x}n\left(1+\frac{y}{x}\right)^{n-1},$$

因 $$\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}az^a=nz(1+z)^{n-1}$$

成立之故(此可由下列恒等式 $\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}z^a=(1+z)^n$ 求導以知之).

因此 $$S=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^{n-1}=\frac{1}{x}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}.$$

24. $$k=\sqrt{\ddot{\mathbf{x}}^2}.$$

惟 $$\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}''\dot{t}^2+\mathbf{x}'\ddot{t},$$

$$\dot{t}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}'^2}},\quad \ddot{t}=\frac{d}{dt}(\dot{t})\frac{dt}{ds}=-\frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}{(\mathbf{x}'^2)^2};$$

故 $$\ddot{\mathbf{x}}=\frac{\mathbf{x}''}{\mathbf{x}'^2}-\frac{(\mathbf{x}'\mathbf{x}'')}{(\mathbf{x}'^2)^2}\mathbf{x}',$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^2=\frac{\mathbf{x}''^2\mathbf{x}'^2-(\mathbf{x}'\mathbf{x}'')^2}{(\mathbf{x}'^2)^3}.$$

25.據定義既有 $$x'^2+y'^2=1;$$

由是求導,得 $$x'x''+y'y''=0\ \cdots\cdots(a)$$

若令 $$x'y''-x''y'=\gamma,$$

則 $$x''=-\gamma y',\quad y''=\gamma x',$$

故 $$x''^2+y''^2=\gamma^2.$$

復因 $z'=a$, $z''=0$, 故密吻面之方程式爲

$$-ay''(\xi-x)+ax''(\eta-y)+(\zeta-z)\gamma=0;\cdots\cdots(b)$$

此必含有柱面之法線,其方程式爲

$$(\xi-x)x'+(\eta-y)y'=0,\quad \zeta=z.$$

據(a),可知曲率爲

$$k^2=\frac{(x'^2+y'^2+a^2)(x''^2+y''^2)}{(x'^2+y'^2+a^2)^3}=\frac{\gamma^2}{(1+a^2)^2}.$$

又據(b),知從法線矢量爲

$$\left(\frac{-ay''}{\sqrt{a^2(x''^2+y''^2)+\gamma^2}},\ \frac{ax''}{\sqrt{a^2(x''^2+y''^2)+\gamma^2}},\ \frac{\gamma}{\sqrt{a^2(x''^2+y''^2)+\gamma^2}}\right),$$

或 $$\left(-\frac{ay''}{\gamma\sqrt{1+a^2}},\ \frac{ax''}{\gamma\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$

或 $$\left(\frac{-ax'}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{-ay'}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

若 τ 爲此矢量對弧長(弧素爲$(1+a^2)ds$)之導數之絕對值,遂得

$$\tau^2=\frac{a^2}{(1+a^2)^2}(x''^2+y''^2)=\frac{\gamma^2a^2}{(1+a^2)^2}.$$

26.密吻面之方程式爲

$$f+f''=\xi(f''\cos\theta+f'\sin\theta)+\eta(f''\sin\theta-f'\cos\theta)+\zeta;$$

其與原點相去之距離爲

$$\frac{f+f''}{\sqrt{1+f'^2+f''^2}},$$

此在如上假定下變爲 $\sqrt{1+\frac{1}{A^2}}$.

27.參考題 24.

28.(a)平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}at_1^3 - x & \frac{1}{2}bt_1^2 - y & ct_1 - z \\ \frac{1}{3}at_2^3 - x & \frac{1}{2}bt_2^2 - y & ct_2 - z \\ \frac{1}{3}at_3^3 - x & \frac{1}{2}bt_3^2 - y & ct_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

(b)在 t 點之密吻面爲經過三點之平面當其趨近 t 時所趨之極限面;因此

$$t^3 - \frac{3z}{c}t^2 + \frac{6y}{b}t - \frac{3x}{a} = 0$$

於是 t_1, t_2, t_3 三點上之密吻面如相交於 (x, y, z),則此方程式在 $t=t_1$, $t=t_2$ 及 $t=t_3$ 時必得滿足;由是得

$$\frac{3z}{c} = t_1 + t_2 + t_3,$$

$$\frac{6y}{b} = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3,$$

$$\frac{3x}{a} = t_1t_2t_3.$$

如是獲得之 x, y, z 必滿足(a)中平面方程式.

29. 若 b, c 暫時固定,惟 a 獨自變化,則 $s = \frac{1}{2}bc\sin A$,　$ds = \frac{1}{2}bc\cos A\,dA$.

復由 $a^2 = bc^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 求導,得 $a\,da = bc\sin A\,dA$,

故

$$ds = \frac{a}{2\sin A}\cos A\,da = R\cos A\,da.$$

30. 矢量 AP 之部分,以 x, y, z 表之,如是則

$$AP = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad d(AP) = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \mathbf{a}\,dP.$$

31.　$\mathbf{P} = \mathbf{A} - PA\cdot\mathbf{a}$,　$\dot{\mathbf{P}} = -PA\cdot\dot{\mathbf{a}} - \frac{d}{dt}(PA)\cdot\mathbf{a}$,

或

$$PA\cdot\dot{\mathbf{a}} = -\frac{d}{dt}(PA)\cdot\mathbf{a} - \dot{\mathbf{P}}.$$

復據題 30,　$\frac{d}{dt}(PA) = -\mathbf{a}\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{a}(\mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c}w) = -u - (\mathbf{ab})v - (\mathbf{ac})w$.

故

$$PA\cdot\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a}u + (\mathbf{ab})v\mathbf{a} + (\mathbf{ac})w\mathbf{a} - \mathbf{a}u - \mathbf{b}v - \mathbf{c}w$$

$$= [(\mathbf{ab})v + (\mathbf{ac})w]\mathbf{a} - v\mathbf{b} - w\mathbf{c}.$$

32.　$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c}w$,故 $\ddot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{a}}u + \dot{\mathbf{b}}v + \dot{\mathbf{c}}w + \mathbf{a}\dot{u} + \mathbf{b}\dot{v} + \mathbf{c}\dot{w}$.

據前題代入 $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{c}}$,即得 $\ddot{\mathbf{P}}$.

33. 若錐線之方程式為 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$，則包絡為 $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2\pm b^2y^2)$. 若此錐線為一直角雙曲線，則包絡即為一雙紐線：$(x^2+y^2)^2=4a^2(x^2-y^2)$.

35. 若 P 描寫 Γ 之足線 Γ'，則以 OP 為直徑，繪一圓，與 Γ 之平面垂直；其包面即為此動圓所創造之曲面.

37. 橢圓.

38. 平面若與兩拋物線相切，其方程式為

$$-c^2x+cy+cz=1,$$

或

$$-c^2x+cy-cz=1,$$

其包面為 $(y+z)^2=4x$ 及 $(y-z)^2=4x$.

39. 證法與 $n=2$ 時相似(第三章附錄第一節). 一正定兩次齊次式 $\sum a_{ik}x_ix_k$ 可用一適當轉換 $x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}y_k$, $i=1,2,3,\cdots\cdots,n$ (其行列式不等於零者)變為如下形式

$$\sum a_{ik}x_ix_k=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2$$

$$>m(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2),$$

其中 m 為一適當正常數. 一齊次式 $\phi=\sum a_{ik}x_ix_k$ 為正定之必要與充分條件，為如下所示諸子行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

均為正數. 若 $-\phi$ 為正定，則 ϕ 為負定.

40. 作 $f=0$ 之草圖，並考 f 之正負在整個平面中之變化情形.

41. 若 $P_i=(x_i,y_i)$, $r_i=PP_i$，則

$$d^2f=\sum_{1}^{3}d^2r_i=\sum_{i=1}^{3}r_i^{-3}[(y-y_i)dx-(x-x_i)dy]^2$$

為正定.

42. 在 P_1. 注意 $f=r_1+r_2+r_3$ 在平面中處處連續，惟在 P_1,P_2,P_3 三點不復可導(如 $z=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$). 試在 P_1 鄰近研討 f 之導數.

43.據所述方[illegible]由(3)計算 $d^2 x$ [illegible] $\cdots\cdots, d^2 x_m$ 將(3)代入,注意(1)之意,得

$$d^2 \varphi_\mu [illegible] (\mu = 1, 2, \cdots\cdots, m);$$

將此各式以 λ_μ 乘之,加於(1),則有 [illegible] 蓋 $d^2 x_1, \cdots\cdots, d^2 x_m$ 等因(2)之故不復出現也.

44.令 $F = f + \lambda\varphi$,則

$$d^2 F = \sum_{i,k=1}^{n} dx_i dx_k, \quad [illegible] dx_1 + \cdots + dx_n = 0;$$

然後消去 dx_n,詳如上二次式

$$-d^2 F = (dx_1 + \cdots\cdots + dx_{n-1})^2 + \sum_{i,k=1}^{n-1} [illegible] + \sum_{i,k=1}^{n-1} dx_i dx_k$$

為正定.

46.坐標軸.

47. $y = x^2(1 \pm x^{\frac{1}{2}})$ 曲線之兩支在原點有一尖點,而兩支均在其共同切線之一面.

48.(a) 令 $f = lx + my + nz$, $\varphi = x^p + y^p + z^p - c^p$, $F = f - \lambda\varphi$,則駐值之條件

$$l = \lambda p x^{p-1}, \quad m = \lambda p y^{p-1}, \quad n = \lambda p z^{p-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

將此各式分別以 x, y, z 乘之,復相加,則有

$$lx + my + nz = \lambda p c^p \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

由(A)計算 x, y, z 代入於 $\varphi = 0$,則

$$\lambda p = (l^q + m^q + n^q)^{\frac{1}{p}} c^{1-p},$$

將此代入於(B),即得欲求之駐值.

(b)參考題43,在此得

$$d^2 F = -\lambda p(p-1)(x^{p-2} dx^2 + y^{p-2} dy^2 + z^{p-2} dz^2),$$

因 $\lambda p > 0$,此二次式當視 $p \lessgtr 1$ 而知其為正定或負定.

49.在 $x = 1$, $y = 4$ 時有一真小值;又 $x = -1$, $y = 2$ 復有一駐值.

50.令 AB 與 Σ 相切於 P.設 $A'B'$ 為另一切線,其接觸點為 P'.如是則以 $d\varphi$ 表 AB 及 $A'B'$ 間之角,又將兩重以後各項置而不顧,可知 $A'B'C$ 與 ABC 面積之差為

$$dS = \frac{1}{2}(\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2);$$

欲求三角形面積最小,即 $dS=0$, 則 $AP=BP$.

51.應用如下轉換:

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha$$

$$y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

52.以 S 表曲線 $f(x,y)=C$ 之,S' 表 $g(x,y)=C'$ 之,設 S' 有一接觸點在 (a,b) 就一般而論,$f(x,y)-C$ 之值在 S 之一面為正,在其他一面在某相當鄰近為負. $g(x,y)-C'$ 之對 S' 亦如之.若 $f(a,b)$ 為 f 之最大值,則在 S' 之上將有 $f(x,y)-C\leqq 0$,即 S' 完全在 S 之一面,於是 S 亦在 S' 之一面.如是 $g(x,y)-C'$ 在 S 上之正負,必固定不易,因其在 (b,c) 為零,故必有一最大或最小值.

53.轉動切線之方程式為

$$x\sin\theta+y\cos\theta=a(\theta\sin\theta+\cos\theta-1),$$

55. $$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1-x^2\cos^2\theta}\right)d\theta$$

因 $$\int\frac{1}{1-x^2\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

選擇 $$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{\pi}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

故 $$f(x)=\pi\log(1+\sqrt{1-x^2})-\pi\log 2.$$

56 $$\Sigma=\iint\sqrt{EG-F^2}\,dr\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_0^{f'(\theta)}\sqrt{r^2+f'^2}\,dr$$

$$=\left[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right]\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}f'^2\,d\theta,$$

適為 $[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$ 倍於其投影之面積,在

$$\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2,\quad 0\leqq r\leqq f'(\theta)$$

之間者.

57.因 $A-BR^2=\frac{5}{2}$, $A-\frac{3}{5}BR^2=\frac{11}{2}$,故 $A=10$, $B=\frac{15}{2}\frac{1}{R^2}$. 球面半徑為 r 者,其內部所有點之總質量,集中於球中心所施之吸力,即為欲求之吸力.

58.將坐標軸平移,可將三角形移於上半平面.如是則轉動慣量為

$$\frac{1}{6}(x_1y_1,x_2y_2)+\frac{1}{6}(x_2y_2,x_3y_3)+\frac{1}{6}(x_3y_3,x_1y_1),$$

其中 $\phi(x_1y_1, x_2y_2)$ 為一四邊形之轉動慣量，其頂點為 $(x_1,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_2,0)$ 者，復以(x_1-x_2)之正負號乘之，然後證

$$\phi(x_1y_1, x_2y_2)=\frac{1}{12}(x_1-x_2)(y_1^3+y_1^2y_2+y_1y_2^2+y_2^3).$$

60． $2-\frac{\pi}{2}$.

61．用極坐標．

62． $I=\int_1^2(y-4)\,dy\int_{\frac{8y-20}{y-4}}^{\frac{4}{y}}dx=12-16\log 2$.

63．(a) $K=\int_0^\beta d\theta\int_0^a r\log r^2\,dr$.

(b) $K=\int_0^a\left\{\int_0^{\phi(x)}\log(x^2+y^2)\,dy\right\}dx$,

其中 $\phi(x)=x\tan\beta$ 當 $0\leqq x\leqq a\cos\beta$；

$\sqrt{a^2-x^2}$ 當 $a\cos\beta\leqq x\leqq a$.

64． $V=\frac{7}{72}\pi h^3\tan^2\alpha$.

因 $V=\iint z\,d\sigma=\iint\left(h-\frac{r}{\tan\alpha}\right)d\sigma$，施諸於

$$h\tan\alpha(1-\sin^{\frac{4}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta)\leqq r\leqq h\tan\alpha.$$

即 $$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{h\tan\alpha(1-\sin^{\frac{4}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta)}^{h\tan\alpha}\left(h-\frac{r}{\tan\alpha}\right)r\,dr$$

$$=h^3\tan^2\alpha\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^{\frac{8}{3}}\theta\cos^{\frac{4}{3}}\theta\,d\theta-h^3\tan^2\alpha\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta;$$

然後於第一積分中用 $\sin^2\theta=y$ 替代，得

$$\int_0^1 y^{\frac{5}{6}}(1-y)^{\frac{1}{6}}dy=B\left(\frac{11}{6},\frac{7}{6}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{5}{72}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{36}\pi,$$

其中已應用 gamma 函數之推廣定理．

65．曲面上之直線 x＝常數，或 y＝常數為漸近線．因 $dS=(1+z_x^2+z_y^2)^{\frac{1}{2}}dx\,dy$,

故 $$I=-\int_0^{\eta}dy\int_0^{\xi}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int_0^{\eta}\frac{\xi}{(1+y^2)(1+\xi^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}dy$$

$$=-\arctan\frac{\xi\eta}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

66. $$\frac{d}{da}K(a)=\int_0^{\pi}\frac{d}{da}\left(\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}};$$

於是 $K(a)=\pi\arcsin a+$常數,其中常數由 $K(0)=0$ 規定之.

67.應用 u,v 爲新變數如 $u=\frac{x^3}{y}$, $v=\frac{y^2}{x}$,則面積爲

$$\int_{a^2}^{b^2}\int_c^d\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv=\frac{1}{5}\int_{a^2}^{b^2}u^{-\frac{2}{5}}du\int_c^d v^{-\frac{1}{5}}dv.$$

68.用坐標系 Ox_1, Ox_2, Ox_3. 以 $\boldsymbol{x}$ 表 Γ 上動點之位置矢量.如是則

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}[\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}]$$

都有所要求之特性.蓋

$$a_{x_3}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}x_1dx_2-x_2dx_1$$

爲 Γ 投於 Ox_1x_2 平面之面積.

69.運動在平面中進行:

$$\ddot{x}=-\frac{x}{r}p,$$

$$\ddot{y}=-\frac{y}{r}p.$$

由是 $$x\dot{y}-\dot{x}y=h=\text{常數},$$

$$\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}=-\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}p=-\dot{r}p.$$

故 $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=-\dot{r}p.$$

切線與原點相去之距離爲

$$q=\frac{|x\dot{y}-\dot{x}y|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=\frac{h}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

因之遂有
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{p^2}{q^2} \cdots f \cdots \text{[illegible]}$$

或
$$\frac{1}{2}\frac{\cdots}{\cdots}\ \frac{p^2}{\cdots} \cdots = -f$$

又軌道如爲 $r=a(1+\cos\theta)$，則 $q=\sqrt{\frac{r^3}{2a}}$ [illegible]

70. 運動方程式爲

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -\lambda^2 x - 2\mu\dot{y}\\ \ddot{y} &= -\lambda^2 y + 2\mu\dot{x}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

兩次求導，並消去 y 或 x，得

$$\ddddot{x} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\ddot{x} + \lambda^4 x = 0,$$

$$\ddddot{y} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\ddot{y} + \lambda^4 y = 0;$$

故 x 及 y 各爲 $\cos(\mu+\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t$，$\cos(\mu-\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t$，

$\sin(\mu+\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t$，$\sin(\mu-\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t$，

四特解乘以 a,b,c,d 或 a',b',c',d' 後之總和．復由 (A) 知 $a'=-c$，$b'=-d$，$c'=a$，$d'=b$．然後以開始條件規定之．

71. (b) 以 x^3 乘之，此方程式即有 (a) 之形式．復有特解 $u=x^3$，$v=x^5$，故據 (a) 又得一第三解 $w=1+x^2$；其通解遂爲

$$A(1+x^2)+Bx^3+Cx^5.$$

72. 曲線之微分方程式爲

$$n\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=r,$$

試用極坐標 r,θ，並以 θ 爲自變數，

$$\frac{nr^2}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}=r,$$

是即
$$\frac{d\log r}{d\theta}=\frac{n}{\cos\theta}+\tan\theta,$$

由是得
$$r=a\frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^n}{\cos\theta}=a\frac{(1+\sin\theta)^n}{\cos^{n+1}\theta}.$$

73. $z_{tt}=a^2z_{xx}$ 之解爲

$$z=f(x+at)+g(x-at);$$

代入於 $z_t^2=a^2z_x^2$，則有 $f'g'=0$，

故得 f=常數,或 g=常數,因之 $z=f(x+at)$ 或 $f(x-at)$ 為兩方程式之最普通答案

74. 令 $u=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}V$, 及 V 之次數為 k, 則

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}= \text{[illegible]} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}},$$

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=kV.$$

故　$u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1+2k}{2}}V$ 為其一解.

75. 若 $x\neq0$, C' 為 f 所假定為解析變區中之一迴徑, 含有 y 而不含零者, 則

$$\frac{d^n}{dy^n}\frac{yf(y)}{(y+a)^{n+1}}=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C'}\frac{tf(t)}{(t+a)^{n+1}(t-y)^{n+1}}dt.$$

令其中 $a=y=\sqrt{x}$, 則右列積分變為

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C'}\frac{tf(t)}{(t^2-x)^{n+1}}dt.$$

再令 $t^2=\tau$，則

$$\frac{n!}{4\pi i}\int_{C}\frac{f(\sqrt{\tau})}{(\tau-x)^{n+1}}d\tau,$$

其中 C 為含 x 而不含零之迴徑. 此積分即為

$$\frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}f(\sqrt{x}).$$

76.
$$\left|\sinh(x+iy)\right|^2=\left(\frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}\right)\left(\frac{e^{x-iy}-e^{-x+iy}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\cosh 2x-\cos 2y)$$
$$\geqq\frac{1}{2}(\cosh 2x-1).$$

試繞一平方形，其邊為 $x=\pm\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 及 $y=\pm\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (n 為一整數)者而求積分, 當 $n\to\infty$ 時, 積分趨於零, 故剩餘之總和亦隨之趨零.

(完)